Problemi del Test di Ammissione

Lo Staff dello Stage*

20 novembre 2026

Introduzione

Ciao! I problemi che state per leggere sono una delle sfide che vi separano dalla possibilità di partecipare allo stage 2027. **Leggete attentamente questa introduzione**: vi sarà utile per un approccio corretto al test.

Avete a disposizione molti giorni per risolvere i problemi, perciò sentitevi liberi di andare a cercare/studiare gli argomenti che non conoscete bene: il test serve anche a questo. Sconsigliamo fortemente di cercare direttamente le soluzioni, di far risolvere i problemi ad altri o di svolgerli in gruppo: non servirebbe né a voi, dato che non favorisce l'approccio ad argomenti nuovi in maniera autonoma, né a noi per selezionarvi in modo appropriato, senza contare che c'è anche una prova orale...

Per svolgere i problemi è ammesso l'uso della calcolatrice scientifica e di materiale da disegno, oltre al supporto necessario per produrre effettivamente l'elaborato. Non sono consentiti ulteriori strumenti di calcolo.

I problemi sono stati ordinati grossomodo in ordine crescente di difficoltà. Ovviamente, questa è una valutazione molto soggettiva, quindi vi invitiamo a non scoraggiarvi e a provare a risolverli tutti: potrebbe succedere che alcuni dei problemi più difficili possano risultare facili e viceversa.

Per iscrivervi dovrete inviare un unico file `pdf` con tutte le vostre soluzioni. Per questa edizione, accetteremo solo soluzioni scritte a mano e poi scansionate/fotografate. È importante che sia perfettamente leggibile. Non potremmo dare alcun punto a ciò che non riusciamo a leggere! La dimensione massima del file unico da caricare sul sito è di 30 Megabyte.

Nel file consegnato, le soluzioni devono essere riportate nello stesso ordine dei corrispondenti problemi e deve essere chiaro a quale quesito si riferiscono!

È necessario spiegare tutti i passaggi svolti, anche parziali, e non riportare solo i risultati finali. Una risposta non giustificata, per quanto corretta, otterrà un punteggio parziale o nullo.

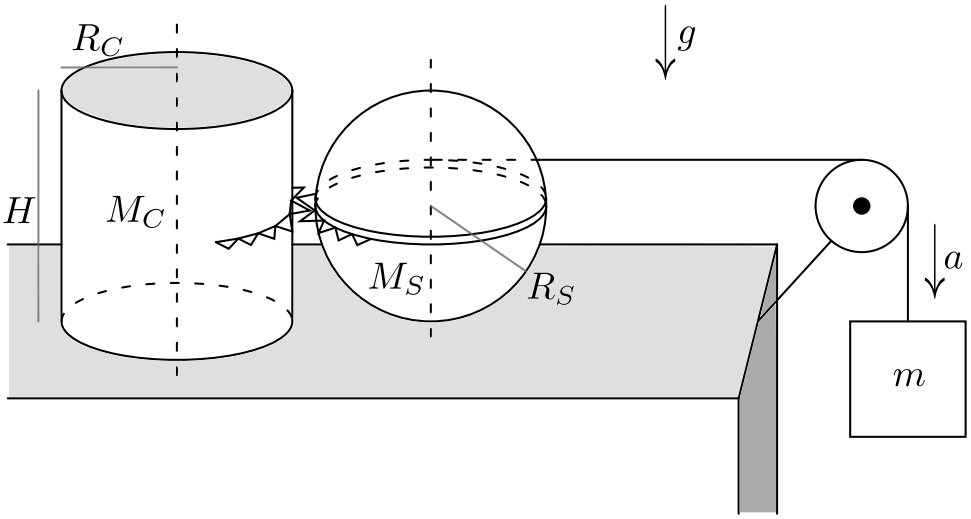
È importante che inviate anche soluzioni incomplete, nel caso non riusciate a risolvere alcuni problemi per intero: in questo caso verranno assegnati punteggi parziali. Inoltre, vi facciamo notare che, per alcuni problemi, è possibile rispondere a qualche richiesta anche senza aver svolto i punti precedenti.

Per eventuali domande rivolgetevi solamente all'indirizzo email segreteria.stagefisica@sns.it. Eventuali correzioni sul testo possono essere annunciate sul sito ufficiale dello stage stagefisica.sns.it.

Ovviamente, sappiamo che i più giovani potrebbero avere lo svantaggio di conoscere meno argomenti: ne terremo conto. Il test è valutato su un totale di 1000 punti. Il punteggio minimo necessario, ma non sufficiente, per poter fare l'orale è di soli 50 punti, al di sotto dei quali scarteremo la richiesta. Buon lavoro!

*segreteria.stagefisica@sns.it

PROB. 1 — LA DANZA DEI SOLIDI - 30 PT.



Nell'apparato mostrato in figura, un corpo di massa m è collegato a una carrucola ideale tramite una corda inestensibile di massa trascurabile, avvolta attorno all'equatore di una sfera omogenea di massa M_S e raggio R_S. Sulla superficie, la sfera ha dei denti che la vincolano a ruotare senza scivolare attorno a un cilindro dentato omogeneo di massa M_C, raggio R_C e altezza H. I denti hanno massa e dimensioni trascurabili. Si considerino fissi il centro della sfera e l'asse del cilindro. Quanto vale l'accelerazione del corpo di massa m?

PROB. 2 — CICLO REVERSIBILE - 40 PT.

Due moli di un gas perfetto compiono ciascuna una trasformazione isocora a volumi diversi, rispettivamente V_1 e V_2 con $V_1 > V_2$, operando tra le stesse due temperature T_c e T_f ($T_c > T_f$) ma in versi opposti: una mole subisce un riscaldamento da T_f a T_c assorbendo calore, mentre l'altra subisce un raffreddamento da T_c a T_f cedendo calore. Supponendo di avere a disposizione, oltre a due sorgenti di capacità termica infinita alle temperature limite T_c e T_f, anche infinite sorgenti di capacità termica finita che possono assumere qualsiasi temperatura compresa tra T_f e T_c, si vuole riutilizzare il calore ceduto durante il raffreddamento per l'altra trasformazione.

1. Potendo sfruttare le varie sorgenti e il calore ceduto nell'altra trasformazione, qual è il valore minimo del calore che è necessario fornire dall'esterno per eseguire la trasformazione di riscaldamento? Spiega inoltre come realizzare questo processo a livello pratico.

Un gas perfetto compie un ciclo termodinamico reversibile composto da un'espansione adiabatica dalla temperatura T_1 alla temperatura $T_2 < T_1$, seguita da una trasformazione isocora da T_2 a $T_3 < T_2$, seguita da una compressione adiabatica da T_3 fino alla temperatura $T_4 > T_3$. Infine chiude il ciclo una trasformazione isocora da T_4 fino alla temperatura iniziale $T_1 > T_4$.

2 Supponendo di avere a disposizione due sorgenti di capacità termica infinita alle temperature T_1 e T_3, quanto vale il rendimento η del ciclo?

Supponendo ora di avere a disposizione, oltre alle due sorgenti di capacità termica infinita alle temperature T_1 e T_3, anche infinite sorgenti di capacità termica finita che possono assumere qualsiasi temperatura compresa tra T_3 e T_1, si prende in esame il sistema complessivo formato dal gas, che esegue il ciclo descritto precedentemente, e dalle sorgenti di capacità termica finita

stesse, imponendo che il processo risulti ciclico e reversibile anche per queste ultime. Nel valutare il rendimento di tale sistema vanno inoltre considerati esclusivamente gli scambi di calore tra le due sorgenti di capacità termica infinita e le varie componenti del sistema, escludendo gli scambi di calore interni tra il gas e le sorgenti di capacità termica finita.

3 Quanto vale il massimo rendimento η' che è possibile ottenere per questo sistema?

PROB. 3 — RIEMPIRE UNA BOTTIGLIA - 60 PT.

Un serbatoio cilindrico di sezione trasversale molto ampia è riempito d'acqua fino a un'altezza h_1. Al centro della base del serbatoio è praticato un foro di dimensioni trascurabili. L'acqua che fuoriesce cade in una bottiglia inizialmente vuota, assimilabile a un guscio cilindrico aperto superiormente, di raggio r e altezza $2h$. La bottiglia è posta in modo che il suo asse di simmetria coincida con quello del serbatoio e che il suo bordo superiore si trovi a una distanza h_2 al di sotto del fondo del serbatoio stesso. Si assuma che il volume della bottiglia sia trascurabile rispetto a quello dell'acqua nel serbatoio e che il processo di riempimento sia sufficientemente lento da poter essere considerato quasi-statico.

Urtando contro la superficie libera dell'acqua all'interno della bottiglia, le gocce in caduta subiscono un urto anelastico e "schizzano" con un angolo θ del tutto casuale rispetto all'orizzontale. Durante l'urto, ciascuna goccia dissipa una frazione k della propria energia cinetica, dove k è costante per tutti gli schizzi ed è compreso nell'intervallo $1/4 < k < 1$. Trascurando la resistenza dell'aria e gli urti tra le gocce in volo, si risponda alle seguenti richieste.

1. Sia z la quota della superficie dell'acqua all'interno della bottiglia, misurata rispetto alla base della bottiglia stessa. Si determini in funzione di $\tan\theta$ – e degli altri parametri del problema – la quota rispetto alla base della bottiglia a cui si trova una generica goccia nell'istante in cui la sua distanza dall'asse del cilindro è pari a r.

2. Assumendo valida la relazione $(h_1 + h_2)\sqrt{1-k} > r$, si determini l'altezza massima $H(z)$ raggiungibile dalle gocce sulla verticale del bordo della bottiglia (cioè in corrispondenza del raggio della stessa) al variare di θ, e si dimostri che la funzione $H(z)$ è strettamente crescente per $0 \le z \le h$.

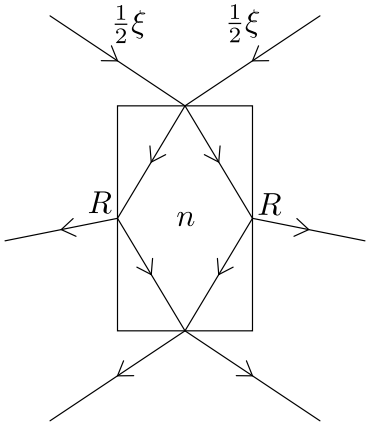
3. Si fissino i seguenti valori numerici: $k = 3/4$, $r = 5\,\text{cm}$, $h_1 = 25\,\text{cm}$, $h_2 = 10\,\text{cm}$. Sapendo che $H(z)$ è crescente, si determini il minimo valore dell'altezza h affinché sia possibile riempire la bottiglia fino a metà della sua altezza senza che alcuna goccia d'acqua schizzi al di fuori di essa.

PROB. 4 — RIFRAZIONE FORTE - 60 PT. ——

In questo problema vengono esplorate proprietà interessanti della forza legata al fenomeno della rifrazione.

1. Si consideri il fenomeno di rifrazione di un fotone in arrivo su un'interfaccia piana con quantità di moto p e angolo θ dalla normale. Il fotone proviene da un materiale con indice di rifrazione n_1 e viene rifratto in un mezzo con indice di rifrazione n_2.

   Sapendo che la quantità di moto di un fotone cambia in modo direttamente proporzionale all'indice di rifrazione, si trovi la variazione della quantità di moto dell'interfaccia, determinandone modulo, direzione e verso in funzione di n_1, n_2, p, e θ.



2. Per una certa polarizzazione della luce (generalmente indicata con la lettera p), è possibile avere rifrazione totale all'angolo di Brewster

$$\theta_B = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right).$$

Per il resto del problema si supponga che la polarizzazione del fotone sia proprio p.

Si prenda ora in considerazione il sistema in figura, dove un prisma con indice di rifrazione $n = 1{,}24$ è immerso in aria, e due fasci laser identici entrano nel prisma con inclinazione data dall'angolo di Brewster, simmetricamente. Il numero totale di fotoni emessi per unità di tempo da ognuno dei due laser è $\xi/2$, tutti con quantità di moto p. Ai lati, quando i fasci di luce raggiungono la seconda interfaccia, ogni fotone si riflette sull'interfaccia con probabilità R, coefficiente chiamato *riflessività*.

Si dimostri che se l'angolo in cima è tale da avere rifrazione totale, questo vale anche per l'angolo in fondo. Si calcoli inoltre la forza totale sul prisma e si determini la sua direzione in funzione di n, p, ξ, e R. Come cambia la forza nel caso di riflessione totale?

PROB. 5 — IL CAVALLINO MAGNETICO - 70 PT.

Daniele è un fan sfegatato di Carletto il Chierico, noto pilota di F'. Viste le recenti prestazioni del suo idolo, decide di aiutarlo durante le gare costruendo un dispositivo che permette di creare un campo magnetico $\vec{B}$ di modulo costante in una certa regione dello spazio. Daniele può attivare e disattivare il dispositivo in tempi molto brevi e può modificarne istantaneamente la direzione del campo a piacere, purché esso sia sempre diretto orizzontalmente, cioè parallelamente al piano che contiene la pista di gara.

Sono dati la massa M e la carica $Q > 0$ dell'automobile di Carletto, il raggio R della curva su cui Daniele vuole attivare il suo dispositivo e il coefficiente d'attrito statico tra le ruote e l'asfalto μ. In tutto il problema si trascuri l'attrito dell'aria.

1. Determinare:

   (a) la massima velocità v_{max} a cui l'auto può percorrere la curva quando il dispositivo è spento;

(b) la direzione e il verso della forza magnetica agente sulla macchina affinché questa velocità possa essere aumentata, e il massimo valore della velocità u_{max} a cui l'auto può percorrere la curva con il dispositivo acceso, in funzione di B.

2. Nel frattempo Daniele, distratto da Kiwi Limoncelli, inverte per sbaglio la polarità del campo magnetico mentre il campo è orientato come nel punto (1b) e l'auto si sta muovendo a velocità v_1. Accortosi dell'errore, spegne il dispositivo dopo un breve intervallo di tempo Δt. Trovare il valore minimo B_{min} del modulo del campo per cui l'auto si stacca dal terreno e la distanza L tra il punto in cui essa si trova quando viene invertita la polarità e quello in cui atterra, in funzione di $B \geq B_{min}$. Si assuma che l'inversione di polarità avvenga in modo istantaneo e che gli spostamenti verticale e orizzontale dell'auto nell'intervallo di tempo Δt possano essere trascurati.

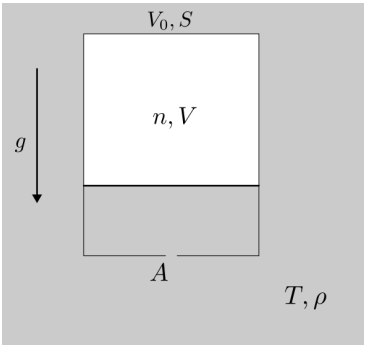
D'ora in avanti si consideri un modello più realistico: l'auto è un parallelepipedo rigido di lunghezza d, larghezza l e altezza h con densità di carica uniforme e densità di massa tale che il suo centro di massa si trova alle coordinate $(\frac{d}{10}, \frac{l}{2}, \frac{h}{2})$, dove la distanza $\frac{d}{10}$ è misurata dal retro dell'auto.

3. Si consideri ora la situazione descritta al punto 2, sapendo che l'auto inizia a ruotare attorno a un asse orizzontale perpendicolare a $\vec{v}_1$ passante per il centro di massa e che il momento d'inerzia di quest'ultima rispetto ad esso vale:

$$I = M\left(\frac{d^2}{3} + \frac{h^2}{3}\right).$$

Trovare tutti i valori del modulo del campo magnetico tali che l'auto tocchi terra dritta e perfettamente orizzontale. Per quest'ultimo punto usare i seguenti dati numerici:
$M = 750\,\mathrm{kg}$, $d = 5{,}7\,\mathrm{m}$, $l = 2{,}0\,\mathrm{m}$, $h = 0{,}95\,\mathrm{m}$, $v_1 = 40\,\mathrm{ms}^{-1}$, $Q = 1{,}0\,\mathrm{C}$, $\Delta t = 0{,}20\,\mathrm{s}$, $g = 9{,}81\,\mathrm{ms}^{-2}$

PROB. 6 — BUCO NELL'ACQUA - 70 PT.



Si consideri un contenitore cilindrico fissato di volume V_0 e area di base S, immerso in una grande quantità di un liquido incomprimibile e non viscoso, di densità ρ, in quiete e a temperatura T, come in figura. L'asse del cilindro è diretto lungo la verticale, ed è presente un campo gravitazionale uniforme di modulo g e rivolto verso il basso. Nel cilindro, le cui pareti conducono bene il calore, sono presenti n moli di gas perfetto, la cui costante adiabatica è γ, in equilibrio termico col liquido. Al centro della base inferiore del cilindro è presente un foro di area $A \ll S$ attraverso il quale il liquido può entrare o uscire dal contenitore. Tra il liquido all'interno del cilindro e il gas è presente un setto orizzontale, libero di scorrere verticalmente

senza attrito, che conduce bene il calore ma non permette il passaggio di materia; la massa del setto è trascurabile. Il liquido ha pressione p_0 in un punto molto lontano dal cilindro ma alla stessa altezza della base inferiore. Si assuma $p_0 V_0 > nRT$.

1. Si trovi il volume V_{eq} occupato dal gas all'interno del cilindro quando il sistema è all'equilibrio.

2. Quando il volume occupato dal gas è $V > V_{\text{eq}}$, si determini, in funzione di V e degli altri dati del problema, la velocità con cui varia istantaneamente il volume occupato dal gas, cioè $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$. Si assuma che il processo sia quasistatico.

3. Si risponda ai primi due punti nel caso in cui sia le pareti del contenitore che il setto siano adiabatici, sapendo che il gas quando occupa l'intero cilindro ha temperatura T, anche in questo caso assumendo che il processo sia quasistatico (per V_{eq} si scriva l'equazione che lo determina, senza risolverla).

PROB. 7 — RITAGLIO RESISTIVO - 90 PT.

Una lastra resistiva piana e infinita, di spessore s e resistività uniforme, viene posta nel vuoto. Due elettrodi cilindrici, di altezza s e raggio r, vengono collegati alla lastra a distanza reciproca $d \gg s, r$, in modo che le loro basi siano parallele alla lastra.

Supponiamo di iniettare una corrente I nel primo elettrodo e di rimuoverla dal secondo.

1. Trova la densità di corrente sulla circonferenza di diametro d passante per i due elettrodi.

Viene misurata la resistenza della lastra tra i due elettrodi: sia questa R, il cui valore supporremo noto. Successivamente, viene ritagliato dalla lastra un disco di diametro d, mantenendo gli elettrodi sul bordo del disco.

2. Trova la resistenza del disco misurata tra i due elettrodi, in funzione di R e degli altri parametri del problema.

PROB. 8 — ROTTURA DI UNA STAZIONE SPAZIALE - 110 PT.

Due corpi puntiformi, ciascuno di massa m, sono collegati da un'asta rigida priva di massa di lunghezza 2ℓ. Chiameremo *stazione* il sistema costituito dai due corpi e dall'asta. Il punto centrale della stazione percorre un'orbita circolare di raggio R (con $\ell \ll R$) attorno alla Terra, che ha massa M.

L'asta è mantenuta costantemente lungo la direzione radiale, così che i due corpi ruotino attorno alla Terra con la stessa velocità angolare $\vec{\Omega} = \Omega\,\hat{z}$, dove $\hat{z}$ è il versore perpendicolare al piano dell'orbita.

1. Determinare il modulo Ω della velocità angolare al primo ordine in ℓ/R.

2. Determinare il modulo T della forza che l'asta esercita su ciascun corpo in questa configurazione, specificando se l'asta è sottoposta a tensione o a compressione.

3. Sia $\hat{\theta}$ il versore tangenziale all'orbita, diretto come la velocità del centro della stazione. Nel sistema di riferimento rotante solidale al moto orbitale (in cui la configurazione nella quale l'asta è in direzione radiale è di equilibrio), stabilire se tale equilibrio è stabile rispetto a piccole rotazioni dell'asta attorno a un asse passante per il suo punto centrale, considerando separatamente:

   - rotazioni nel piano dell'orbita (attorno all'asse parallelo a $\hat{z}$);
   - rotazioni fuori dal piano dell'orbita (attorno all'asse parallelo a $\hat{\theta}$).

   In caso di equilibrio stabile, determinare le eventuali e rispettive pulsazioni angolari ω_z e ω_θ delle piccole oscillazioni.

4. A un certo istante, un evento improvviso spezza l'asta senza alterare le velocità istantanee dei due corpi, che proseguono il loro moto indipendentemente sotto la sola azione della gravità terrestre. Le traiettorie successive dei due corpi si intersecano?

   - Se sì, stabilire se i due corpi arriveranno mai a collidere.
   - Se no, determinare la distanza minima $d_{\min}$ tra i due corpi nel moto successivo.

Suggerimento: possono essere utili le seguenti approssimazioni, valide per $|x| \ll 1$:

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x, \qquad \sin x \approx x, \qquad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}.$$

PROB. 9 — POLVERE DI STELLE - 90 PT. ——

Un granello sferico di polvere interstellare di massa m e raggio r percorre un'orbita circolare di raggio $R_0 \gg r$ intorno al Sole.

Il granello, composto da un materiale perfettamente assorbente, è soggetto alla pressione di radiazione del Sole, il quale emette luce in modo isotropo con potenza W. Si assuma, inoltre, che la velocità del granello sia sempre molto minore della velocità della luce c.

1. Trovare la velocità angolare Ω_0 dell'orbita circolare, tenendo conto della pressione di radiazione.

2. La forza che il Sole esercita sul granello in movimento non è puramente radiale. Giustificare fisicamente questo fatto e calcolare la componente tangenziale della forza in funzione delle grandezze che descrivono l'orbita.

3. Nell'ipotesi che all'istante iniziale la forza $\vec{F}_0$ sul granello dovuta alla pressione di radiazione sia tale per cui
$$|\vec{F}_0| \ll \frac{GMm}{R_0^2},$$
spiegare perché l'orbita evolve restando approssimativamente circolare e ricavare l'espressione per $R(t)$, cioè il raggio dell'orbita in funzione del tempo. La velocità del granello aumenta o diminuisce durante questa evoluzione?

4. Se si ritiene che il granello venga espulso dal Sistema Solare, raggiungendo il limite della Nube di Oort a distanza $R_{NO} \approx 1{,}5 \times 10^{16}\,\mathrm{m}$, si calcoli il tempo necessario affinché ciò avvenga. Se, invece, si ritiene che esso cada verso il Sole (di raggio $R_\odot \approx 7 \times 10^8\,\mathrm{m}$), si determini dopo quanto tempo ciò succede. Detto T_f l'intervallo di tempo appena calcolato, si dia una stima del numero di giri intorno al Sole che il granello effettua entro l'istante T_f. Si verifichi, infine, se la velocità del granello rimane effettivamente non relativistica fino all'istante T_f.

Dati utili: Massa del Sole $M \approx 2 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$; costante di gravitazione universale $G \approx 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}}$.

PROB. 10 — L'IMPORTANZA DELLA VISCOSITÀ - 130 PT.

Si consideri un piano infinito, che chiameremo *tavolo*, e sopra di esso un disco da hockey, di raggio R e massa M uniforme. Il disco è vincolato a rimanere fermo sopra il tavolo a distanza $h \ll R$, grazie alla presenza di una forza esterna.

Sul tavolo, esattamente al di sotto del centro del disco, viene praticato un piccolo foro circolare di raggio $r_0 \ll R$. Dalla superficie laterale di questa regione cilindrica – che ha come base la circonferenza di raggio r_0 e altezza h – viene iniettato in maniera uniforme un fluido incomprimibile di densità ρ con una portata volumetrica – cioè volume di fluido iniettato per unità di tempo – pari a Q, in maniera che la sua velocità sia diretta radialmente rispetto al centro del foro.

Si consideri il sistema a regime, cioè dopo un transiente iniziale sufficientemente lungo da rendere il campo di velocità costante nel tempo, e sia p_0 la pressione atmosferica che agisce sulla faccia superiore del disco e sulla parte di tavolo non sottostante ad esso. Si consideri, per tutto il problema, che h sia sufficientemente piccolo da poter assumere che in ogni punto la componente verticale della velocità del fluido sia trascurabile e che il flusso sia sempre e ovunque laminare.

Nell'esprimere i risultati finali, si trascurino i termini di ordine superiore in $\frac{h}{R}$ e $\frac{r_0}{R}$, indicando solo il primo ordine non nullo.

1. Si assuma, in un primo momento, che il fluido sia ideale e abbia viscosità nulla. Calcolare la portata massima Q_0 affinché in nessun punto la pressione del fluido risulti negativa. Trovare, per $Q < Q_0$, la forza totale $\vec{F}_1$ esercitata dal fluido sul disco, al netto del termine legato alla pressione atmosferica, che agisce anche al di sopra di esso. Il disco viene risucchiato o repulso?

2. Si consideri ora un modello più realistico: il fatto che h sia molto piccolo impone che il flusso sia viscoso e che gli strati di fluido a diretto contatto col disco e col tavolo non possano scivolare rispetto ad essi. Sia allora η la viscosità del fluido. Si trovi la forza totale $\vec{F}_2$ esercitata dal fluido sul disco, ancora al netto del termine in p_0. Stavolta il disco viene risucchiato o repulso?

3. Si stimi, sfruttando i risultati dei punti precedenti, l'altezza critica h_c al di sopra della quale si possono trascurare gli effetti viscosi nel calcolo della forza.

4. Se rilasciassimo il disco da una certa altezza, assumendo che le espressioni trovate per $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ continuino a valere, esisterebbero delle condizioni iniziali (con $h > 0$) che permettano al disco di sbattere contro il tavolo? Dire, infine, se effettivamente le espressioni trovate per $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ continuano a valere in queste ipotesi.

Suggerimento: si usi la seguente definizione di viscosità η: date due parti di fluido che si interfacciano per via di una superficie piana perpendicolare all'asse z, e detta $v(z)$ la componente perpendicolare all'asse z della velocità del fluido in quella regione (a (x, y) fissate), lo sforzo di taglio, cioè la forza per unità di area fra le due parti, è data da

$$\vec{\tau} = -\eta \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}z},$$

in modo che lo sforzo subito dalla parte di fluido a z maggiori sia parallelo alla superficie e opposto a $\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}z}$.

PROB. 11 — (GRAVITO)MAGNETISMO - 110 PT.

Un dipolo è composto da due monopoli di cariche g e $-g$. Il momento di dipolo è $\vec{M} = g\vec{d}$, dove $\vec{d}$ è il vettore posizione della carica positiva rispetto a quella negativa. In un punto di posizione $\vec{r}$ rispetto al centro del dipolo, con $r \gg d$, il campo può essere approssimato da una formula in termini solo di $\vec{M}$, $\vec{r}$ e costanti fisiche fondamentali.

Una spira circolare di raggio R, percorsa da una corrente I, genera nello spazio un campo magnetico. A grande distanza dalla spira, questo campo è approssimabile a quello di un dipolo magnetico $\vec{M}$ posto al centro della spira. Il dipolo $\vec{M}$ dipende solo dal raggio della spira, dalla corrente nel filo e dal suo verso.

1. Trovare, al primo ordine non nullo, il vettore campo magnetico nel piano della spira a distanze dove vale l'approssimazione di dipolo, sapendo che una spira di raggio 1 mm e corrente 1 A genera, a 1 m dal centro, un campo di modulo circa $\pi \times 10^{-13}$ T.

In gravità newtoniana, le forze tra masse hanno (a meno delle costanti fisiche) la stessa forma di quelle tra cariche in elettrostatica. Questo parallelismo permette di introdurre i campi gravitomagnetici, l'analogo gravitazionale dei campi magnetici. L'unica differenza rispetto al modello elettromagnetico è che, per effetti di relatività generale, la forza di Lorentz gravitomagnetica va moltiplicata per un fattore 4.

Si consideri un pianeta sferico omogeneo di massa m_p e raggio R_p, che ruota attorno al proprio asse con velocità angolare $\vec{\Omega}$. Un satellite di massa $m_s \ll m_p$ orbita attorno al pianeta di moto circolare uniforme a distanza $r_s \gg R_p$ dal centro, in un piano perpendicolare a $\vec{\Omega}$.

2. Una volta scritto l'analogo di μ_0 per il gravitomagnetismo in funzione della costante di gravitazione universale G e della velocità della luce nel vuoto c, trovare al primo ordine non nullo la differenza tra i periodi orbitali del satellite nei casi in cui esso orbiti in verso concorde o discorde rispetto a $\vec{\Omega}$, assumendo $\Omega R_p \ll c$.

Si consideri ora, in un sistema di assi cartesiani, un sistema isolato di tre pianeti nello spazio, ciascuno di massa m e raggio trascurabile, con posizioni iniziali $\vec{x}_1 \perp \hat{z}$, $\vec{x}_2 \perp \hat{z}$, $\vec{x}_3 = -\vec{x}_1 - \vec{x}_2$ e velocità iniziali $\vec{v}_1 \perp \hat{z}$, $\vec{v}_2 \perp \hat{z}$, $\vec{v}_3 = -\vec{v}_1 - \vec{v}_2$. Nessuno dei tre corpi raggiunge mai la velocità di fuga rispetto agli altri due e, in particolare, durante il moto la distanza tra due pianeti qualsiasi non supera mai un valore fissato R.

3. Trovare il campo gravitomagnetico (costante nel tempo) generato nella porzione del piano xy in cui la distanza dall'origine è molto maggiore di R.

4. Per concludere, discutere qualitativamente perché, nell'esperienza quotidiana, i campi elettrico, magnetico e gravitazionale statico hanno effetti macroscopici percepibili, mentre il campo gravitomagnetico no.

Può essere utile l'approssimazione $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$, valida per $|x| \ll 1$ e $|\alpha x| \ll 1$.

PROB. 12 — EFFICIENZA DI UNA MACCHINA REALE - 140 PT.

È noto che il rendimento di una macchina di Carnot che opera tra due sorgenti alle temperature T_1 e $T_2 < T_1$ è

$$\eta_C = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

Tuttavia, la macchina reversibile di Carnot non assomiglia a nessuna macchina realmente utilizzata: nelle due trasformazioni isoterme, infatti, la differenza di temperatura tra il fluido di lavoro e le sorgenti è nulla, per cui lo scambio di una quantità finita di calore richiede un tempo infinito.

In questo problema studiamo un modello più realistico di macchina termica. Supponiamo che il fluido di lavoro sia costituito da n moli di gas perfetto monoatomico e che, in analogia con il ciclo di Carnot, il gas compia due trasformazioni isoterme quasistatiche, alle temperature T_1' e T_2' tali che

$$T_1 > T_1' > T_2' > T_2,$$

raccordate da due adiabatiche reversibili. Durante l'isoterma alla temperatura T_1' il gas si espande dal volume V_1 al volume V_2.

Per tutto il problema, la durata delle trasformazioni adiabatiche è da considerare trascurabile rispetto alla durata totale del ciclo; le temperature T_1 e T_2 delle sorgenti sono fissate, così come i volumi V_1 e V_2 tra cui avviene l'isoterma a T_1'.

Lo scambio di calore tra il gas e le sorgenti è governato dalle seguenti leggi

$$P_1 = \alpha_1(T_1 - T_1') = \alpha_1 \Delta T_1,$$

$$P_2 = \alpha_2(T_2' - T_2) = \alpha_2 \Delta T_2,$$

dove P_1 è il calore assorbito dal gas per unità di tempo durante l'isoterma a temperatura T_1', P_2 è il calore ceduto dal gas per unità di tempo durante l'isoterma a T_2', mentre α_1 e α_2 sono costanti positive.

1. Trovare la potenza media P sviluppata dalla macchina in funzione di T_1, T_2, ΔT_1, ΔT_2 e degli altri parametri necessari.
2. Fissata la durata τ del ciclo, trovare il rapporto $\Delta T_1/\Delta T_2$ per cui la potenza P è massima.
3. Supponiamo ora che la durata del ciclo possa variare. Determinare ΔT_1 e ΔT_2 in modo che la potenza P sia massima.
4. Trovare il rendimento della macchina in condizioni di massima potenza erogata.