Modulo di Analisi
Stage di Fisica a Pisa - Anno 2018

Paolo Tognini*

05/02/2018

Sommario

L'obiettivo è insegnare come usare il Calcolo Infinitesimale, in modo non formale ma sicuro, per la risoluzione di problemi di fisica, al livello della gara nazionale e internazionale delle Olimpiadi della Fisica.
Questo modulo vuole trattare: infinitesimi (lunghezze, superfici, volumi), sviluppo in serie di Taylor, approssimazioni all'n-esimo ordine, derivate, integrali, equazioni alle derivate ordinarie (ODE), integrali doppi e tripli.

Argomenti trattati

1. Prerequisiti. Prodotto binomiale, numeri complessi, trigonometria, serie infinita $1 + x + x^2 + x^3 + ...$
2. Elementi di Calcolo. Funzione come curva sul piano cartesiano. Continuità come "a piccoli Δx corrispondono piccoli Δy". Infinitesimi. Rapporto incrementale. Derivata con notazione di Leibniz.
3. Esponenziali. Diverse definizioni. Esponenziali complessi, $e^{it} = \cos t + i \sin t$, De Moivre.
4. Espansione in Taylor. Dimostrazione con gli infinitesimi. Quando e come usarla.
5. Ordini di Infiniti e di Infinitesimi. Esempi e accortezze.
6. Funzioni in più variabili. Derivate parziali. Regola della catena. Gradiente.
7. Integrali. Integrali definiti e indefiniti. Sostituzione delle variabili, integrazione per parti.
8. Integrali doppi e tripli. Notazione.
9. Equazioni alle derivate ordinarie (ODE). Ordine dell'ODE. Separazione delle variabili. ODE lineare a coefficienti costanti. Oscillatore armonico, oscillatore armonico forzato, oscillatore armonico smorzato.
10. Calcolo Infinitesimale coi Vettori. Divergenza e Rotore. Teorema di Gauss e Teorema di Stokes. Laplaciano.

*paolo.tognini@sns.it

1 Teoria

1.1 Prerequisiti

Per poter adoperare con piena efficienza il Calcolo Infinitesimale è necessario combinarlo con alcune altre tecniche matematiche, storicamente antecedenti.

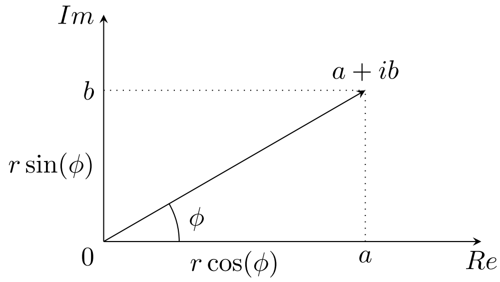
La prima che richiamiamo è il *prodotto binomiale*. La formula è

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

La quantità $\binom{n}{k}$ (il *coefficiente binomiale*) rappresenta il numero di modi di scegliere k elementi da n elementi, ed è dunque uguale al numero di modi di scegliere k volte l'elemento x dagli n fattori $(x+y)$, per andare a creare il termine $x^k y^{n-k}$.
La combinatoria mostra che $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Inoltre questi numeri vanno a costituire n-esima riga e la k-esima colonna del Triangolo di Tartaglia (partendo da $n = 0$ e $k = 0$).

Il secondo argomento che affrontiamo sono i *numeri complessi*, che definiamo in modo puramente geometrico. I numeri complessi sono vettori del piano bidimensionale (due coordinate reali). La loro somma è definita come la somma vettoriale, cioè l'ascissa di $a+b$ è la somma delle ascisse di a e di b, e altrettanto per le ordinate.

$$(a+ib)+(c+id) = (a+b)+i(c+d)$$



Per definire il prodotto, definiamo il modulo $|a|$ di un numero complesso come la lunghezza del vettore, e l'argomento ϕ del numero complesso come l'angolo dall'asse x al vettore. Un numero complesso è identificato da un modulo reale positivo e da un argomento reale, compreso tra 0 e 2π.
Il loro prodotto è dunque definito in questo modo: il modulo è il prodotto dei moduli, e l'argomento è la somma degli argomenti.
In questo modo è facile verificare che $i^2 = -1$, quindi quelli che abbiamo definito sono effettivamente i numeri complessi usuali. In modo analitico sapendo il valore del quadrato di i, si vede che la formula del prodotto è

$$(a+ib)(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc)$$

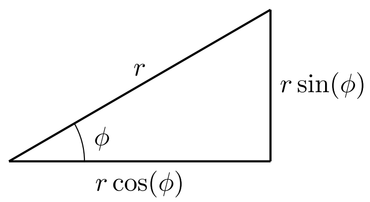
che nasconde l'interpretazione geometrica.
Si noti che questo prodotto non coincide né con il prodotto scalare né con il

prodotto vettoriale. È il prodotto tra numeri complessi.
Si vede inoltre chiaramente come ogni numero ammette esattamente due radici quadrate diverse (a parte lo 0). Perché?

Il terzo argomento sono le *funzioni trigonometriche*. Si immagini un moto circolare uniforme attorno a un cerchio di raggio 1, in senso antiorario, con unità di misura tali che per percorrere una unità di lunghezza sulla circonferenza serva un'unità di tempo.
La funzione $x(t)$, ovvero l'ascissa in funzione del tempo, è il coseno $\cos(t)$, mentre la funzione $y(t)$ è il seno $\sin(t)$. Si ricordano inoltre le seguenti definizioni:

$$\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \qquad \cot(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$$

Le funzioni inverse di seno, coseno, tangente e cotangente sono rispettivamente arcoseno, arcocoseno, arcotangente e arcocotangente e si indicano con $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, $\arctan(x)$ e $\text{arccot}(x)$.



Un'ultimo argomento da trattare è la serie infinita

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

È noto il risultato secondo cui

$$(1-x)(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^k) = (1-x^{k+1})$$

da cui

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^k = \frac{1-x^{k+1}}{1-x}$$

Quando $-1 < x < 1$, si vede che per k che tende a $+\infty$, x^{k+1} tende a 0 e si può dunque scrivere

$$1+x+x^2+x^3+\cdots = \frac{1}{1-x}$$

Questo risultato ci sarà utile in seguito. Al contrario se $x < -1 \vee x \geq 1$ la somma infinita diverge, ovvero tende a $+\infty$. Se $x = -1$ il risultato oscilla attorno a $\frac{1}{2}$

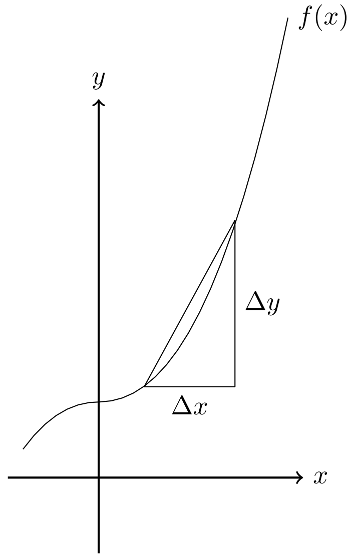
Possiamo dunque cominciare con il Calcolo vero e proprio.

1.2 Elementi di Calcolo

Partiamo con i concetti elementari. Una *funzione* $y = f(x)$ è una regola con la quale ad ogni elemento x posso associare uno e un solo elemento y. Ad ogni coppia $(x, f(x))$ possiamo associare un punto sul piano cartesiano xy e trovare così il grafico dei $f(x)$: una funzione è il suo grafico.
Una funzione si dice *continua* se può essere disegnata sul piano xy senza staccare mai la matita dal foglio. Più formalmente questo vuol dire che se $x + \mathrm{d}x$ si avvicina a x ($\mathrm{d}x \to 0$), allora anche $f(x + \mathrm{d}x) \to f(x)$ (nel senso che il numero $|f(x + \mathrm{d}x) - f(x)|$ può diventare piccolo a piacere, se scelgo $\mathrm{d}x$ abbastanza piccolo).

Si noti che una quantità come $\mathrm{d}x$ non ha un valore preciso, ma può assumere valori via via più piccoli fino a tendere a 0. Tale quantità viene chiamata *infinitesimo.* Essa può essere interpretata anche come una quantità dal valore fissato, ma tanto piccola da poter essere trascurata, nel senso che se il risultato di un conto è $x + \mathrm{d}x$, scrivremo che $x + \mathrm{d}x \approx x$, poiché $\mathrm{d}x$ è infinitamente più piccolo di x. Allo stesso modo $x\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2 \approx x\mathrm{d}x$, poich $(\mathrm{d}x)^2$ è infinitamente più piccolo di $x\mathrm{d}x$ (esso viene detto *infinitesimo di secondo ordine*).
Tuttavia, in un'espressione come $\frac{2\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}$, non si può sostituire direttamente $\mathrm{d}x = 0$, perché si otterrebbe la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, che non fornisce alcuna informazione. L'espressione di partenza, invece conteneva più informazione: mentre numeratore e denominatore tendono entrambi a 0, il primo è sempre il doppio dell'altro, e durante l'avvicinamento il rapporto è sempre 2. Il rapporto è dunque costante e tende a 2. Scriveremo quindi $\frac{2\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = 2$.

Procediamo ora a definire cosa sia la pendenza di una funzione in un punto. Se in un punto una funzione non ha spigoli, guardandola abbastanza da vicino essa sembrerà una retta. Vicino a un punto possiamo dunque confondere la funzione con la retta tangente in quel punto, e avvicinandosi l'errore che commettiamo diventa arbitrariamente piccolo. La pendenza della funzione è dunque definita come la pendenza della retta tangente.
La pendenza di una retta si misura come $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Per calcolare la pendenza nel punto (x, y) calcoliamo la pendenza della retta che collega (x, y) e $(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y)$, dove si ribadisce che $\mathrm{d}x$ può essere preso piccolo a piacere, e poi avviciniamo questo secondo punto al primo. Si noti come $\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x) = f(x + \mathrm{d}x) - f(x)$ è lo spostamento sulle ordinate, e tende anch'esso a 0 grazie alla continuità della funzione. Mano a mano che il secondo punto si avvicina al primo, la funzione si comporterà sempre più come la retta tangente. Dunque la pendenza della retta tra i due punti si avvicinerà sempre di più alla pendenza della retta tangente. La pendenza della retta sarà dunque data da $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, dove si intende che $\mathrm{d}x \to 0$.



Esempio 1. Consideriamo la funzione $y = x^2$. La pendenza è

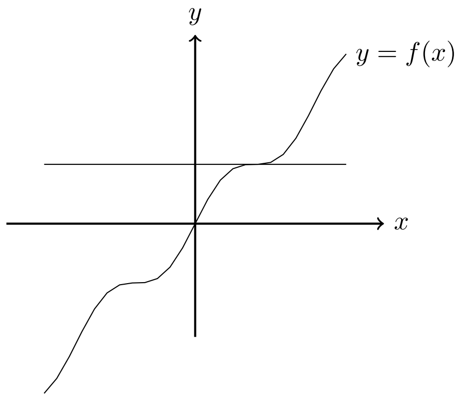
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{f(x+\mathrm{d}x) - f(x)}{\mathrm{d}x} = \\ &= \frac{(x+\mathrm{d}x)^2 - x^2}{\mathrm{d}x} = \\ &= \frac{x^2 + 2x\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2 - x^2}{\mathrm{d}x} = \\ &= \frac{2x\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2}{\mathrm{d}x} = \\ &= 2x + \mathrm{d}x = 2x\end{aligned}$$

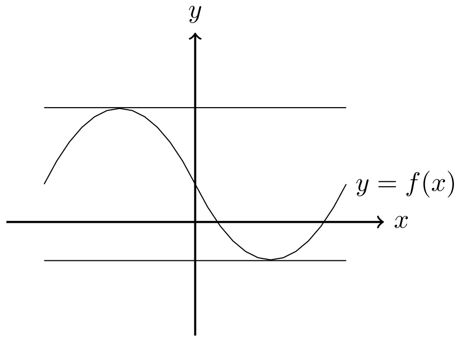
L'ultimo passaggio è così motivato: abbiamo scoperto che tra i punti (x, y) e $(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y)$ la pendenza è $2x + \mathrm{d}x$, ma sappiamo che rendendo $\mathrm{d}x$ via via più piccolo ci avviciniamo sempre di più alla pendenza della retta tangente. Ponendo direttamente $\mathrm{d}x = 0$ otteniamo la pendenza esatta della retta tangente, ovvero $2x$. Non potevamo porre $\mathrm{d}x = 0$ all'inizio dei conti, perché avremmo ottenuto la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, che non ci avrebbe fornito molte informazioni.

Data una funzione $f(x)$, posso ora calcolarne la pendenza in ogni punto. La funzione che, data x, associa la pendenza della funzione $f(x)$ nel punto x stesso (ovvero $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ calcolata nel punto x), si chiama *funzione derivata*, o semplicemente *derivata*, di $f(x)$.
La derivata di $f(x)$ si può indicare in modo equivalente come

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \quad f'(x) \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) \quad \mathrm{D}f(x)$$

Si usa inoltre la scrittura $\dot{f}(x)$ per indicare le derivate rispetto al tempo.
La derivata è stata definita come un rapporto di differenziali, ovvero di quantità che diventano via via più piccole.
Ecco degli esempi di flesso, punto di massimo e punto stazionario:





Gran parte dell'importanza delle derivate in Fisica è dovuta al fatto che permettono di trovare facilmente i massimi (o minimi) locali di una funzione. Un massimo locale di $f(x)$ è un punto (x, y) tale che, variando di poco la x, si ha una diminuzione della y. Analogamente, un minimo locale di è un punto tale che, variando di poco la x, si ha un aumento della y.
I massimi e minimi locali sono punti in cui la derivata si annulla (altrimenti in una direzione l'ordinata aumenterebbe e nell'altra diminuirebbe, quindi il punto non potrebbe essere un massimo o un minimo). Quindi per trovare massimi e minimi locali si impone l'equazione $f'(x) = 0$ e poi si verifica se si tratta di massimi, di minimi, oppure di flessi (punti in cui la derivata è 0, eppure da un lato l'ordinata aumenta e dall'altro diminuisce).

Vediamo alcune proprietà della derivata attraverso i differenziali.

(i) *Linearità rispetto alla somma*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(f+g) &= f(x+\mathrm{d}x) + g(x+\mathrm{d}x) - f(x) - g(x) = \\ &= \mathrm{d}f + \mathrm{d}g \end{aligned}$$

Dunque $\frac{\mathrm{d}(f+g)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$.

(ii) *Linearità rispetto al prodotto per scalare*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\alpha f) &= \alpha f(x+\mathrm{d}x) - \alpha f(x) = \\ &= \alpha\,\mathrm{d}f \end{aligned}$$

per ogni numero reale α. Dunque $\frac{\mathrm{d}(\alpha f)}{\mathrm{d}x} = \alpha \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

(iii) *Derivata del prodotto*

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(fg) &= f(x+\mathrm{d}x)g(x+\mathrm{d}x) - f(x)g(x) = \\
&= f(x+\mathrm{d}x)g(x+\mathrm{d}x) - f(x)g(x+\mathrm{d}x) + f(x)g(x+\mathrm{d}x) - f(x)g(x) = \\
&= \mathrm{d}f\, g(x+\mathrm{d}x) + f(x)\,\mathrm{d}g = \\
&= \mathrm{d}f\, g(x) + \mathrm{d}f\,\mathrm{d}g + f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Ma $\mathrm{d}f\,\mathrm{d}g$ è un infinitesimo di second'ordine, quindi lo trascuro. Dunque $\frac{\mathrm{d}(fg)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}g + f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$.

(iv) *Derivata della funzione composta.* Vogliamo calcolare $\mathrm{d}(f(g(x)))$: poniamo $z = f(y)$ e $y = g(x)$. Ora $\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y$, dunque $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(v) *Derivata del rapporto.* Considerando $g^{-1}(x)$ come una funzione composta, e adoperando la derivata del prodotto e la derivata della funzione composta, si ottiene facilmente $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{f}{g}) = \frac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}g - f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}}{g^2}$.

(vi) $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^{-1}$ naturalmente.

Con un conto analogo a quello fatto per x^2 si può verificare che

$$\frac{\mathrm{d}(x^n)}{\mathrm{d}x} = nx^{n-1}$$

Usando la derivata della funzione inversa si trova che

$$\frac{\mathrm{d}(x^{\frac{1}{m}})}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}$$

Usando la derivata della funzione composta si trova

$$\frac{\mathrm{d}(x^{\frac{n}{m}})}{\mathrm{d}x} = \frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}$$

Poiché ogni numero reale α può essere approssimato arbitrariamente bene da un numero razionale $\frac{n}{m}$, vale anche

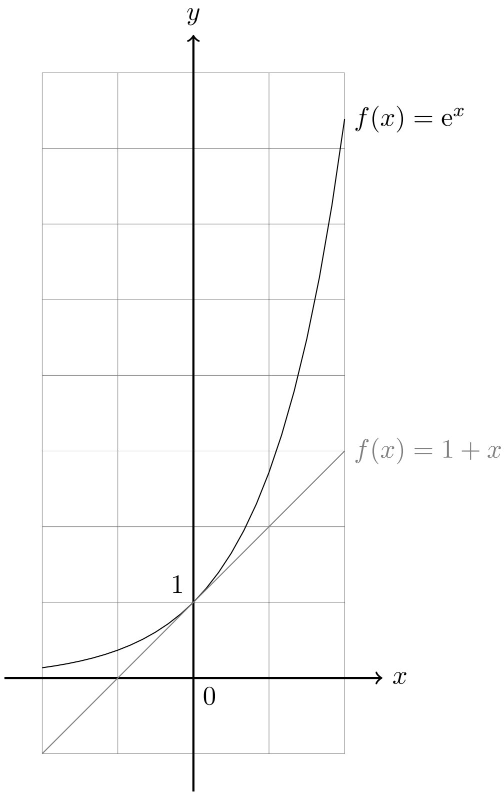
$$\frac{d(x^\alpha)}{dx} = \alpha x^{\alpha-1}$$

1.3 Esponenziali

Consideriamo ora

$$\frac{\mathrm{d}(a^x)}{\mathrm{d}x} = \frac{(a^{x+\mathrm{d}x} - a^x)}{\mathrm{d}x} = a^x\frac{a^{\mathrm{d}x} - 1}{\mathrm{d}x} = a^x k$$

dove $k = f'(0)$ non dipende da x ed è quindi costante, diversa da 0.
Plottando la funzione $y = a^x$ per diversi valori di a, ci si convince che esiste un certo valore di a per cui $k = 1$: esso è il numero di Nepero e. La funzione e^x ha la proprietà di essere la derivata di se stessa. È chiaro che esiste un'unica funzione tale che $f(0) = 1$ e tale che in ogni punto la pendenza è uguale al valore della funzione (so dove parte la funzione, e per ogni passettino $\mathrm{d}x$ so quanto vale il $\mathrm{d}y$ corrispondente, quindi è unica).
Segue il grafico della funzione e^x: come si può notare, la sua derivata in 0 è 1.



Consideriamo la quantità $\left(1+\frac{x}{N}\right)^N$, dove N è un numero intero *infinito*, cioè un numero che può diventare arbitrariamente grande e che tende a infinito ($N \to +\infty$). Un numero infinito si può considerare come il reciproco di un infinitesimo: quando quest'ultimo diventa arbitrariamente piccolo, il primo diventa arbitrariamente grande.
Sviluppando il binomio si vede che

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{N}\right)^N &= 1 + N\frac{x}{N} + \frac{N(N-1)}{2!}\frac{x^2}{N^2} + \frac{N(N-1)(N-2)}{3!}\frac{x^3}{N^3} + \dots = \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\end{aligned}$$

dove ho usato che $\frac{N+k}{N} = 1 + \frac{k}{N} \approx 1$ poiché $\frac{k}{N}$ è un infinitesimo.
Derivando termine a termine la serie infinita appena trovata, troviamo che è uguale alla serie stessa. Per unicità, abbiamo che

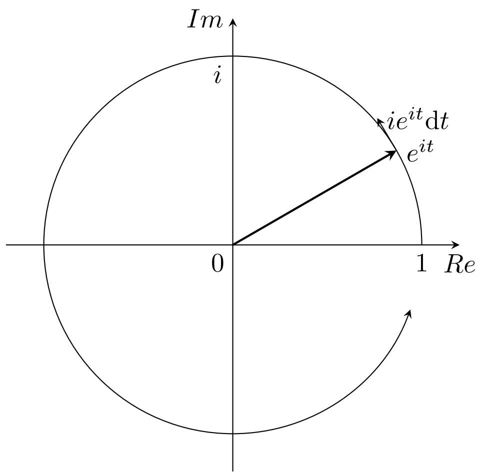
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

La funzione $y = e^x$ si chiama esponenziale. La sua funzione inversa $x = \ln(y)$ si chiama *logaritmo naturale*, o *logaritmo* (la funzione inversa di $y = a^x$, ovvero $x = \log_a(y)$, si chiama logaritmo in base a, e le sue proprietà possono essere dedotte facilmente da $(a^b)^c = a^{bc}$).

Consideriamo ora e^{it} dove i e l'unità immaginaria e t può essere inteso come il tempo. La interpreteremo come una funzione da un numero reale (il tempo) a un numero complesso, e^{it}. La i non deve spaventare, perché è un numero, quindi nelle derivate calerà dall'esponenziale come un qualunque altro numero. Dato un $\mathrm{d}t$, lo spostamento è

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = ie^{it}\mathrm{d}t$$

che corrisponde a ruotare di $\pi/2$ in senso antiorario il valore della funzione nel piano complesso. La traiettoria seguita dal vettore è dunque una circonferenza (lo spostamento è sempre ortogonale al raggio). Come un moto circolare è un modo furbo di cadere senza schiantarsi, si può dire che un'esponenziale immaginario sia un modo furbo di crescere proporzionalmente alla propria grandezza, senza cambiare davvero la propria grandezza.



Possiamo scrivere

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \dots$$

e ricordare che l'ascissa (la parte reale) di un moto circolare uniforme è il coseno e l'ordinata (la parte immaginaria) è il seno: vale cioè l'importantissima formula

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

Otteniamo dunque le seguenti formule:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Derivando termine a termine si scopre che $\frac{\mathrm{d}\sin(x)}{\mathrm{d}x} = \cos(x)$ e che $\frac{\mathrm{d}\cos(x)}{\mathrm{d}x} = -\sin(x)$.

La formula $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ è molto importante: da essa si ricava $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ e che $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, da cui si possono calcolare più semplicemente le derivate di seno e coseno.
Inoltre si nota che

$$(\cos(x) + i\sin(x))^n = e^{ix\cdot n} = \cos(nx) + i\sin(nx)$$

Questa è la *formula di de Moivre* e può essere usata per ricavare molte formule trigonometriche, come si vedrà negli esercizi.
Esistono anche le funzioni coseno iperbolico e seno iperbolico, definite come $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ e $\sinh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, il cui nome deriva dal legame con gli angoli iperbolici.
È possibile calcolare le derivate di tangente e cotangente, ma anche quelle delle funzioni inverse come arcoseno o logaritmo.

Esempio 2 (derivata del logaritmo)**.** Io so che se $y = e^x$ allora $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y$, quindi $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{y}$ e quindi $\frac{\mathrm{d}\ln(y)}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{y}$.

Esempio 3 (derivata dell'arcotangente)**.** Se $y = \tan(x)$ si trova $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 + \tan^2(x) = 1 + y^2$, da cui $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}\arctan(y)}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{1+y^2} = 1 - y^2 + y^4 - y^6 + \dots$ dove si è usata l'espansione di $\frac{1}{1-x}$ di cui si è parlato nell'introduzione.

1.4 Espansione in Taylor

Indichiamo la derivata seconda come $\mathrm{D}f'(x) = \mathrm{D}^2 f(x) = f''(x)$, la derivata terza come $\mathrm{D}^3 f(x) = f'''(x)$ e, in generale, la derivata n-esima come $\mathrm{D}^n f(x) = f^{(n)}(x)$. Spesso ci si riferisce a queste funzioni come alle "derivate" di $f(x)$, anche se solo la prima è propriamente la derivata di $f(x)$.

Consideriamo $\mathrm{D}f(x) = \frac{f(x+\mathrm{d}x)-f(x)}{\mathrm{d}x}$. Possiamo riarrangiarla in

$$f(x + \mathrm{d}x) = f(x) + \mathrm{d}x\,\mathrm{D}f(x) = (1 + \mathrm{d}x\,\mathrm{D})f(x)$$

Ponendo $\mathrm{d}x = \frac{1}{N}$ ottengo

$$f\left(x + \frac{1}{N}\right) = \left(1 + \frac{\mathrm{D}}{N}\right)f(x)$$

Dunque applicare $(1 + \frac{\mathrm{D}}{N})$ a una funzione mi permette di valutare il suo valore a distanza $\frac{1}{N}$. Se voglio valutare la funzione a distanza a, basta usare l'operatore aN volte. Ho dunque, partendo da x e spostandomi di a, la seguente espressione:

$$\begin{aligned}
f(x + a) &= \left(1 + \frac{\mathrm{D}}{N}\right)^{aN} f(x) = e^{a\mathrm{D}} f(x) = \\
&= \left(1 + a\mathrm{D} + \frac{(a\mathrm{D})^2}{2!} + \frac{(a\mathrm{D})^3}{3!} + \dots\right)f(x) = \\
&= f(x) + af'(x) + a^2\frac{f''(x)}{2!} + a^3\frac{f'''(x)}{3!} + \dots
\end{aligned}$$

A che cosa serve tutto questo? Immaginiamo di avere una funzione $f(x)$ e di conoscere il suo valore in un punto x_0, e il valore di tutte le sue derivate in x_0

(conosciamo dunque $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$...). Possiamo ora calcolare il valore della funzione di un punto x spostandoci da x_0 di uno spostamento $x - x_0$, ottenendo

$$f(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots$$

dove ho usato l'altra notazione per le derivate.
Questa espressione si chiama *espansione in Taylor*, e apparentemente permette, conoscendo i valori della funzione e delle sue derivate in x_0, di calcolare il valore della funzione in qualunque altro punto. È bene tuttavia tenere presente i seguenti fatti:

1. Un problema dell'espressione precedente è che non sempre la serie di Taylor converge (cioè va a ∞ oppure oscilla): ad esempio $\frac{1}{1-x}$ ha come serie di Taylor la serie di cui abbiamo parlato all'inizio, cioè $1 + x + x^2 + x^3 + ...$, la quale non converge fuori dall'intervallo $-1 < x < 1$, ovvero in un intorno che disti 1 da 0. Si dice che la serie ha *raggio di convergenza* 1. Non bisogna dunque usare la serie di Taylor al di fuori del suo raggio di convergenza. Per questo si dice che l'espansione in Taylor vale per x "vicino" a x_0: quanto vicino dipende dal raggio di convergenza.

2. Esistono funzioni per le quali la serie di Taylor per $f(x)$ converge, ma converge alla funzione sbagliata (cioè non converge a $f(x)$ come desiderato). Le funzioni che vedremo in seguito sono abbastanza regolari affinché questo non succeda.

3. Il punto x_0 si chiama *centro dell'espansione*. È chiaro che la stessa funzione $f(x)$ può essere espansa a partire da diversi punti, e che quindi da origine a diverse serie di Taylor. Tuttavia vedremo come per convenienza il logaritmo $ln(x)$ viene espanso quasi sempre attorno ad 1, e così molte altre funzioni vengono espanse sempre attorno allo stesso punto.

4. Nei casi pratici (cioè negli esercizi) non serve fare una somma infinita: basta sommare i primi n termini, ottenendo un polinomio di grado n. Dunque non è necessario conoscere tutte le derivate in x_0 (a volte non sono note, altre volte è difficile calcolarle). L'errore compiuto tenendo solo i primi termini è chiaramente più piccolo quanto più vicini si è al punto x_0.

5. Si noti che conoscendo l'espansione in Taylor conosciamo tutte le derivate della funzione ($f'(x)$, $f''(x)$, $\ldots$), e viceversa, conoscendo il valore di tutte le derivate nel punto x, è possibile scrivere l'espansione in Taylor: basta porre il coefficiente di a^n uguale a $\frac{f^{(n)}(x)}{n!}$.

Riassumendo, con l'espansione di Taylor possiamo approssiamare una funzione $f(x)$ vicino ad un punto x_0 (in cui conosciamo il valore della funzione e delle sue derivate) con un polinomio.

Esempio 4. Calcoliamo l'espansione in serie di Taylor attorno a $x_0 = 1$ di $f(x) = x^\alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Scriviamo i termini dello sviluppo in serie fino al *terzo* *ordine*:

$$\frac{f(1)}{0!}(x-1)^0 = 1$$
$$\frac{f'(1)}{1!}(x-1)^1 = \alpha(x-1)$$
$$\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(x-1)^2$$
$$\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}(x-1)^3$$

Notiamo che questi termini corrispondono sempre allo sviluppo del binomio $((x-1)+1)^\alpha$ e possiamo quindi scrivere che

$$x^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} (x-1)^k$$

dove per analogia con il caso intero $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}$.
In modo del tutto analogo potevamo scrivere che $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$

Esempio 5. Troviamo l'espansione in serie di Taylor attorno a $x_0 = 1$ di $f(x) = \ln(1+x)$, sapendo che la sua derivata deve essere $\frac{1}{1+x}$, di cui si ha già l'espansione in serie data nell'introduzione. Verificate che la soluzione è

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Si noti che espandere $\ln(1+x)$ attorno a 0 è analogo ad espandere $\ln(x)$ attorno a 1, ovvero

$$\ln(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots$$

1.5 Ordini di Infiniti e di Infinitesimi

Abbiamo visto come in un'espressione sia lecito trascurare un termine infinitamente più piccolo degli altri termini in gioco. Questo è utile in Fisica quando si ha un'espressione complicata che può essere resa molto più semplice e trattabile cancellando alcune quantità che sappiamo essere piccole rispetto alle altre.
Ad esempio, quando si ha un angolo piccolo θ si può usare l'approssimazione in Taylor del seno e mantenere solo il primo ordine, ottenendo

$$\sin(\theta) = \theta + o(\theta) \approx \theta$$

dove l'*o-piccolo* di θ indica una quantità trascurabile rispetto ad θ.
Se $a(x)$ e $b(x)$ vanno entrambi a 0 quando $x \to 0$, un metodo generale per capire quale va a 0 più velocemente (cioè quale ha un'ordine di infinitesimo maggiore) è calcolarne il rapporto

$$\lim_{x\to 0} \frac{a(x)}{b(x)}$$

dove la dicitura $\lim_{x\to 0}$ indica che vogliamo valutare quanto vale questa espressione per x che tende a 0. Questa operazione è detta *limite*.

Se il rapporto tende a 0, $a(x)$ tende a 0 più velocemente di $b(x)$ e si dice che ha un ordine di infinitesimo più grande di $b(x)$. Viceversa se il rapporto tende a $+\infty$. Se il rapporto invece è un numero finito, si dice che $a(x)$ e $b(x)$ hanno lo stesso ordine di infinitesimo.
Si dice inoltre che x^k per $x \to 0$ è un *infinitesimo del k-esimo ordine*.

Esempio 6. Mettiamo che vogliamo chiederci quanto vale $\frac{1-\cos(x)}{x^2}$ in 0. Uso l'espansione in Taylor di $\cos(x)$ in $x_0 = 0$ trovando

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

Inserendo quest'espressione nella formula precedente troviamo

$$\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2} + o(1) \approx \frac{1}{2}$$

(Le proprietà dell'*o-piccolo* possono essere dedotte riflettendo sulla sua definizione). Si noti che se si fosse dovuto calcolare $\frac{1+\frac{x^2}{2}-\cos(x)}{x^2}$ si sarebe trovato $o(x^2)$ che è uguale a 0, mentre se si fosse dovuto calcolare $\frac{1+\frac{x^2}{2}-\cos(x)}{x^4}$ avrei dovuto espandere al *quart'ordine* (se espando al second'ordine trovo $o(\frac{1}{x^2})$ che per $x \to 0$ indica una quantità trascurabile rispetto a infinito, cosa vera, ma non sufficiente). In questo caso l'ordine a cui espandere si vede dal denominatore; se invece il denominatore è anch'esso complicato, bisogna andare a tentativi, magari cominciando già a prendere tanti termini.

Esempio 7. Provimo a calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \arctan x - \frac{\sin x \ln(1+x)}{x} + 3(\cos x - 1) + \tan(x^3)}{\sqrt{1-x^3} - \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}}$$

Con un po' di occhio si vede che, poiché $\sqrt{1-x^3} \approx 1 - \frac{1}{2}x^3$ e che $\frac{1}{\sqrt{1-x^3}} \approx 1 + \frac{1}{2}x^3$, si ha che il denominatore al terzo ordine è x^3. Quindi per ottenere il risultato basterà espandere il numeratore al terzo ordine. Si provi a fare l'esercizio per prendere confidenza con le derivate di ordine superiore e lo sviluppo in serie di Taylor.
Si tengano presenti le seguenti indicazioni:

1. Non bisogna espandere attorno ad un punto sbagliato. Ad esempio non si può espandere $\ln(x)$ in Taylor attorno a 0 (non si può perché qui la funzione vale $-\infty$: dunque l'espansione avrebbe problemi già con il primo termine). Si può invece espandere attorno a 1, come abbiamo fatto.

2. Se devo espandere al terzo ordine in x l'espressione $\frac{f(x)}{x}$, la funzione $f(x)$ va espansa al quarto ordine! Questo perché il termine di quarto ordine, diciamo ax^4, una volta diviso per x diventa ax^3, che è di terzo ordine, e che dunque deve essere necessariamente incluso nel conteggio. Se siete in dubbio durante i conti, portatevi dietro più termini del necessario, e semplificateli solo alla fine.

3. Si espande sempre rispetto a qualcosa. Se chiedo di espandere $e^{\alpha t^2}$ al primo ordine in α è diverso dall'espanderlo al second'ordine in t^2, che però è lo stesso che espanderlo al prim'ordine in t.

Così come esistono gli ordini di infinitesimo esistono anche gli *ordini di infinito*. Se $a(x)$ e $b(x)$ tendono entrambi a $+\infty$ quando $x \to 0$ (o $x \to x_0$ o $x \to +\infty$), allora è possibile vedere quale va a $+\infty$ più velocemente calcolando

$$\lim_{x\to 0} \frac{a(x)}{b(x)}$$

Se il risultato è $+\infty$ allora $a(x)$ va a infinito più velocemente di $b(x)$, dunque ha un ordine di infinito più alto di $b(x)$. Viceversa se il risultato è 0. Se il risultato è un numero finito, hanno lo stesso ordine di infinito.
Inoltre si dice che x^k con $x \to +\infty$ è un *infinito di k-esimo ordine*.

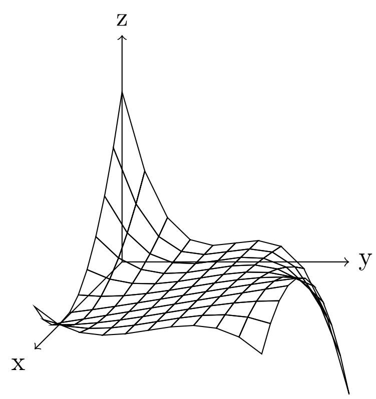
Ovviamente l'ordine di infinito x^α è maggiore di quello di x^β se $\alpha > \beta$. Gli esponenziali crescono più velocemente di qualunque polinomio (dato qualunque x^α, nell'espansione in Taylor di un esponenziale compaiono x^n con $n > \alpha$).
Per sapere come cresce il logaritmo, consideriamo (per α positivi)

$$\frac{\ln(x)}{x^\alpha} = \frac{\ln(y^{\frac{1}{\alpha}})}{y} = \frac{1}{\alpha}\frac{\ln(y)}{y} = \frac{1}{\alpha}\frac{z}{e^z}$$

che va a 0 per $z \to +\infty$ (e quindi per $x \to +\infty$), quindi il logaritmo cresce più lentamente di qualunque polinomio.

1.6 Funzioni in più variabili

Una *funzione in due variabili* $z = f(x, y)$ è una regola che associa ad ogni coppia (x, y) un numero z. È rappresentabile con un grafico tridimensionale: per ogni coppia (x, y) si ha un'unica altezza z fornita dalla funzione. La funzione è continua se può essere figurata come un telo senza strappi, ed è derivabile se localmente può essere approssimata ad un piano, più precisamente se ad ogni spostamento piccolo, diciamo di $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$, corrisponde un cambiamento piccolo di altezza, $\mathrm{d}z$.
Ecco un esempio di una funzione in due variabili:



Ora x e y sono coordinate indipendenti, poiché posso sceglierne il valore arbitrariamente: è z che non può essere preso arbitrariamente, perché è determinato dalla scelta di x e y.

Potendo scegliere arbitrariamente x e y, si può decidere di fissare y e di far variare x. La funzione in due variabili $z = f(x, y)$ ad y fissato è ora un'espressione che ad ogni x associa una z. Ho dunque una funzione in una variabile (analogamente avrei potuto fare tenendo fisso x). Si visualizza bene il grafico di questa funzione pensando di "affettare" il grafico tridimensionale tagliandolo lungo la retta che ha come valore di y il valore fissato scelto. Posso ora calcolare la derivata di questa funzione in una variabile, e posso farlo in tutti i punti (prima affetto il grafico tridimensionale lungo un asse parallelo all'asse x, poi calcolo la derivata nel punto d'interesse).

Le *derivate parziali* sono definite come

$$\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)_y = \frac{f(x+\mathrm{d}x, y) - f(x,y)}{\mathrm{d}x}$$

dove il pedice y esplicita il fatto che si effettua la derivata rispetto a x con y costante. Essa può essere intesa come la derivata della funzione $g(x) = f(x, y)$ dove y è costante: $g(x)$ è la "sezione" trovata dal grafico con un taglio parallelo all'asse y nel punto d'interesse.
Si noti che il pedice è spesso omesso in quanto chiaro nel contesto; può essere utile adoperarlo in Termodinamica, per evitare confusioni. In generale si intende

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)_y$$

Mettiamo che x e y dipendano da t. Calcoliamo la derivata di $f(x(t), y(t))$ rispetto a t:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f(x,y)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}f(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y) - f(x,y)}{dt} = \\
&= \frac{\mathrm{d}f(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y) - f(x, y+\mathrm{d}y)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}f(x, y+\mathrm{d}y) - f(x,y)}{\mathrm{d}t} = \\
&= \frac{\mathrm{d}f(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y) - f(x, y+\mathrm{d}y)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{df(x, y+\mathrm{d}y) - f(x,y)}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \\
&= \left(\frac{\partial f(x+\mathrm{d}x, y)}{\partial x}\right)_y \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)_x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \\
&= \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)_y \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)_x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio posso mandare dx a 0.

Vale la regola

$$\mathrm{d}f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$$

che è assai utile in molti casi (essa viene detta *regola della catena*).

Definiamo il *vettore gradiente*

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

e lo spostamento infinitesimo $\mathbf{s} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$. Si ha dunque

$$\mathrm{d}f(x, y) = \nabla f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$$

Nota importante: esistono funzioni che ammettono derivate parziali, ma che non sono derivabili (cioè, localmente non sono approssimabili a dei piani). Un esempio è una funzione che vale 0 negli assi x e y, e 1 in tutti gli altri punti. In 0 questa funzione possiede derivate parziali pari a 0, ma la formula appena scritta non si applica. Questa formula vale solo per funzioni derivabili. La (quasi) totalità delle funzioni che si incontreranno saranno derivabili.

Possiamo dedurre che a parità di spostamento infinitesimo, il maggior cambiamento di $\mathrm{d}f$ avviene parallelamente al gradiente. Dunque il gradiente indica la direzione di maggior pendenza, mentre ortogonalmente al gradiente la funzione ha pendenza 0 (ovvero non cambia al primo ordine). È per questo che il gradiente è un campo vettoriale ortogonale alle linee equipotenziali.
Tutto quello che è stato detto si può estendere senza difficoltà in tre dimensioni per $f(x, y, z)$. Qui ortogonalmente al gradiente si avranno le superfici equipotenziali.

1.7 Integrali

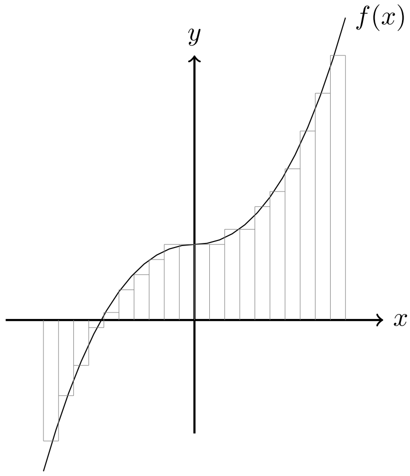
L'*integrale definito* di una funzione $f(x)$ tra a e b è definito come l'area sottesa dal grafico di $f(x)$ tra il punto a e il punto b, tenendo a mente che se il grafico va sotto l'asse x allora l'area sarà contata con valore negativo. L'integrale definito si indica con

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

per ricordare che si tratta di una sommatoria di diverse striscioline di base $\mathrm{d}t$. Se la base diventa sempre più piccola, l'altezza tende a non variare molto, e l'area tende a quella del rettangolo di altezza $f(t)$. Si potrebbe scrivere anche come

$$\sum_{k=0}^{N} f\left(a + k\frac{b-a}{N}\right)\frac{1}{N}$$

dove N è un numero infinito grande a piacere, che diventa il $\mathrm{d}t$ della notazione precedente.



Pensando al significato dell'integrale come area sottesa dalla funzione da a a b, è chiaro che vale

$$\int_a^c f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\mathrm{d}t$$

La funzione

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

detta *funzione integrale*, ha proprietà interessanti. Se ne calcoliamo la derivata troviamo

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} &= \frac{\int_a^{x+\mathrm{d}x} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \\ &= \frac{\int_x^{x+\mathrm{d}x} f(t)\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \\ &= \frac{f(x)\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = f(x)\end{aligned}$$

dove nel penultimo passaggio ho usato il fatto che il numeratore era uguale all'area di una strisciolina di base infinitesima la cui altezza è circa $f(x)$. Con il diminuire di $\mathrm{d}x$, l'area tende all'area del rettangolo di altezza $f(t)$.
Questo è il *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale*: l'integrale di una funzione è una sua *primitiva* (o antiderivata: una funzione che, se derivata, dà la funzione di partenza). Si noti che, poiché $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} = 0$ per ogni costante $c \in \mathbb{R}$, se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ allora anche $F(x) + c$ lo è.
L'espressione $F(x) + c$, che indica un insieme di funzioni che differiscono per una costante c, è detta *integrale indefinito* di $f(x)$, e si indica con

$$\int^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) + c$$

dove si esplicita la dipendenza da x, mentre non è importante specificare da dove parte l'integrazione, poiché altera il risultato solo di una costante addittiva, e si sta considerando il risultato a meno di costante. Se non si vuole esplicitare la dipendenza da x si può anche scrivere ugualmente

$$\int f(t)\mathrm{d}t$$

Esempio 8. Se vogliamo valutare $\int x^n \mathrm{d}x$, ci chiediamo qual è la funzione che ha come derivata x^n? Con un po' di intuizione capiamo che una possibile soluzione è $\frac{x^{n+1}}{n+1}$. Scriveremo allora

$$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

Tale soluzione vale per $n \neq -1$: in tal caso la soluzione è meno ovvia e l'inegrale vale $\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln|x| + c$. Come è facile verificare vale in generale $\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$.

Nell'uso degli integrali in Fisica possono essere utili considerazioni di analisi dimensionale per evitare di compiere errori.

Le tecniche più utili per valutare degli integrali sono la *sostituzione delle variabili* e l'*integrale per parti*.
La sostituzione delle variabili consiste nel cambiare la variabile di integrazione: ad esempio, se la variabile d'integrazione è t, pongo $t = g(s)$, quindi si avrà che $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s = g'(s)ds$, e quindi:

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_{g(a)}^{g(b)} f(g(s))g'(s)\mathrm{d}s$$

Con il cambio di variabili è possibile dimostrare la formula seguente:

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = -\int_b^a f(s)\mathrm{d}s$$

Si provi a farlo usando la sostituzione $s = a + b - t$.
L'integrale per parti, invece, consiste nel ricordare la formula differenziale $\mathrm{d}(fg) = \mathrm{d}f\, g + f\, \mathrm{d}g$ e integrarla ottenendo

$$\int_a^b \mathrm{d}f\, g + \int_a^b f\, \mathrm{d}g = \int_a^b \mathrm{d}(fg) = [fg]_a^b$$

dove quest'ultima espressione significa $f(b)g(b) - f(a)g(a)$. La regola è di solito espressa come

$$\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t$$

Si provi ad adoperarla per calcolare $\int_a^b \ln(x)\mathrm{d}x$ immaginando che $\ln(x) = 1 \cdot \ln(x)$ e pensando quale dei due termini convenga derivare e quale integrare.

1.8 Integrali doppi e tripli

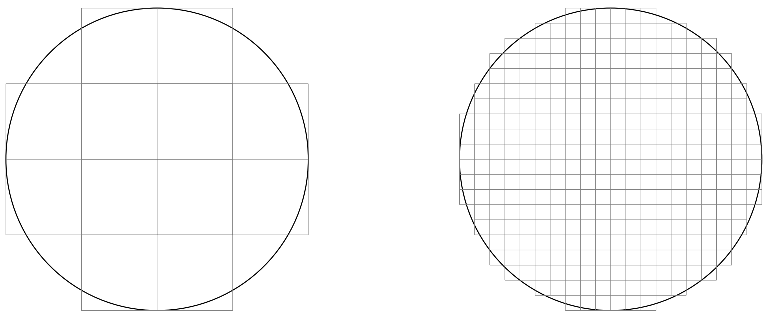
Data una $f(x, y)$, l'integrale

$$\int_S f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

lungo una certa superficie S del piano xy, è il volume sotteso dal grafico di $f(x, y)$. L'obiettivo è misurarlo come somma di paralleleppipedi di base infinitesima (e quadrata).
Dividiamo l'area del piano xy in N quadratini infinitesimi di lato $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$. Se il bordo dell'area è curvo sto commettendo un certo errore, ma questo errore va a 0 mano a mano che $\mathrm{d}x \to 0$. Poiché i quadratini hanno un'estensione infinitesima, si può dire che siano localizzati in singoli punti, le cui coordinate chiameremo $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, ecc. Posso considerare dunque l'integrale come

$$\sum_{k=0}^{N} f(\mathbf{r}_k)\mathrm{d}S$$

con $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Analogamente si definisce l'integrale in tre dimensioni.

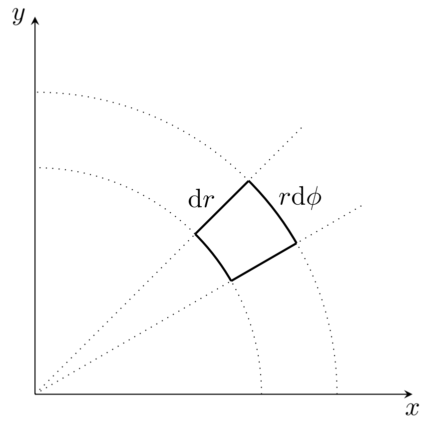


Vediamo ora le formule di cambio di variabili per ricondurre un integrale dalle coordinate cartesiane alle coordinate polari o sferiche.
Le coordinate polari esprimono la posizione di un punto nel piano attraverso la distanza ρ dall'origine e l'angolo θ misurato in senso antiorario partendo dall'asse delle ascisse.
Le coordinate sferiche esprimono la posizione di un punto nello spazio attraverso la distanza r dall'origine, l'angolo θ formato dall'asse verticale partendo dall'alto, e l'angolo ϕ misurato in senso antiorario partendo dall'asse delle ascisse.
Le formule di cambio di variabili sono le seguenti:

$$\int f(x, y)dxdy = \int f(\rho, \theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$\int f(x, y, z)dxdydz = \int f(r, \theta, \phi)r^2\sin(\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

Il motivo della comparsa di ρ e $r^2\sin(\theta)$ non è solo dimensionale (non si potrebbe giustificare il $\sin(\theta)$).
In coordinate cartesiane f(x,y) viene moltiplicata per la superficie le cui coordinate variano rispettivamente da x a $x + dx$ e da y a $y + dy$.
In coordinate polari la superficie in cui le coordinate variano rispettivamente da ρ a $\rho + \mathrm{d}\rho$ e da θ a $\theta + \mathrm{d}\theta$, facendo un disegno, si vede essere pari a $\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$.



Analogamente per le coordinate sferiche (si provi per esercizio a fare il disegno e si verifichi che il volume infinitesimo è effettivamente $r^2 \sin(\theta) \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$).

In Fisica è fondamentale anche saper lavorare con superfici e volumetti infinitesimi, ma si affronterò la questione negli esercizi.
Lo stesso per la nozione di cambio di variabili, in particolar modo quelli lineari, quelli dalle coordinate cartesiane a quelle polari o sferiche e viceversa.

1.9 Equazioni alle derivate orinarie (ODE)

Un'ODE ovvero un'*equazione alle derivate ordinarie* (per distinguerla dalle PDE, le *equazioni alle derivate parziali*) è un'equazione che esprime la relazione tra una funzione e le sue derivate, e l'incognita è la funzione stessa. Un esempio è $\alpha\ddot{y} + sin(y) = 0$. Esse compaiono ovunque in fisica.

Le ODE si dicono di di *primo ordine* quando contengono solo le derivate prime, e più in generale di *n-esimo ordine* quando contengono solo le derivate fino all'n-esima. Come vedremo adesso, in generale la soluzione di un'ODE (ovvero la funzione che soddisfa la proprietà richiesta) non è unica, ma esiste un insieme di soluzioni che dipende da alcuni parametri liberi. Nei problemi di fisica, questi parametri liberi vengono fissati dalle condizioni particolari del problema, ad esempio dalle condizioni iniziali (ad esempio posizione e velocità iniziali di una particella) oppure condizioni al contorno (ad esempio che a $+\infty$ la funzione sia nulla).
Anche se non è sempre vero, ci si può attendere che le ODE di n-esimo ordine ammettano una soluzione con n parametri liberi. Questo capita per tutte le ODE presentate in seguito.

Vediamo alcune ODE del prim'ordine e alcune tecniche di risoluzione. Ci aspettiamo che la soluzione dipenda da un parametro libero.

Se l'equazione è della forma

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \alpha f(x)$$

la soluzione è semplicemente una primitiva di $f(x)$, cioè $y = \alpha \int^x f(t) \mathrm{d}t + c$.

Se l'equazione è della forma

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$$

è possibile applicare una tecnica nota come *separazione delle variabili.* Essa consiste nel portare da un lato tutti i termini dipendenti da una stessa variabile, ottenendo

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x$$

e poi integrando

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x + c$$

e infine cercando di esplicitare y in funzione di x.

Vediamo ora un tipo di ODE di ordine n-esimo, la cui soluzione effettivamente dipende da n parametri.

Se l'equazione è della forma

$$f^{(n)} + c_{n-1}f^{(n-1)} + \cdots + c_2 f''(x) + c_1 f'(x) + c_o f(x) = 0$$

allora si possono raccogliere le derivate e si può scrivere

$$(\mathrm{D}^n + c_{n-1}\mathrm{D}^{n-1} + \cdots + c_2\mathrm{D}^2 + c_1\mathrm{D} + c_0)f(x)$$

Fattorizzando il polinomio nelle sue radici α, β, ..., ζ, ottengo

$$(\mathrm{D} - \alpha)(\mathrm{D} - \beta)\dots(\mathrm{D} - \zeta)f(x) = 0$$

L'equazione $(\mathrm{D} - \alpha)f(x)$ ha come soluzione $f(x) = Ae^{\alpha x}$, con A costante arbitraria. Dunque le soluzioni dell'ODE considerata saranno della forma $Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} + \cdots + Ze^{\zeta x}$, dove $A, B, \dots, Z$ sono costanti arbitrarie.
Se una radice α compare k volte, bisogna considerare le combinazioni lineari delle seguenti k soluzioni: $e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, x^2e^{\alpha x}, \dots, x^{k-1}e^{\alpha x}$: si può verificare che tutte queste funzioni vengono mandate a 0 se si applica loro l'operatore $(D-\alpha)^k$.

Un'equazione differenziale che compare spesso in Fisica è quella dell'*oscillatore armonico*, cioè

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0$$

e le sue varianti. Come abbiamo visto le sue soluzioni sono combinazioni lineari di $e^{i\omega t}$ e di $e^{-i\omega t}$. Poiché le variabili fisiche sono reali, saranno accettabili solo le combinazioni lineari di $\cos(\omega t)$ e di $\sin(\omega t)$. Si noti che la combinazione lineare di due sinusoidi di uguale frequenza è una singola sinusoide di tale frequenza, poiché data $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$, se scelgo $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ e $\phi = \arctan(\frac{A}{B})$, avrò che $A = C\sin(\phi)$ e $B = C\cos(\phi)$, e quindi la soluzione dell'ODE diventa

$$C(\sin(\phi)\cos(\omega t) + \cos(\phi)\sin(\omega t)) = C\sin(\omega t + \phi)$$

Nel caso di un *oscillatore armonico smorzato*, l'equazione è

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega^2 x = 0$$

(il nuovo termine rappresenta una forza di attrito rivolta nel verso opposto alla velocità). Abbiamo già visto la soluzione generale di equazioni di questa forma, quindi sarete in grado di trovare le soluzioni al variare di γ.
L'equazione dell'*oscillatore armonico forzato* è

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = f(t)$$

dove $f(t)$ è una forza per unità di massa che proviene dall'esterno variabile nel tempo. È possibile studiare il comportamento di questo sistema fisico nel caso di una forzante sinusoidale, osservando risonanza per frequenze vicine a ω, oppure nel caso di una forzante impulsiva (*delta di Dirac*).

1.10 Calcolo Infinitesimale coi Vettori

Vediamo meglio alcune nozioni matematiche che saranno utili in diversi campi della Fisica, in particolar modo l'Elettromagnetismo. Per spazio intenderemo lo spazio tridimensionale.

Un *campo scalare* è una funzione che a ogni punto dello spazio associa uno scalare: è una funzione a tre variabili, $\phi(x, y, z)$, di cui abbiamo già discusso.
Un *campo vettoriale* è una funzione che a ogni punto dello spazio associa un vettore: può essere considerata come tre funzioni a tre variabili, $A_x(x, y, z)$, $A_y(x, y, z)$, $A_z(x, y, z)$, che rappresentano le tre coordinate dei vettori in tutti i punti dello spazio. Si può indicare con $\mathbf{A}(x, y, z)$.

Abbiamo già parlato del gradiente. Il *gradiente di un campo scalare* è un vettore che si indica con $\nabla\phi$. La direzione è quella dove il campo scalare cambia più velocemente a parità di spostamento spaziale. Il verso è quello verso cui il campo scalare aumenta. Il modulo è il rapporto incrementale $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}$ calcolato nella direzione e nel verso indicati (questa operazione si chiama *derivata direzionale*).

Consideriamo ora l'operatore *nabla* ∇. Esso ha tre componenti: $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ (Nota importante: questo è vero solo in coordinate cartesiane! Un facile modo per accorgersene è che in polari e in sferiche una scrittura analoga non tornerebbe dimensionalmente). È proprio considerandolo come una sorta di vettore che possiamo immaginare di poter costruire espressioni come (i) $\nabla \cdot \mathbf{A}$, (ii) $\nabla \times \mathbf{A}$ o (iii) $\nabla \cdot \nabla\phi$. Vediamo a cosa corrispondono queste espressioni.

(i) Il *flusso di un campo vettoriale* $\mathbf{A}(x)$ attraverso una superficie S è definito come la quantità di linee di flusso che attraversa la superficie:

$$\Phi_A(S) = \int_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{a}$$

dove $\mathrm{d}\mathbf{a}$ è il vettore normale alla superficie (il verso viene scelto per convenzione) e la cui lunghezza è pari all'area infinitesima considerata. Ad esempio, se $\mathbf{A}$ è la velocità di un fluido, il flusso lungo una superficie rappresenta la portata, cioè il volume di fluido che attraversa la superficie per unità di tempo.

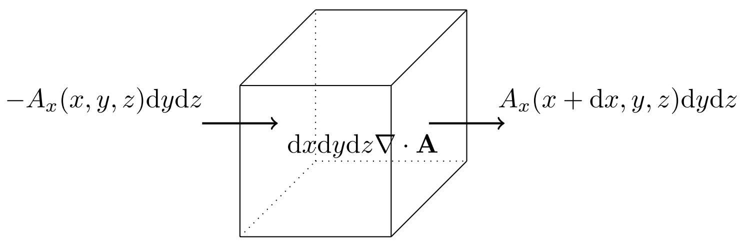
La *divergenza di un campo vettoriale* è definita in questo modo: per ogni punto, si prenda un volume infinitesimo, e si calcoli a cosa tende il rapporto tra il flusso uscende dal volumetto e il volumetto stesso:

$$\mathrm{div}(\mathbf{A}) = \frac{\Phi_A(\mathrm{d}S)}{V}$$

La divergenza esprime la tendenza delle linee di flusso di un campo vettoriale a uscire da un punto, o ad entrare. Ad esempio, in elettrostatica, le linee di flusso del campo elettrico escono dalle regioni a carica positiva, e la divergenza è proporzionale alla densità di carica elettrica.
Consideriamo ad esempio un cubetto di lati $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$. Il flusso lungo le facce verticali è

$$A_z(x,y,z+\mathrm{d}z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - A_z(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\partial A_z(x,y,z)}{\partial z}\mathrm{d}V$$

(non sto considerando il fatto che lungo le singole facce il valore di A_z cambi perché contribuirebbe con un termine di ordine superiore, dunque trascurabile).



Sommando i contributi dalle altre direzioni e dividendo per $\mathrm{d}V$ abbiamo

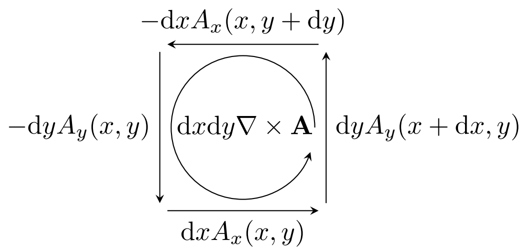
$$\mathrm{div}(\mathbf{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \nabla\cdot\mathbf{A}$$

(ii) La *circuitazione di un campo vettoriale* $\mathbf{A}$ lungo una traiettoria γ misura quanto il campo vettoriale sia allineato con la traiettoria:

$$\Gamma_A(\gamma) = \int_\gamma \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$$

dove $\mathrm{d}\mathbf{r}$ è il vettore infinitesimo lungo la curva γ, il cui verso è il verso di percorrenza e la cui lunghezza è lo spostamento infinitesimo considerato. Ad esempio, se $\mathbf{A}$ è la forza, la circuitazione lungo γ è il lavoro compiuto dalla forza per spostare un corpo lungo γ.

Il *rotore di un campo vettoriale* è definito in questo modo: la sua componente z in un punto è data prendendo un cerchietto $\mathrm{d}\gamma$ infinitesimo nel piano xy, da percorrere nel verso indicato dalla regola della mano destra, e facendo il rapporto tra la circuitazione e la superficie del cerchietto; similmente per le componenti x e y. Esso rappresenta la tendenza di un campo vettoriale a ruotare, e indica direzione e verso di questa rotazione (con la regola della mano destra).



Calcoliamo la componente z del rotore considerando una $\mathrm{d}\gamma$ quadrata di lati $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$. La circuitazione nei lati paralleli all'asse x vale

$$-A_x(x, y + \mathrm{d}y, z)\mathrm{d}x + A_x(x, y, z)\mathrm{d}x = -\frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(anche in questo caso considerare ulteriori variazioni di A_x lungo questi tratti implicherebe considerare termini di ordine superiore). Sommando il contributo dei lati paralleli all'asse y, che si calcola in modo analogo, e dividendo per la superficie $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, ottengo

$$(\mathrm{rot}(\mathbf{A}))_z = \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial y} = (\nabla \times \mathbf{A})_z$$

Facendo altrettanto per le altre componenti si trova

$$\mathrm{rot}(\mathbf{A}) = \nabla \times \mathbf{A}$$

(iii) Infine, il *laplaciano di un campo scalare* in un punto si calcola prendendo una superficie che circonda il punto, calcolando la differenza tra valor medio del campo sulla superficie e valore del campo nel punto di interesse, e calcolando il rapporto tra questa quantità e il valore della superficie, e moltiplicando per 36.
Tuttavia l'importante non è il fattore numerico, ma il fatto che sia proporzionale a quanto il campo sulla superficie disti dal valore nel centro.

2 Esercizi

2.1 Legenda

Il simbolo * indica il livello di difficoltà.
Il simbolo ! indica quanto mi pare buono il problema.
(purtroppo per i problemi di Fisica mancano spesso entrambi i simboli...)

2.2 Basic

1. !!! *Esercizio Zero* Dato un triangolo con due lati lunghi a e b, e un angolo compreso di θ, trovare la lunghezza del lato opposto.

2. ! Quanto vale la superficie laterale di una sfera di raggio R, compresa tra le altezze h e $h + \mathrm{d}h$ (con $-R \leq h < R$)?

3. ! Calcola il volume di un tetraedro di lato 1.

4. ! Considerare la sequenza dei poligoni a 4, 8, 16, 32, ... lati, e usando la trigonometria, dimostrare che $\pi = 2\frac{2}{\sqrt{2}}\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots$

5. ! Quali sono tutti e soli i numeri complessi z tali che $e^z = 1$? Quanto fa $\ln(z)$?

6. !!! La derivata logaritmica di $f(x)$ è definita come $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(f(x))$. Trovare la derivata logaritmica di x^n e di e^x (spesso è più facile calcolare la derivata logaritmica invece che la derivata classica). Calcolare la derivata logaritmica di $\frac{e^x \arctan(x)\sin(x)}{x^4\ln(x)}$. Da essa ricavare la derviata classica.

7. !!! Calcolare il valore di $\frac{a^{\mathrm{d}x}-1}{\mathrm{d}x}$ (vedi capitolo sugli Esponenziali). Si noti che è uguale alla derivata in 0 di a^x. Si calcoli tale derivata.

8. ! Calcola la derivata di x^x nei seguenti due modi: $x^x = e^{x\ln(x)}$ oppure $x^x = f(x,x)$ dove $f(x,y) = x^y$ (derivata totale di una funzione in due variabili).

9. !!! Sia dato un tronco di cono di un materiale di resistività ϱ. I raggi sono rispettivamente a e b con $a \geq b$. Qual è la resistenza ai capi dell'oggetto? (Nota importante: la soluzione richiesta deve essere valida per $b \approx a$. Discutere sul perché quando b è sensibilmente più grande di a, la soluzione data in precedenza non funziona.)

10. Dimostrare che $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ è il volume del parallelotopo tridimensionale i cui lati sono i tre vettori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$. Capire a che cosa è associato il segno di questa espressione. Accorgersi ora che $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = -\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{b}) = -\mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a}) = -\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c})$

11. Verificare se la formula $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$ fornisce risposte corrette in alcuni casi banali. Solo dopo aver fatto questo, dimostrarla per componenti (questa formula è chiamata "bac meno cab").

12. !!! Nel caso aveste dubbi, calcolate la derivata di $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ e di $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ (fatelo per componenti).

13. * !!! Usare la fomula di De Moivre, e in generale i numeri complessi, o qualunque altro metodo, per dimostrare le seguenti formule trigonometriche:

    (i) $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$
    (ii) $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
    (iii) $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$
    (iv) $\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot(\alpha)\cot(\beta)-1}{\cot(\beta)+\cot(\alpha)}$
    (v) $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$
    (vi) $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$
    (vii) $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$
    (viii) $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$
    (ix) $\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$
    (x) $1 + 2\cos(x) + 2\cos(2x) + 2\cos(3x) + \cdots + 2\cos(nx) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$
    (xi) $\sin^3(\alpha)$ in funzione di $\sin(\alpha)$, $\sin(2\alpha)$, $\sin(3\alpha)$, ...

2.3 ODE e PDE

14. Consideriamo l'ODE di un oscillatore forzato con forzante x^5, ovvero:

$$\omega_0^2 y + \ddot{y} = f x^5$$

    (i) Trovare la soluzione dell'omogenea associata (ovvero l'equazione dello stesso problema senza la forzante, ovvero con 0 nel lato destro).
    (ii) Per trovare la soluzione particolare, scrivete il lato sinistro come $(\omega_0^2 + \mathrm{D}^2)y$, dove D è l'operatore che deriva rispetto a t. Per esplicitare y, che cosa vi viene spontaneo fare? (*Nota*: D non commuta con gli scalari, perché $\mathrm{D}\alpha \neq \alpha\mathrm{D}$. Quindi occhio a quello che fate)

15. Usare gli stessi metodi del problema precedente con l'ODE

$$\omega_0^2 y + \ddot{y} = f\sin(\omega t).$$

    Provare lo stesso metodo e vedere che non funziona. Trovare la soluzione con $\omega_0 = 2$, $\omega = 2$, $f = 1$. Provare come soluzione un qualche polinomio di grado basso moltiplicato per coseno e seno della frequenza che vi aspettate e vedere se funziona.

16. Risolvi con una serie di potenze attorno a $x = 0$ l'ODE

$$\ddot{y} + xy = 0.$$

    (*Soluzione*: una delle due soluzioni è $1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{1*4x^6}{6!} + \frac{1*4*7x^9}{9!} + \dots$) (MTP4.20)

17. Risolvi con una serie di potenze attorno a $x = 0$ l'ODE
$$\ddot{y} + \frac{x}{\sin y} = 0$$
(*Soluzione*: $y = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{48}x^4 + \frac{1}{192}x^5 \dots$) (MTP4.57)

18. Risolvi con una serie di potenze attorno a $x = 0$ l'ODE
$$x^2\ddot{y} - 2ix\dot{y} + (x^2 + i - 1)y = 0.$$
(MTP4.58)

19. !!! Risolvere l'ODE
$$y\dot{y} = x(4 - y^2)$$
(*Suggerimento*: usare la separazione delle variabili)

20. * !!! Che equazione ha una *Cicloide*? (traiettoria di un punto sul cerchione di una ruota di raggion R) Quale ODE risolve la Cicloide (Soluzione: $\dot{y} = \frac{2R}{y} - 1$)?

21. * !!! Verifica che l'Equazione delle Onde $\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}$ ammette come soluzioni le funzioni che si propagano a velocità costante $\pm c$ e le loro combinazioni lineari.

2.4 Volumetti Infinitesimi

22. !!! *Formule di Pappo* Vediamo i Teoremi di Pappo. Il primo afferma che la superficie di una superficie di rotazione (ottenuta ruotando la figura bidimensionale di contorno lungo l) è uguale alla lunghezza l per il percorso medio attorno all'asse di rotazione, cioè $2\pi r$, con r distanza del baricentro del contorno dall'asse di rotazione. Il secondo afferma che il volume di un volume di rotazione (ottenuto ruotando la figura bidimensionale di area S) è uguale all'area S per il percorso medio attorno all'asse di rotazione, cioè $2\pi r$, con r raggio del baricentro della superficie dall'asse di rotazione.
    (i) Dire perché i due teoremi sono veri, pensando a quale superficie è generata dalla rotazione di un segmento dl e a quale volume è generato dalla rotazione di una superficie dS
    (ii) Trovare superficie e volume di un toro
    (iii) Trovare il volume di un toro a sezione rettangolare.
    (iv) Calcolarne la resistenza elettrica data una resistività ρ costante.

23. ** !! Trova la formula del raggio di curvatura nel punto (x_0,y_0) della funzione $y = f(x)$ in funzione di $y, \dot{y}, \ddot{y}$. (Suggerimento: usare gli infinitesimi)

24. * !!! Il *momento d'inerzia* è definito come $I_0 = \int \rho(\mathbf{r}) r^2 \mathrm{d}^3 r$ dove $\mathbf{r}$ è la distanza dall'asse attorno a cui avviene la rotazione. Calcolare il momento d'inerzia di qualunque cosa. Esempi: sfera, guscio sferico, lastra rettangolare di spessore trascurabile, parallelepipedo a basi rettangolari, asta sottile rispetto al centro, asta sottile rispetto a un estremo, cono rispetto all'asse, insieme di Cantor.

2.5 Ordini e Limiti

25. !!! Data $y^5 - y = x$ calcolare fino al quint'ordine $y(x)$. (*Soluzione*: $y = -x - x^5 + 5x^9 - 15x^{13} + O(x^{17})$)

26. !!! Calcolare al sesto ordine $e^{x^2+\alpha x}$ in x.

27. !!! Calcolare al sesto ordine $e^{x^2+\alpha x}$ in α.

28. !!! Calcolare al second'ordine $\frac{1}{\sqrt{1-2x\cos\theta+x^2}}$ in x.

29. !!! Trovare l'espansione al quint'ordine di $\tan x$. (*Soluzione*: $\tan x = x + x^3/x + 2x^5/15 + 17x^7/315 + O(x^9)$)

30. !!! Calcolare se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \arctan x - \frac{\sin x \ln(1+x)}{x} + 3(\cos x - 1) + \tan(x^3)}{\sqrt{1-x^3} - \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}}.$$

31. !!! Calcolare $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x})$ (MTP2.15)

32. !!! Calcolare $\lim_{x\to 0}(\frac{2}{x} + \frac{1}{1-\sqrt{1+x}})$ (MTP2.16)

33. !!! Trovare l'espansione in Taylor dell'arcoseno, sapendo quello della sua derivata.

34. !!! L'espressione dell'entropia nell'oscillatore armonico quantistico è $S = k(\frac{x}{e^x-1} - log(1-e^{-x}))$, dove k è la costante di Boltzmann e $x = \frac{\hbar\omega}{kT}$. Calcolare ai primi ordini il valore dell'entropia nei limiti di temperatura alta e bassa. Poiché alta e bassa non vuol dire niente, si intende alta e bassa rispetto a cosa, secondo voi?

35. !!! Se $1 >> \alpha >> \beta$, ha più senso approssimare $1 + \alpha + \beta$ al primo ordine in α o al primo ordine in β?

2.6 Fisica

36. !!! Ad una certa ora del mattino inizia a nevicare, e a mezzogiorno uno spalaneve parte per pulire le strade. La neve continua a cadere con intensità costante. Si sa che la velocità con cui procede lo spazzaneve è inversamente proporzionale all'altezza della neve. Nelle prime due ore di lavoro lo spazzaneve riesce a pulire 4 km di strada. Nelle due ore successive invece se ne liberano solo 2 km. A che ora ha iniziato a nevicare? (C3.14)

37. (Questo problema è un sottoinsieme di un altro problema) In presenza di una forza di attrito viscoso $\mathbf{F} = -\lambda\mathbf{v}$ una particella di massa m viene lanciata verso l'alto con velocità iniziale di modulo v_0. Determinare la massima altezza raggiunta rispetto al punto di partenza. Determinare inoltre la velocità alla quale la particella passa nuovamente dal punto di partenza, in particolare nel caso in cui v_0 è molto grande. Cosa significa *molto grande* in questo caso? (C5.3)

38. *** Ho un campo elettrico $\mathbf{E}$ e un campo magnetico $\mathbf{B}$ ortogonali. Una particella di carica q parte da ferma e su di essa agisce la forza elettrica $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}$ e la forza di Lorentz $\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Che forma assume la traiettoria? (*Soluzione*: è una Cicloide, basta saper risolvere la ODE $\ddot{y} = -y + c$)

39. !!! Una corda lunga l di massa m è distesa orizzontalmente su un tavolo eccetto per l'estremità che pende verticalmente per una lunghezza x_0. In presenza di gravità, come evolve il sistema? (C5.17)

40. Su un oscillatore armonico (massa m e costante elastica k) agisce una forza esterna che cresce nel tempo secondo la legge $F = \alpha t$. È possibile assegnare delle condizioni iniziali a $t = 0\,\mathrm{s}$ in modo tale che la massa si muova di moto uniforme? Trovare la soluzione generale dell'equazione del moto. (C5.18)

41. Su un oscillatore armonico (massa m e costante elastica M) agisce una forza esterna che cresce nel tempo secondo la legge $F = \alpha t^2$. È possibile assegnare delle condizioni iniziali a $t = 0\,\mathrm{s}$ in modo tale che la massa si muova di moto uniformemente accelerato? Trovare la soluzione generale dell'equazione del moto. (C5.19)

42. * Un punto materiale si muove su una guida parabolica di equazione $y = -ax^2$. È possibile che il punto si stacchi dalla guida? (*Suggerimento*: usare la formula per il raggio di curvatura (farsela dire se non la si è calcolata) e la conservazione dell'energia).

43. ! Esprimere il periodo di un pendolo come integrale. Calcolare la correzione al prim'ordine (Suggerimento: scrivere l'equazione della conservazione dell'Energia, esplicitare dt, integrare dt)

44. Una scodella di massa M e sezione S può muoversi liberamente su un piano orizzontale senza attrito. Su di essa cade della pioggia: ciascuna goccia all'arrivo sulla scodella ha una velocità orizzontale $V_x > 0$ e una verticale $V_y < 0$. Inoltre la massa di acqua che arriva su una superficie S fissa sul terreno è costante e vale Γ. Supponendo che la pioggia raccolta dalla scodella rimanga in quiete rispetto ad essa, e che questa si inizialmente ferma, studiarne il moto. Trascurare l'effetto dell'urto della pioggia sulle superfici laterali della scodella. (C5.88)

45. Un proiettile di massa m viene lanciato da terra con una velocità iniziale di modulo v_0 che forma un angolo θ rispetto all'orizzontale. Oltre a un campo di gravità costante è presente una forza di attrito viscoso $\mathbf{F} = -\gamma\mathbf{v}$. Trovare l'equazione esplicita della traiettoria, e discutere il limite nel quale si può considerare "piccolo" l'attrito, dicendo in modo preciso che cosa si intende con questo. (C5.128)

46. (Questo problema in realtà non è molto buono...) Su un nastro trasportatore mantenuto in movimento a velocità costante v_C viene depositata continuamente della sabbia. La massa di sabbia che si deposita per unità di tempo è costante e pari a $dm/dt = \gamma$. Calcolare la potenza del motore necessaria a mantenere la sabia in movimento. (C5.132)

47. * ! L'equipaggio di un razzo inizialmente fermo vuole aumentare la propria velocità espellendo una massa ηm di gas. La velocità del gas al momento dell'emissione relativa al razzo è sempre $-v_0$. La massa iniziale di quest'ultimo è m e chiaramente $0 \leq \eta < 1$. Indicheremo con $\mu(t)$ la massa espulsa al tempo t. Calcolare $\mu(t)$ nei due casi seguenti:

    (i) tutta la massa viene espulsa istantaneamente a $t = 0\,\mathrm{s}$;

    (ii) la massa espulsa per unità di tempo è costante, e viene espulsa tutta in un tempo τ.

    Dette v_f^1 e v_f^2 le velocità finali del razzo nel primo e nel secondo caso, stailire se è vero che $\lim_{\tau \to 0} v_f^{(1)} = v_f^{(2)}$. (C5.133)

48. * !!! Consideriamo un oscillatore armonico forzato, senza attrito, con una forzante $F = F_0 \cos \omega t$, e sia ω_0 la frequenza naturale dell'oscillatore. Come ci si aspetta che sia la soluzione, qualitativamente? Claimare la soluzione e verificare che soddisfa l'equazione differenziale.

49. ** !!! Una *molla massiva* può essere pensata come tante masse infinitesime separate da molle infinitesime identiche. Indichiamo con x una coordinata che varia da 0 a 1 e che conta la percentuale di masse infinitesime che distano da un capo della corda. Se la molla massiva viene appesa in verticale al capo con $x = 0$, trovare:

    (i) la tensione in funzione di x.

    (ii) l'altezza $h(x)$ in funzione della coordinata x

    (iii) l'allungamento totale della molla e la sua lunghezza. (C5.139)

50. Una curva piana senza attrito ha la forma di una funzione i cui estremi sono alla stessa altezza. Una catena di densità lineare uniforme viene adagiata sulla curva da un estremo all'altro. Mostrare, considerando la forza netta di gravità sulla curva, che la catena non si muove. (M1.3)

51. * !! Data un'asta semi-infinita (cioè una semiretta) con densità lineare $\lambda(x)$ che dipende dalla posizione, calcolare $\lambda(x)$ in modo che abbia la seguente proprietà: se l'asta è tagliata in una posizione arbitraria x_0, allora la parte semi-infinita rimasta sarà in equilibrio se bilanciata su un perno a distanza fissata l dall'estremo (cioè nel punto a coordinata $x_0 + l$). (M1.18)

52. ** !!! Dire esplicitamente quali integrali bisogna fare per risolvere l'equazione $F = ma$ nei tre casi in cui F dipende solo da: (i) x, (ii) v, (iii) t. (M2)

53. * !!! Una palla viene lanciata in aria in verticale. L'attrito è $F = -\gamma v$. Trovare velocità e altezza in funzione del tempo. (M2) (Questo è bello perché non ci si deve confondere quando si trova il logaritmo di una quantità dimensionale...)

54. ! Una particella di massa m è soggetta alla forza $F(v) = -bv^2$. La posizione iniziale è 0 m, la velocità iniziale è 0 $\mathrm{m\,s^{-1}}$. Trovare $x(t)$. (M2.E9)

55. ! Una particella di massa m è soggetta alla forza $F(x) = -kx$. La posizione iniziale è 0 m, la velocità iniziale è 0 $\mathrm{m\,s^{-1}}$. Trovare $x(t)$. (M2.E10)

56. ! Una particella di massa m è soggetta alla forza $F(x) = +kx$. La posizione iniziale è 0 m, la velocità iniziale è 0 $\mathrm{m\,s^{-1}}$. Trovare $x(t)$. (M2.E11)

57. * Un motociclista vuole percorrere un cerchio di raggio R. Il coefficiente di attrito tra le ruote e il suolo è μ. Il motociclista parte da fermo. Qual è la minima distanza che il motociclista deve percorrere per ottenere la massima velocità possibile? (M2.E12)

58. ! Una particella di massa m è soggetta alla forza $F(x) = e^{-bt}$. La posizione iniziale è 0 m, la velocità iniziale è 0 $\mathrm{m\,s^{-1}}$. Trovare $x(t)$. (M2.9)

59. !!! Un razzo di massa m e a velocità v ha ugelli con velocità di scarico pari a u. Trovare l'equazione del razzo che mette in relazione la massa di carburante consumata e il Δv. Trovare la massa corrispondente a $\Delta v = 3u$.

60. * !!! *Strato di ghiaccio su un lago* Supponendo che la temperatura dell'aria sulla superficie di un lago ghiacciato rimanga costantemente pari a $-5,2$ gradi centigradi per 60 giorni, si formuli un modello per descrivere la rapidità con cui cresce lo spessore del ghiaccio a partire dal suo valore iniziale $h_0 = 25cm$. Sapendo, in particolare, che dopo 12 giorni si misura uno spessore di $37cm$ e dopo 21 giorni uno spessore di $44cm$, si stimi lo spessore h_f raggiunto dal ghiaccio dopo 60 giorni. (SNS 2015 1).

61. !!! La resistenza elettrica di un resistore a due piastre vicine è $R = \frac{l}{S\sigma}$ dove σ è la conducibilità. La capacità di un capacitore a due piastre vicine è $C = \frac{S\epsilon}{l}$ dove ϵ è la costante dielettrica del materiale. Se due conduttori con carica $+Q$ e $-Q$ rispettivamente sono immersi in un materiale con conducibilità σ e costante dielettrica ϵ, trovare $Q(t)$ sul primo conduttore. Cosa si può dire sul prodotto RC indipendentemente dalla forma del conduttore?

62. !!! Calcolare l'energia potenziale posseduta da una corda di lunghezza l e massa per unità di lunghezza ρ appesa per un estremo al soffitto.

63. *** !!! Calcolare il tempo impiegato da un onda a propagarsi sulla corda dell'esercizio precedente, partendo dall'estremo più alto a quello più basso.

64. * !!! Un corpo è soggetto a una forza di attrito che in modulo è pari a $F = bv^n$, dove v è la velocità e b un'opportuna costante. Esso viene lanciato con una velocità iniziale pari a v_0; trova, **attraverso l'analisi dimensionale**, una stima del tempo impiegato a fermarsi e della distanza che ha percorso dal punto di lancio. Il risultato ha senso? Rispondere alle domande precedenti *per bene* (trovando l'equazione del moto) e poi si confrontino i risultati.

65. * !!! *Molla massiva.* Si vuole trattare approssimativamente l'effetto della massa non nulla μ di una molla sulla frequenza di oscillazione. Per fare

questo si scrive l'energia del sistema supponendo che la molla si muova nello stesso modo in cui si muoverebbe se la sua massa fosse nulla. Usando tale metodo si determini la frequenza di oscillazione del sistema dato dal soffitto a cui è appesa la molla alla quale è appesa un oggetto di massa M, supponendo la molla di lunghezza a riposo nulla (C5.43).

66. *** ! Ricavare l'equazione del telegrafista. Si schematizzi la seguente situazione: vi sono due cavi paralleli molto lunghi. A ogni passettino $\mathrm{d}x$, vi è una resistenza $r\mathrm{d}x$ sul primo cavo, un'induttanza $l\mathrm{d}x$ sul primo cavo, una capacità $c\mathrm{d}x$ tra i due cavi e, in parallelo a questa, una resistenza tra i due cavi di conduttanza $g\mathrm{d}x$ (la conduttanza è la grandezza fisica reciproca della resistenza. Perché in questo caso si usa la conduttanza secondo voi?). Ricavare l'ODE soddisfatta dalla corrente e quella soddisfatta dalla tensione.

67. IphO 2014, problema 3.

68. IphO 2006/2007 (?), problema sull'amplificatore lock-in.

2.7 Derivate e Integrali

69. Calcolare $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$. (*Suggerimento*: dove avete già visto questa espressione?)

70. !! Usare l'integrazione per parti per dimostrare l'utile formula ricorsiva

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{nx}\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \cos^{(n-2)x}\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

Dimostrare che funziona anche con i seni e anche da 0 a π. Calcolare il valore per $n = 8$. Calcolare poi $\int_0^{\pi/2} \cos 5\theta\,\mathrm{d}\theta$. (*Suggerimento*: usare de Moivre)

71. !! Usare l'integrazione per parti per dimostrare la formula

$$x! = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^x\mathrm{d}t$$

Tale espressione è la *funzione Gamma di Eulero*. Calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$. (*Suggerimento*: ricondursi a $(-1/2)!$ con un cambio di variabili)

72. * !!! Ridimostrare il valore della funzione Gamma di Eulero usando l'integrazione parametrica: per calcolare $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^x\mathrm{d}t$ calcolo $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}t^x\mathrm{d}t$ e derivo per α trovando così una formula ricorsiva.

73. !!! Ricalcolare $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$ in questo modo: calcolare I^2 (l'integrale di una gaussiana in due dimensioni) e passare in coordinate polari.

74. !!! Scrivere $\sin(\alpha)$ e $\cos(\alpha)$ in funzione di $t = \tan(\frac{\alpha}{2})$. Questa è la sostituzione che permette di risolvere molti integrali trigonometrici.

75. ** !!! A volte, invece, serve trasformare integrali polinomiali o con radici quadrate in integrali trigonometrici in seni e coseni (o seni e coseni iperbolici). Ad esempio, cosa vi ricordano i seguenti integrali?, quanto valgono?

(i) $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(a^2-u^2)}}$

(ii) $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u^2-a^2)}}$

(iii) $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u^2+a^2)}}$

(iv) $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(-u^2-a^2)}}$

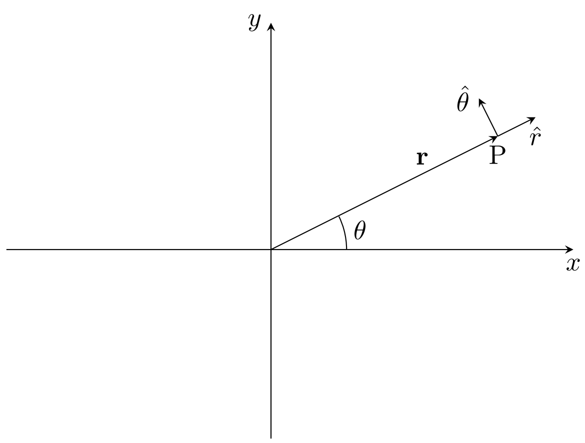
(v) $\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2}$

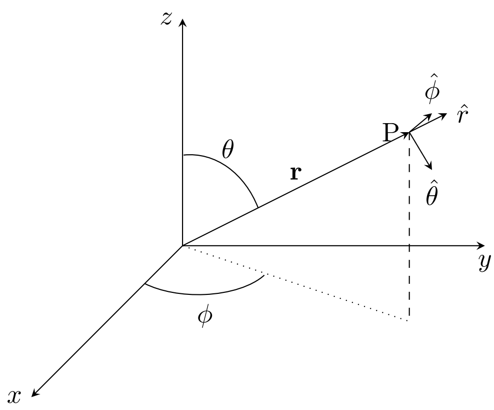
(vi) $\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2-u^2}$

76. * !!! Dimostrare il seguente lemma, molto utile in termodinamica: data una qualche relazione tra le quantità x, y e z (ad esempio, del tipo $f(x, y, z) = 0$), si ha

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z$$

2.8 Calcolo sui Vettori, per Meccanica





77. * ! Scrivere i versori delle *coordinate polari* $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ e trovare $\dot{\hat{r}} = \frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t}$ e $\dot{\hat{\theta}} = \frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t}$. Dato un vettore generico espresso in coordinate radiali, $\mathbf{r} = r\hat{r}$, calcolare $\dot{\mathbf{r}}$ e $\ddot{\mathbf{r}}$. Fare lo stesso in *coordinate sferiche* (*Suggerimento*: le derivate agiscono sia sulle componenti sia sui versori!).

78. * ! Se un sistema di riferimento di versori $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$ ruota con velocità angolare ω, quanto vale la derivata temporale dei versori? E di un vettore generico? (*Suggerimento*: guardare lo spostamento infinitesimo).

79. * !!! Usare quanto appena scoperto per ricalcolare le derivate dei versori in polari. Usarlo anche per le sferiche: una rotazione che cambia ϕ a quale vettore ω corrisponde? A che raggio corrisponde? Qual è l'accelerazione centripeta corrispondente?

2.9 Avanzati

80. * !! La *catenaria* è la funzione che rappresenta la disposizione di una corda massiva inestensibile (con $\lambda = dm/dx$ costante) i cui due capi sono appesi a due muri, ad altezze non necessariamente uguali. Usando gli infinitesimi, trovare l'equazione della catenaria (*Suggerimento*: guardare la forza che agisce su un piccolo tratto infinitesimo. Una delle componenti della forza è costante su tutta la corda.)

81. ** *Operatori (I parte).* Immaginiamo che α e β siano due operatori, cioè "numeri" che non commutano. Essi possono essere moltiplicati con scalari e restano operatori. Essi sono indipendenti da t a meno che non sia indicato esplicitamente. Risolvere i seguenti quesiti:

    (i) $(\alpha + \beta)^2$.

    (ii) Dire se è vero che $e^{\alpha}e^{\beta} = e^{\alpha\beta}$ e perché.

    (iii) Dire se la derivata di un operatore è un operatore (sì, dovreste saperlo).

    (iv) Calcolare $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha(t)\beta(t))$ usando gli infinitesimi.

82. *** *Operatori (II parte).*

    (v) Calcolare $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\alpha t}$ usando le serie infinite.

(vi) Calcolare $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\alpha(t)}$ come serie infinita.

(vii) Rifare il conto usando la definizione di esponenziale come $e^x = \lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{x}{N}\right)^N$ e vedere se si trova lo stesso risultato.

(viii) Calcolare $e^{\alpha t}\beta e^{-\alpha t}$.

(ix) Definendo $\hat{\alpha}$ come un operatore tale che $\hat{\alpha}\beta = \alpha\beta - \beta\alpha$. Notare che $e^{\alpha t}\beta e^{-\alpha t} = e^{\hat{\alpha}}\beta$.

(x) Provare a rifare il punto (vi) seguendo questo approccio:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\alpha(t)} = e^{\alpha(t)}e^{-\alpha(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\alpha(t)} = e^{\alpha(t)}e^{-\hat{\alpha}(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \dots$$

(*Soluzione*: $\frac{\mathrm{d}e^{\alpha(t)}}{\mathrm{d}t} = e^{\alpha(t)}\frac{1-e^{-\hat{\alpha}(t)}}{\hat{\alpha}(t)}\dot{\alpha}(t)$)

83. ** ! Si consideri una curva parametrizzata da λ. A ogni punto $(x(\lambda), y(\lambda))$ consideriamo un segmento tangente dello stesso verso di $(\dot{x}(\lambda), \dot{y}(\lambda))$, lungo $l(\lambda)$. Il *Teorema di Mamikon* afferma che l'area spazzata da questo segmento (di cui un estremo è sempre sulla curva) è uguale all'area spazzata dallo stesso segmento, con uguale direzione e verso, ma di cui l'estremo è tenuto fisso. Dire:

(i) Perché questo teorema è vero guardando i triangolini infinitesimi.

(ii) Calcolare l'area dell'anello circolare in cui la tangente alla circonferenza interna interseca la circonferenza esterna in due punti a distanza $2a$

(iii) Calcolare l'area sottesa dalla cicloide. (*Soluzione*: $3\pi r^2$)

(iv) Un bambino si trova nell'origine $(0, 0)$ e tiene in mano un laccio inestensibile in tensione legato a una macchina giocattolo a $(a, 0)$. Il bambino cammina verso $(0, +\infty)$. L'area spazzata diverge? Se no, quanto vale?

84. ** Trovare l'equazione della curva tracciata dal giocattolo nel punto (iv) del problema precedente. Tale curva prende il nome di *Trattrice*. Calcolarne l'area sottesa e verificare se è uguale al valore trovato con i triangolini infinitesimi (*Soluzione*: su wikipedia).

85. * !! Definamo la *Trasformata di Fourier* di $f(x)$ come la seguente funzione in ω:

$$F[f(x)](\omega) = \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}f(t)\mathrm{d}t$$

Si noti come da una funzione in x ottengo dunque una funzione in ω, che non dipende più da x. Calcolare:

(i) $F[e^{i\alpha}f(x)](\omega)$.

(ii) $F[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)]$.

(iii) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F[f(x)](\omega)$.

(iv) La trasformata di Fourier di una funzione che vale 1 nell'intervallo tra -1 e 1, e 0 fuori da quell'intervallo (*funzione rettangolo*).

86. !!! Si consideri $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} f(t)\mathrm{d}t$, con $f(x)$ continua e con un integrale finito. Quale ci si aspetta che sia il valore dell'integrale nel limite $\omega \to +\infty$? Spiegare visivamente.

87. * !!!

    (i) Calcolare $\lim_{\epsilon\to 0} \frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}$ e descrivere qualitativamente cosa succede al grafico della funzione (considerandola come una funzione di x).

    (ii) Calcolare $\lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}$.

    (iii) Descrivere qualitativamente cosa succede al grafico di $\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}$ quando si manda ϵ a 0.

    (iv) Calcolare, ragionando visualmente, $\lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2} f(x)dx$ dove $f(x)$ è una funzione qualunque (*Nota*: vedere il problema successivo).

88. ! Definiamo $\delta(x)$ come una *gaussiana* di area 1 e di ampiezza infinitesima. Ragionando visivamente, capire perché $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f(x)dx = f(0)$

89. ! Usando l'integrazione per parti, dimostrare che $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x)f(x)dx = -f'(0)$

90. ! Più in generale calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(x)f(x)dx$

91. ** Una molla massiva fa piccole oscillazioni in verticale. Considerandola come tante masse infinitesime separate da molle infinitesime identiche, ricavare l'equazione differenziale che descriva l'evoluzione nel tempo di questo sistema (Essa sarà l'*equazione delle onde*).

92. ** !! Consideriamo il seguente modello per la *diffusione del calore* in un materiale: lo spazio è una griglia cubica, e ciascun vertice ha una quantità di calore Q. A un passo infinitesimo dt questo calore viene distribuito equamente tra le sei celle adiacenti. Ricavare l'*equazione del calore* (*Suggerimento*: provare prima il caso analogo unidimensionale, con punti equispaziati invece che una griglia cubica. Tra l'altro, ricordate la definizione qualitativa del Laplaciano).

93. * !!! Sapendo quando vale la Funzione Gamma di Eulero trattata nei problemi precedenti, espanderla al second'ordine attorno al suo punto di massimo (trovatelo!), ottenendo

$$\int_0^{+\infty} e^{-n+n\ln t-\frac{(t-n)^2}{2n}} t^x \mathrm{d}t.$$

    Riconoscendo l'integrale della *Gaussiana*, trovare l'*approssimazione di Stirling* $n! \approx \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$.

94. ** ! Volume dell'*ipersfera n-dimensionale*. Denotando sempre con

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

    scrivere I^n e mettersi in coordinate polari (ovvero distinguere l'integrale sul raggio dall'integrale sulle superfici $(n-1)$-dimensionali delle ipersfere

n-dimensionali). In questo modo è possibile trovare quanto vale la superficie $(n-1)$-dimensionale, e quindi quanto vale il volume n-dimensionale dell'ipersfera. (*Soluzione*: $V_n(R) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} R^n}{(\frac{n}{2})!}$)

95. *** La *funzione Beta di Eulero* è definita come

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t.$$

Dimostrare con un cambio di variabili che è uguale a

$$2\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}\theta \cos^{2x-1}\theta \mathrm{d}\theta.$$

Poi, dimostrare che $\frac{(x-1)!(y-1)!}{(x+y-1)!} = B(x,y)$. (*Suggerimento*: (i) partire da $(x-1)!$ e $(y-1)!$ espressi come Gamma di Eulero con variabili d'integrazione t e t', (ii) fare il cambio di variabili da t ad $a = t^2$ e da t' a $b = t'^2$, (iii) considerare l'integrale doppio in a e in b come un integrale sul piano, e passare in coordinate polari)

96. * Provate a fattorizzare $\sin(x)$ come se fosse un polinomio (dopo tutto sapete dove sono i suoi zeri e sapete che molteplicità hanno). Che problemi ha questa espressione? Cambiatela in modo che ogni fattore vada a 1 quando $x = 0$.

97. *** Dimostrate la formula trovata nel punto precedente lavorando prima con $\sinh(x)$:

    (i) Espandere $\sinh(x)$ usando la definizione di esponenziale come $\left(1 + \frac{x}{N}\right)^N$

    (ii) Usare che

    $$(a-b)^N = (a-b)(a^2+b^2-2ab\cos(1\cdot\theta))\dots(a^2+b^2-2ab\cos((N-1)\theta))$$

    dove $\theta = \frac{2\pi i}{N}$ ed esprimere quindi $\sinh(x)$ come produttoria (prendete N dispari per poter fare questa cosa).

    (iii) In questa produttoria, all'inizio θ è piccolo, mentre alla fine $\theta \approx 1$. Spezzare la sommatoria in una prima parte, dove si approssima il coseno usando che θ è piccolo, e una seconda parte, che *non dipende da x*, e che chiameremo B.

    (iv) Dai conti scoprite che viene proprio quello che vi aspettavate, a meno di un altro fattore che non sapete quanto vale ma che non dipende da x. Chiamatelo A.

    (v) Dimostrate che $AB = 1$ approssimando la funzione al prim'ordine e imponendo che faccia x.

98. Guardare il terzo ordine dell'espansione di $\sin(x)$ dell'esercizio precedente. Concludere che $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$ (*Problema di Basilea*).

3 Ringraziamenti

Ringrazio particolarmente Alessandro Piazza e Giuseppe Bogna per l'aiuto nella correzione della bozza di questo lavoro.
Più in generale ringrazio per i suggerimenti e per l'incoraggiamento gli altri ragazzi dello stage e i miei compagni d'università.
Mi scuso per gli errori che inevitabilmente avranno eluso le correzioni.
Confido che queste dispense siano utili, interessanti e divertenti.

Paolo Tognini

Riferimenti bibliografici

[1] David Morin, *There once was a Classical Theory* [M]

[2] James Nearing, *Mathematical Tools for Physics* [MTP]

[3] Giancarlo Cella, *Un Esercizio al Giorno* [C]

1 Soluzioni

1.1 Legenda

Il simbolo * indica il livello di difficoltà.
Il simbolo ! indica quanto mi pare buono il problema.
(purtroppo per i problemi di Fisica mancano spesso entrambi i simboli...)

1.2 Basic

1. !!! $\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}$

2. ! $2\pi R\mathrm{d}h$

3. ! $\sqrt{2}/12$

4. ! Si può partire da un quadrato inscritto in un cerchio: il rapporto perimetro/raggio è 4. Ora disegnare l'ottagono inscritto nel cerchio ma "circoscritto" al quadrato (i vertici del quadrato sono vertici anche dell'ottagono). Ogni lato si è "spezzato" in due, leggermente più lunghi. Il fattore di cui ogni lato si è allargato è $1/\cos(\theta)$ con θ l'angolo di cui è ruotato il lato del quadrato per formare uno dei lati dell'ottagono. Calcolare questi coseni invertendo la formula $\cos(2\theta) = 2\cos(\theta)^2 - 1$. Il rapporto perimetro/raggio è 2π.

5. ! $z = 2\pi i$. Se $z = re^{i\theta}$ con r reale allora $\ln z = \ln r + i\theta + 2\pi ik$ con k un arbitrario numero intero.

6. !!! n/x; 1; $1 + \frac{1}{(1+x^2)arctanx} + cot(x) - \frac{4}{x} - \frac{1}{x\ln x}$. La derivata classica si ottiene moltiplicando per la funzione originaria.

7. !!! $\frac{a^{\mathrm{d}x}-1}{\mathrm{d}x} = \frac{e^{\ln(a)\mathrm{d}x}-1}{\mathrm{d}x} = \frac{e^{\ln(a)\mathrm{d}x}-1}{\ln(a)dx}\ln(a) = 1\ln(a) = \ln(a)$

8. ! $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{x\ln(x)} = e^{x\ln(x)}(\ln(x)+1)$;
$[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^y + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}x^y]_{x=y} = [x^y\frac{y}{x} + x^y\ln(x)]_{x=y} = x^x + x^x\ln(x)$

9. !!! La resistenza di un cilindro infinitesimo lungo $\mathrm{d}x$ e di raggio r è $\varrho\mathrm{d}x\pi r^2$. Integrando per l'altezza h del cilindro (che non ho segnato tra i dati, ma deve essere considerato come noto) si ottiene $\varrho\mathrm{d}x\pi r^2$
Si noti come l'integrale corrisponde alla somma di infinite resistenze infinitesime in serie. Questo è vero perché le superfici equipotenziali sono all'incirca ortogonali all'asse del tronco di cono. Se b è sensibilmente più grande di a, questo non è vero: ci si attende che le superfici equipotenziali siano curve (si consideri il caso limite della base maggiore che va all'infinito e della base minore puntiforme. Si ha la corrente che esce dalla base minore e si diffonde in modo radiale: le superfici equipotenziali sono calotte sferiche).

10. $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ ha come modulo la superficie della base del parallelotopo. Chiamando θ l'angolo tra $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ e $\mathbf{a}$, si vede che si ha $\mathbf{a}\cdot|\mathbf{b}\times\mathbf{c}| = \pm a\cos(\theta)|\mathbf{b}\times\mathbf{c}| = \pm h|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|$, dove $h = a\cos(\theta)$ è l'altezza del parallelotopo. Quindi si ottiene il volume del parallelotopo
Il segno è positivo se a, b, c sono una terna destrorsa (cioè se posso ricavare

c da a, b usando la regola della mano destra).
Ora bisogna accorgersi che le altre equazioni esprimono tutte il volume del parallelotopo (badando al segno corretto).

11. Il prodotto vettore è un operatore lineare, cioè $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, e $\mathbf{a} \times k\mathbf{b} = k\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ con k un numero reale.
Si calcoli il prodotto vettore tra i versori $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$, che sono i vettori di lunghezza 1 rivolti come gli assi cartesiani.
Ora, scomponendo i due vettori lungo gli assi, si ha $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_x\mathbf{x} + a_y\mathbf{y} + a_z\mathbf{z}) \times (b_x\mathbf{x} + b_y\mathbf{y} + b_z\mathbf{z}) = ... = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{x} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{y} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{z}$, dove si sono usati i prodotto vettoriali tra i vettori rivolti lungo gli assi cartesiani.
Ora si dimostri che la formula "bac meno cab" è vera se si guarda solo la componente x. Ci si accorda che, ciclando le variabili (cioè mandando x in y, y in z, z in x), la dimostrazione appena fatta vale anche per la componente y e per la componente z.

12. !!! La definizione di derivata impone che $\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \frac{(\mathbf{a}+\mathrm{d}\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}+\mathrm{d}\mathbf{b}) - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathrm{d}\mathbf{b}+\mathrm{d}\mathbf{a}\cdot\mathrm{d}\mathbf{b}}{dt} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}\cdot\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}t}$, dove si è correttamente eliminato l'ultimo termine perché è infinitesimo.
Il calcolo con il prodotto vettore è uguale, solo che al posto dei prodotti scalari ci sono i prodotti vettori.
Si notino le cose importanti: (1) la derivata di un vettore è un vettore, perché per fare la derivata bisogna fare una differenza e poi una divisione per un numero, (2) le operazioni di prodotto scalare e prodotto vettoriale sono lineari, cioè "si comportano bene" con la somma.

13. * !!! Sulle prime due equazioni bisogna sostituire le definizioni di seno e di coseno coi numeri complessi. Sulla terza e sulla quarta si possono riciclare le prime due: ad esempio per la terza si ha $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)} = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$, dove nell'ultimo passaggio si è diviso sopra e sotto per $\cos(\alpha)\cos(\beta)$.
La quinta e la sesta sono uguali alla settima e all'ottava, se solo si cambiano i nomi degli angoli e si scambiano i due lati dell'equazione.
La settima si trova dalla prima: se si sommano $\sin(\alpha + \beta)$ e $\sin(\alpha - \beta)$ calcolati con la prima equazione (ricordando che $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ e che $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$), si ottiene $2\sin(\alpha)\sin(\beta)$. Si divida per 2.
L'ottava si trova dalla seconda allo stesso modo.
La nona si ottiene dalla seconda allo stesso modo, concentrandosi sul termine $\sin(\alpha)\sin(\beta)$. Nella decima bisogna usare la definizione del coseno coi numeri complessi, notando che si ottiene la serie geometrica $e^{inx} + e^{i(n-1)x} + ... + e^{-inx} = e^{inx}(1 + e^{-inx} + ... + e^{-i2nx}) = e^{inx}\frac{1-e^{-i(2n+1)x}}{1-e^{-inx}} = \frac{e^{i(n+1/2)x}-e^{-i(n+1/2)x}}{e^{inx/2}-e^{-inx/2}} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$, ricordando la definizione del seno coi numeri complessi.
L'undicesima si trova usando De Moivre: $\cos(3x) + i\sin(3x) = (\cos(x) + i\sin(x))^3$. Prendendo solo le parti immaginarie di ambo i membri, e semplificando le i, ottengo: $\sin(3x) = 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x) = 3(1 - \sin^2(x))\sin(x) - \sin^3(x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$. Esplicitando il termine di interesse si ottiene $\sin^3(x) = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$

1.3 ODE e PDE

14. $\omega_0^2 y + \ddot{y} = 0$ ha come soluzione $y = e^{\pm i\omega_0 t}$, così come visto a lezione.
Per trovare y da $(\omega_0^2 + \mathrm{D}^2)y = fx^5$ viene spontaneo portare nel lato destro il membro di parentesi, invertito, ottenendo $y = \frac{1}{\omega_0^2+\mathrm{D}^2} fx^5$, che ha senso solo se si interpreta la frazione come una serie di potenze, cioè $\frac{1}{\omega_0^2+\mathrm{D}^2} fx^5 = \frac{1}{\omega_0} \frac{1}{1+(\mathrm{D}/\omega_0)^2} fx^5 = \frac{1}{\omega_0}(1-(\mathrm{D}/\omega_0)^2+(\mathrm{D}/\omega_0)^4-(\mathrm{D}/\omega_0)^6+...)fx^5 = \frac{f}{\omega_0}(x^5 - 20x^3/\omega_0^2 + 120x/\omega_0^4)$ poiché tutti gli altri termini fanno zero.
Può sembrare assurdo usare un metodo simile quando D non è un numero, eppure esso diventa un numero dopo essere stato applicato a fx^5. Inoltre l'approssimazione di $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$ funziona solo quando a destra si sommano termini via via sempre più trascurabili: in questo caso D, agendo su fx^5, diventa in effetti trascurabile (in particolare nullo), quindi la formula è valida.
Ciò che fuga ogni possibile dubbio è comunque verificare che la soluzione trovata in effetti sia una soluzione dell'equazione di partenza.
La nota era riferita al fatto che quando si porta il termine con D a destra, bisogna tenerlo a destra (affinché la derivata agisca su fx^5), altrimenti non funziona. Il motivo è che quel passaggio si ottiene mettendo, sulla sinistra di ambo i membri, il fattore $\frac{1}{\omega_0^2+\mathrm{D}^2}$, che si semplifica con $\omega_0^2 + \mathrm{D}^2$ e che si ritrova quindi sul lato destro, ma a sinistra di fx^5.

15. L'equazione è $4y + \ddot{y} = \sin(2t)$. Si provi $y = (At + B)\sin(2t) + (Ct + D)\cos(2t)$ (l'unica frequenza che compare nell'equazione è 2!, quindi mi aspetto che sia anche la frequenza della soluzione!). Poiché posso sommare o sottrarre le soluzioni dell'omogenea associata $4y + \ddot{y} = 0$, ovvero $\sin(2t)$ e $\cos(2t)$, è chiaro che posso porre $B = D = 0$. La domanda è quanto valgono A e B.
Provo a inserire la soluzione nell'ODE. Facendo infiniti conti si trova $y = -\frac{1}{4}t\cos(2t)$. A questa soluzione particolare è possibile sommare una soluzione dell'omogenea, e si trovano altre soluzioni. La soluzione più generale è dunque $y = -\frac{1}{4}t\cos(2t) + A\sin(2t) + B\cos(2t)$. Come atteso le costanti arbitrarie sono due.

16. (*Soluzione*: una delle due soluzioni è $1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{1*4x^6}{6!} + \frac{1*4*7x^9}{9!} + \dots$) (MTP4.20)

17. (*Soluzione*: $y = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{48}x^4 + \frac{1}{192}x^5 \dots$) (MTP4.57)

18. Non ho mai fatto i conti. (MTP4.58)

19. !!! $y = \pm\sqrt{4 + ce^{-x^2}}$

20. * !!! $x(t) = Rt - R\sin t$ e $y(t) = R - R\cos t$. Ricavando $\cos t$ dalla seconda equazione, si calcolano $\sin t$ e t e li si inseriscono nella prima equazione, ottenendo $x = -\sqrt{y(2R - y)} + R\arccos(1 - y/R)$
(Soluzione: $\dot{y} = \frac{2R}{y} - 1$)

21. * !!! Una funzione che si propaga a velocità costante $\pm c$ si può scrivere come $f(x \mp ct)$, con $f(x)$ funzione arbitraria. La soluzione generale è dunque $Af(x + ct) + Bg(x - ct)$, con f e g funzioni arbitrarie.

1.4 Volumetti Infinitesimi

22. !!! *Formule di Pappo* Un segmento dl a distanza r dall'asse di rotazione genera un'area $2\pi r \mathrm{d}l$ (il fatto che non tutto il segmento è alla stessa distanza dall'asse di rotazione genera correzioni di second'ordine, che quindi si trascurano). L'integrale di $r\mathrm{d}l$ sulla superficie è uguale al valore medio di r per la lunghezza del contorno ($r_{medio} = \int r\mathrm{d}l / \int \mathrm{d}l$ per definizione).
    Allo stesso modo per il volume: una superficie dS che giace su un piano che viene fatto ruotare genera una superficie $2\pi r \mathrm{d}S$, dove r è la distanza di dS dall'asse di rotazione. L'integrale è $2\pi r_{medio} S$, dove $r_{medio} = \int r\mathrm{d}S / \int \mathrm{d}S$.
    Il toro che si ottiene facendo ruotare una circonferenza di raggio r attorno a un asse che dista R dall'origine della circonferenza, ha superficie $4\pi^2 Rr$ e volume $2\pi^2 Rr^2$.
    Il toro che si ottiene facendo ruotare un rettangolo di lati a e b attorno a un asse che dista R dal baricentro del toro, ha volume $2\pi abR$.
    La resistenza di un toro rettangolare di base b e di altezza h (quest'ultima parallela all'asse di rotazione) è $\frac{2\pi\rho}{hln(b/a)}$: è formata da tante fettine di torta messe in serie (ottenute con tagli radiali), ciascuna delle quali è formata da tante resistenze di forma curva messe in parallelo (ottenute con tagli tangenziali), ciascuna delle quali ha resistenza $\rho l/S$, con l e S infinitesimi e che potete calcolarvi dai dati.

23. ** !! L'idea è di considerare l'espansione al second'ordine $y(x) = y(0) + x\dot{y}(0) + \frac{1}{2}x^2\ddot{y}(0)$. Ora considero i tre punti di ascisse x, $x + dx$ e $x + ddx$, e li collego con due segmenti, che approssimano la funzione. Posso calcolare ora le equazioni degli assi dei due segmenti, e poi calcolare il punto dove le rette si intersecano. Questo è il centro della circonferenza che, vicino a (x, y), approssima al meglio la funzione (può anche essere una circonferenza degenere, cioè una retta). Il raggio di curvatura è il raggio di questa circonferenza, che dai conti viene $R = \frac{(1+\dot{y}^2)^{3/2}}{|\ddot{y}|}$.

24. * !!! La pagina di wikipedia sul Momento d'Inerzia è esauriente.
    L'insieme di Cantor si può ottenere così: si prenda un segmento lungo l a cui si sottrae il terzo centrale, ottenendo due segmenti uguali lunghi $l/3$. A ciascuno di questi si sottragga il loro terzo centrale, e così via per ogni segmento che si ottiene.
    Se si immagina che l'insieme di Cantor abbia massa m, si vede che facendolo ruotare attorno al centro, e immaginando che sia rigido, esso ha momento di inerzia aml^2, dove a è un numero reale ignoto. Si sa anche che è uguale al momento d'inerzia di due sbarre decentrate, per cui si può applicare il teorema degli assi paralleli: quindi $aml^2 = 2(a(m/2)(l/3)^2 + (m/2)(l/3)^2)$, da cui si ottiene $a = \frac{1}{8}$.

1.5 Ordini e Limiti

25. !!! (*Soluzione*: $y = -x - x^5 + 5x^9 - 15x^{13} + O(x^{17})$)

26. !!! $e^{x^2+\alpha x} = e^{x^2}e^{\alpha x} = 1 + \alpha x + (1 + \frac{\alpha^2}{2!})x^2 + (\alpha + \frac{\alpha^3}{3!})x^3 + (\frac{1}{2!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!})x^4 + (\frac{\alpha}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!})x^5 + (\frac{1}{3!} + \frac{\alpha^2}{2!2!} + \frac{\alpha^4}{4!} + \frac{\alpha^6}{6!})x^6 + o(x^6)$.

27. !!! $e^{x^2+\alpha x} = e^{x^2}(1+\alpha x+\frac{1}{2}\alpha^2x^2+\frac{1}{3}\alpha^3x^3+\frac{1}{4}\alpha^4x^4+\frac{1}{5}\alpha^5x^5+\frac{1}{6}\alpha^6x^6+o(\alpha^6))$

28. !!! $\frac{1}{\sqrt{1-2x\cos\theta+x^2}} = 1+\cos(\theta)x+(\frac{3}{2}\cos^2(\theta)-\frac{1}{2})x^2+o(x^3)$. Bisogna ricordarsi che $(1+\epsilon)^\alpha = 1+\alpha\epsilon+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\epsilon+...$

29. !!! Sapendo che la derivata di $t=\tan(x)$ è uguale a $1+t^2$, si possono calcolare rapidamente le prime sei derivate della funzione e inserirle nell'espansione in Taylor (nell'espansione in Taylor le derivate vanno valutate in 0, quindi bisogna ricordars che $t(0) = tan(0) = 0$) ($\tan x = x + x^3/x + 2x^5/15 + 17x^7/315 + O(x^9)$)

30. !!! $\lim_{x\to 0} \frac{e^x \arctan x - \frac{\sin x \ln(1+x)}{x} + 3(\cos x - 1) + \tan(x^3)}{\sqrt{1-x^3} - \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}} = -1$

31. !!! $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}) = \frac{1}{3}$ (MTP2.15)

32. !!! Calcolare $\lim_{x\to 0}(\frac{2}{x} + \frac{1}{1-\sqrt{1+x}}) = \frac{1}{2}$ (MTP2.16)

33. !!! $\arcsin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1}$

34. !!! Per T alta e bassa si intende rispettivamente x basso e alto: x è un numero puro, quindi si intende confrontato rispetto a 1, il che è come chiedere che T sia confrontato con $\frac{\hbar\omega}{k}$, che tra l'altro è l'unica altra temperatura nelle equazioni...
Per T alto si ha $S \approx k(1-\log(x))$.
Per T basso si ha $S \approx k(xe^{-x} + e^{-x})$.

35. !!! In entrambi i casi il valore approssimato è $1+\alpha+\beta$. È vero che in un caso è $(1+\alpha)+\beta$ e nell'altro è $(1+\beta)+\alpha$ dando l'idea erronea che α sia piccolo rispetto a β, ma non ha senso lamentarsi per delle parentesi.

1.6 Fisica

36. !!! (C3.14)

37. (C5.3)

38. *** Prendiamo $\mathbf{E} = E\hat{x}$ e $\mathbf{B} = B\hat{z}$. L'equazione del moto $m\ddot{\mathbf{x}} = q\mathbf{E} + q\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}$ diventa il sistema di due equazioni:
(1) $\ddot{x} = \frac{qE}{m} + \frac{qB}{m}\dot{y}$
(2) $\ddot{y} = -\frac{qB}{m}\dot{x}$
Ora è possibile derivare la prima equazione e sostituire a destra $\ddot{y}$ con la seconda equazione: $\dddot{x} = -(\frac{qB}{m})^2\dot{x}$, da cui $\dot{x} = A\sin(\omega t)$, dove si definisce $\omega = \frac{qB}{m}$ (è un seno e non un coseno perché la velocità all'inizio è nulla per ipotesi).
Ora nella prima equazione possiamo calcolare $\ddot{x}$ e trovare agevolmente $\dot{y} = A\cos(\omega t) - \frac{E}{B}$. Imponendo che la velocità iniziale sia nulla si ottiene $A = \frac{E}{B}$.
Integrando $\dot{x}$ e $\dot{y}$ e imponendo che la posizione iniziale sia l'origine, si ottiene:
(1) $x = R(1-\cos(\omega t)$

(2) $y = R(\sin(\omega t) - \omega t)$
Effettuando la sostituzione $R = \frac{Em}{qB^2}$. Questa si vede essere l'equazione di una cicloide.

39. !!! (C5.17)

40. (C5.18)

41. (C5.19)

42. * Ovviamente c'è la gravità. Il punto si stacca non appena l'accelerazione gravitazonale ortogonale alla guida $g\cos(\theta)$ diventa minore dell'accelerazione centripeta di un'orbita circolare (che approssima localmente la traiettoria parabolica).
Sapendo che $\tan(\theta) = |\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}| = 2ax$, si trova $g\cos(\theta) = \frac{g}{\sqrt{1+\tan^2(\theta)}} = \frac{g}{\sqrt{1+4a^2x^2}}$, mentre l'accelerazione centripeta è $\frac{v^2}{R} = \frac{-2gy}{R} = \frac{-2gy|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{4ga^2x^2}{(1+4a^2x^2)^{3/2}}$. Imponendo l'uguaglianza tra le due accelerazioni si trova che nel punto in cui inizia a staccarsi vale $1 = \frac{4a^2x^2}{1+4a^2x^2}$ il che non si può verificare.

43. ! $T \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}(1 + \frac{\theta_{max}^2}{16})$, dove θ_{max} è l'angolo massimo raggiunto nelle oscillazioni.

44. (C5.88)

45. (C5.128)

46. (C5.132)

47. * ! (C5.133)

48. * !!! L'equazione del moto è $m\ddot{x} = -kx + F_0 cos(\omega t)$, ed è simile ad un'altalena alla quale venga applicata una spinta a una certa frequenza, che non è necessariamente la frequenza tipica dell'altalena $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Ci si aspetta, come su un'altalena, che il moto sia periodico con lo stesso periodo della forzante; dunque ω e non ω_0. Si prova dunque la soluzione $A\cos(\omega t)$ (ma anche $A\sin(\omega t)$ andrà bene).
Si ottiene $-mA\omega^2 cos(\omega t) = -kAcos(\omega t) + F_0 cos(\omega t)$, da cui $A = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}$. Si vede che se la forzante ha frequenza vicina alla frequenza di risonanza ω_0, l'ampiezza delle oscillazioni diventa molto alta.

49. ** !!! (C5.139)

50. (M1.3)

51. * !! (M1.18)

52. ** !!! (M2, nella parte di teoria)

53. * !!! (M2, nella parte di teoria)

54. ! (M2.E9)

55. ! (M2.E10)

56. ! (M2.E11)

57. * (M2.E12)

58. ! (M2.9)

59. !!! In un istante il razzo ha massa m ed è fermo nel suo sistema. Poi la massa del razzo cambia di dm (negativo) e viene eiettato dall'ugello $-\mathrm{d}m$ di carburante a velocità u rispetto al razzo. La conservazione della quantità di moto impone $0 = -\mathrm{d}m(-u) + (m + \mathrm{d}m)\mathrm{d}v$. Ignorando il differenziale di second'ordine si trova $\mathrm{d}v = -u\frac{\mathrm{d}m}{m}$, ed integrando $\Delta v = -uln(\frac{m_{fin}}{m_{in}}) = uln(1 + \frac{m_c}{m_0})$, dove m_c è la massa del carburante e m_0 è la massa finale, cioè del razzo che ha esaurito il carburante.
$\Delta v = 3u$ corrisponde a $m_c = m_0(e^3 - 1) \approx 19m_0$.

60. * !!! *Strato di ghiaccio su un lago* (SNS 2015 1) (si trova online).

61. !!! Poiché $V = R\dot{Q}(t)$ e $C = \frac{Q(t)}{V}$, si ha $\dot{Q}(t) = \frac{1}{RC}Q(t)$, e quindi $Q(t) = Q(0)e^{-t/RC}$. RC è dunque il tempo caratteristico della decrescita esponenziale (cioè il tempo in cui la carica diminuisce di un fattore e).
In un conduttore a forma di prisma, le cui facce sono le piastre del condensatore, Si vede bene che $RC = \frac{\epsilon}{\sigma}$.
Ora consideriamo un conduttore di forma arbitraria con due piastre di forma arbitraria. Posso dividere ogni piastra in tante aree infinitesime e per ciascuna di esse considerare il percorso che fa la corrente per arrivare all'altra piastra. Questo condensatore è localmente un prisma (così come un cavo di alimentazione è localmente un cilindro), e ciascun condensatore è indipendente dagli altri, quindi la carica decresce di un fattore $\frac{\epsilon}{\sigma}$. Poiché il valore totale di RC è uguale al tempo caratteristico, è uguale ancora a $\frac{\epsilon}{\sigma}$.

62. !!! $U = -\rho g l^2/2$

63. *** !!! $v(x) = \sqrt{T(x)/\rho}$ (come viene dall'esercizio di ricavare l'equazione delle onde), dove $v(x)$ è la velocità dell'onda ad altezza x dall'alto, e $T(x)$ è la tensione della corda in quel punto. Poiché la tensione della corda è dovuta al peso della massa sottostante, vale $T = g\rho(l - x)$. Quindi $v(x) = \sqrt{g(l - x)}$. Il tempo impiegato è $T = \int \mathrm{d}t = \int_l^0 \frac{\mathrm{d}x}{v(x)} = \int_l^0 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{g(l-x)}} = [-2\sqrt{\frac{l-x}{g}}]_0^l = 2\sqrt{\frac{l}{g}}$

64. * !!! Poiché le uniche grandezze in gioco sono m, $g = [l]/[t^2]$, $v_0 = \frac{[l]}{[t]}$, $b = \frac{[m][l]}{t^2}\frac{[t]^n}{[l]^n}$, si vede come per ottenere un tempo si potranno usare solo g, v_0 e $\frac{b}{m}$. Queste sono tre grandezze in $[l]$ e $[t]$, quindi esiste una loro combinazione adimensionale, cioè $v_0\sqrt[n]{\frac{b}{mg}}$. In generale quindi v si può esprimere come una combinazione a caso che abbia le unità di misura giuste (ad esempio $\frac{v_0}{g}$) moltiplicata per una qualche funzione analitica f_n (che dipenderà da n visto che al cambiare di n le equazioni del moto da integrare cambieranno!) della quantità adimensionale: $v = \frac{v_0}{g}f_n(v_0\sqrt[n]{\frac{b}{mg}})$.

Fin qui si arriva solo con la Matematica, ora bisogna usare anche la Fisica.
Se b tende a 0, il tempo per arrivare al punto più alto deve diventare $\frac{v_0}{g}$, quindi $f_n(+\infty) = 1$.
Integrando invece le equazioni del moto (ricordandosi che ci si trova nel caso $F(v)$ affrontato nell'esercizio 52) si trova:
$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F(v) = -mg - bv^n$
$t = \int \mathrm{d}t = \int_{v_0}^{0} \frac{m\mathrm{d}v}{-mg-bv^n} = \frac{1}{g}\int_0^{v_0} \frac{\mathrm{d}v}{1+bv^n/mg}$
Ora, con il cambio di variabili nella variabile adimensionale $w = \sqrt[n]{\frac{b}{mg}}v$, ottengo:
$t = \frac{1}{g}\sqrt[n]{\frac{mg}{b}}\int_{\sqrt[n]{0}\frac{b}{mg}v_0} \frac{\mathrm{d}w}{1+w^n}$, integrale che può essere fatto con l'analisi complessa (ma probabilmente non con metodi più facili).
In ogni caso si può verificare che per b che tende a 0, si sta integrando 1, e la soluzione tende effettivamente a $\frac{v_0}{g}$ come desiderato.
La distanza compiuta orizzontalmente si può calcolare in questo modo: ripetendo i conti dati per velocità verticale $v_0\sin(\theta)$ con gravità g, e per velocità orizzontale $v_0\sin(\theta)$ con gravità 0. I metodi utilizzati sono gli stessi.

65. * !!! (C5.43).

66. *** ! Si rimanda alla pagina di wikipedia "Equazioni dei telegrafisti". Si faccia attenzione al fatto che lì si usano R, L, C e G per indicare rispettivamente la resistenza, induttanza, capacità e conduttanza *per unità di lunghezza*, mentre nel testo dell'esercizio si è indicato il valore per unità di lunghezza con le lettere minuscole per sottolineare la differenza.
Si è scelto di usare la conduttanza per il resistore tra i due cavi perché la conduttanza è infinitesima, mentre la resistenza sarebbe stata infinita; inoltre perché la conduttanza $g\mathrm{d}x$ è additiva in $\mathrm{d}x$ (i resistori che collegano i due cavi lunghi sono in parallelo). Quando si usa $r\mathrm{d}x$, invece, esso è infinitesimo ed è additivo poiché i resistori lungo ciascun cavo sono in serie.

67. IphO 2014, problema 3 (si trova online)

68. IphO 2006/2007 (?), problema sull'amplificatore lock-in.

1.7 Derivate e Integrali

69. L'espressione $1 + x^2$ è già stata vista quando si calcola la derivata della tangente $t = \tan(x)$, ovvero $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 1 + t^2$, da cui $\frac{\mathrm{d}(arctan(t))}{t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{1+t^2}$.
Si ha quindi $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$.

70. !! Sia che gli estremi siano 0 e $\pi/2$ oppure 0 e π, è facile verificare che nell'integrale per parti il termine non sotto il segno d'integrale è nullo. Poi basta usare $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$. Sia nel caso dei coseni che dei seni. $\int_0^{\pi/2} \cos 5\theta \mathrm{d}\theta = \frac{1}{5}$, che tra l'altro viene molto più velocemente con il cambio di variabili $\alpha = 5\theta$.

71. !! $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = (-1/2)!$ usando il cambio di variabili $t = x^2$. In effetti non si sa ancora quanto vale (-1/2)!...

72. * !!! $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} t^x \mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha^{x+1}} \int_0^{+\infty} e^{-s} s^x \mathrm{d}s$ per cambio di variabili $s = \alpha t$. Chiamiamo $f(x, \alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} t^x \mathrm{d}t$. Si vede che $f(0, \alpha) = \alpha^{-1}$. Inoltre $\frac{\mathrm{d}f(x,\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} t^x \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (-t) e^{-\alpha t} t^x \mathrm{d}t = -f(x+1, \alpha)$. Questo permette di scoprire che $f(n, \alpha) = (-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha})^n \frac{1}{\alpha} = \frac{n!}{\alpha^{(n+1)}}$. Ponendo $\alpha = 1$ si trova $f(n, 1) = n!$, che era quello che volevamo.

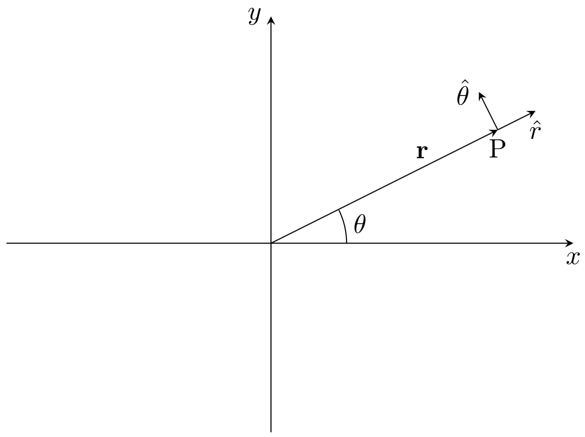
73. !!! $I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-s} \mathrm{d}s/2 = \pi$ con $s = r^2$. Quindi $I = (-1/2)! = \sqrt{\pi}$

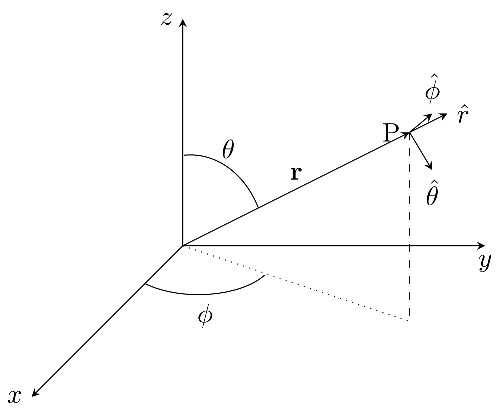
74. !!! Se $t = \tan(\alpha/2)$ si ricavano facilmente $1 + t^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha/2}$ e quindi si trovano $cos\alpha/2$ e, moltiplicando per t, $sin/alpha/2$. Con le formule di duplicazione del seno e del coseno è facile trovare $\sin(\alpha) = \frac{2t}{1+t^2}$ e $\cos(\alpha) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

75. ** !!! Conviene sempre effettuare la sostituzione $x = u/a$, in modo che al denominatore ci sia $\pm 1 \pm x^2$ o una sua radice. Ci si aspetta che si troveranno arcoseni, arcotangenti, magari anche iperboliche. Quindi bisogna fare le derivate delle funzioni trigonometriche ed iperboliche per vedere quale corrisponde a quale integrale.
Quanto basta sapere di seno iperbolico e coseno iperbolico è che sono l'uno la derivata dell'altro, e che $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$: questo permetterà di esprimere uno in funzione dell'altro. Ad esempio $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sinh(x) = \cosh(x) = \sqrt{1 + \sinh^2(x)}$, quindi ho scoperto che $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} arcsinh(s) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, che ricorda il terzo integrale dopo un cambio di variabili.
$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(a^2-u^2)}} = \arcsin(u/a)$
$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u^2-a^2)}} = \mathrm{arccosh}(u/a)$
$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u^2+a^2)}} = \mathrm{arcsinh}(u/a)$
$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(-u^2-a^2)}} = \pm i \, \mathrm{arcsinh}(u/a)$
$\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \arctan(u/a)$
$\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2-u^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctanh}(u/a)$

76. * !!! $f(x, y, z) = 0$ localmente al punto di interesse avrà l'equazione di un piano $Ax + By + Cz = D$.
Ora, tenendo y fisso, si ha $A\mathrm{d}x + C\mathrm{d}z = 0$, quindi $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -\frac{A}{C}$, e analogamente si ottiene $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = -\frac{B}{C}$ e $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = -\frac{A}{B}$.
Quindi si ha $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -\frac{A}{C} = -(-\frac{B}{C})(-\frac{A}{B}) = -\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z$ e si spiega la presenza del segno meno.

1.8 Calcolo sui Vettori, per Meccanica





77. * ! In polari:
$\hat r = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ e $\hat\theta = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$
$\dot{\hat r} = \dot\theta\hat\theta$ e $\dot{\hat\theta} = -\dot\theta\hat r$.
$\dot{\mathbf{r}} = \dot r\hat r + r\dot\theta\hat\theta$
$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot r - r\dot\theta^2)\hat r + (2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta)\hat\theta$.
In sferiche:
$\hat r = (\sin(\theta)\cos(\phi), \sin(\theta)\sin(\phi), \cos(\theta))$
$\hat\theta = (\cos(\theta)\cos(\phi), \cos(\theta)\sin(\phi), -\sin(\theta)$
$\hat\phi = (-\sin(\phi), \cos(\phi), 0)$
$\dot{\hat r} = \dot\theta\hat\theta + \dot\phi\sin(\theta)\hat\phi$; $\dot{\hat\theta} = -\dot\theta\hat r + \dot\phi\cos(\theta)\hat\phi$; $\dot{\hat\phi} = -\dot\phi\sin(\theta)\hat r - \dot\phi\cos(\theta)\hat\theta$
$\dot{\mathbf{r}} = \dot r\hat r + r\dot\theta\hat\theta + r\dot\phi\sin(\theta)\hat\phi$
$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot r - r\dot\theta^2 - r\sin^2(\theta)\dot\phi^2)\hat r + (2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta - r\sin(\theta)\cos(\theta)\dot\phi^2)\hat\theta + (2\dot r\dot\phi\sin(\theta) + 2r\dot\theta\dot\phi\cos(\theta) + r\ddot\phi\sin(\theta))\hat\phi$

78. * ! Scelgo un sistema di riferimento in cui il vettore velocità angolare è $\mathbf{\Omega} = \omega\hat z$. Allora $\dot{\hat x} = \omega\hat y$; $\dot{\hat y} = -\omega\hat x$; $\dot{\hat z} = 0$, e quindi per un vettore generico vale $\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{A}$. Quindi questa formula vale sempre.

79. * !!! Una rotazione in polari può cambiare solo l'angolo θ e avviene attorno all'asse z: è quindi $\mathbf{\Omega} = \dot{\theta}\hat{z}$, dove $z = r \times \phi$. In questo modo si possono ricalcolare le derivate dei versori $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$.
Una rotazione in sferiche può cambiare sia l'angolo θ ruotando attorno all'asse del versore ϕ, sia l'angolo ϕ ruotando attorno all'asse z. La velocità angolare è dunque la somma di questi due effetti (così l'istante successivo θ cambia di $\dot{\theta}\mathrm{d}t$ e ϕ cambia di $\dot{\phi}\mathrm{d}t$, esattamente come deve avvenire): $\mathbf{\Omega} = \dot{\theta}\hat{\phi} + \dot{\phi}\hat{z}$, dove $\hat{z}$ è il versore verticale che può essere espresso come combinazione lineare di $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$.
Quindi la rotazione che cambia ϕ ha come $\mathbf{\Omega}$ corrispondente $\dot{\phi}\hat{z}$, ha come raggio corrispondente la distanza tra la punta del vettore che ruota con l'asse di rotazione, quindi $r\sin(\theta)$, e l'accelerazione centripeta corrispondente è $a_{centripeta} = -r\sin(\theta)\dot{\phi}^2\hat{y} = -r\sin(\theta)\dot{\phi}^2(\sin(\theta)\hat{r} + \cos(\theta)\hat{\theta}) = -r\dot{\phi}^2\sin^2(\theta)\hat{r} - r\dot{\phi}^2\sin(\theta)\cos(\theta)\hat{\theta}$, che sono due dei nove termini dell'accelerazione in sferiche $\ddot{\mathbf{r}}$ calcolata negli esercizi precedenti.

1.9 Avanzati

80. * !! In un piccolo tratto infinitesimo la forza che agisce è la gravità verticale più le due forze laterali, le quali hanno dunque uguale componente orizzontale, che chiamiamo $T_0 = T\cos(\phi)$. Nel punto più basso della corda, la tensione è tutta orizzontale; partendo da lì, la tensione in un punto spostato a margine è dato dalla forza peso della corda, quindi è $T\sin(\phi) = \lambda sg$, dove s è la lunghezza della corda. Quindi $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan(\phi) = \frac{\lambda sg}{T_0} = \frac{s}{a}$ dove si definisce per semplicità $a = \frac{T_0}{\lambda g}$. Questa equazione differenziale si può risolvere in tanti modi.
Ad esempio, poiché $\mathrm{d}y = \frac{s}{a}\mathrm{d}x$, so che $\mathrm{d}s = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \frac{s^2}{a^2}}\mathrm{d}x$, e quindi $x = \int \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1+\frac{s^2}{a^2}}} = a\,\mathrm{arcsinh}(\frac{s}{a}) + costante$. Si ponga la costante a zero cambiando l'origine degli assi. Ora $s = a\sinh(\frac{x}{a})$. Inserendola nell'equazione di partenza abbiamo $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sinh(\frac{x}{a})$, ovvero $y = a\cosh(\frac{x}{a})$.

81. ** *Operatori (I parte).* $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2$. Infatti $\alpha\beta \neq \beta\alpha$ in generale.
Si intendeva chiaramente se $e^{\alpha}e^{\beta} = e^{\alpha+\beta}$ (il + mancava nella domanda). Questo è falso in generale perché già al secondo ordine, nel secondo membro ho la combinazione $\beta\alpha$, che non si può mai ottenere nel primo membro.
La derivata di un operatore è la differenza tra due operatori, diviso uno scalare, e poi facendo tendere lo scalare a zero. Il risultato di questa operazione, in base alle definizioni, è ancora un operatore.
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha(t)\beta(t)) = \frac{\mathrm{d}\alpha(t)}{\mathrm{d}t}\beta(t) + \alpha(t)\frac{\mathrm{d}\beta(t)}{\mathrm{d}t}$. Si noti che l'ordine è importante.

82. *** *Operatori (II parte).* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\alpha t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1 + \alpha t + \frac{(\alpha t)^2}{2!}) + \frac{(\alpha t)^3}{3!}) + ... = (\alpha + \alpha^2 + \frac{\alpha(\alpha t)^2}{2!}) + \frac{\alpha(\alpha t)^3}{3!}) + ... = \alpha e^{\alpha t}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\alpha t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1 + \frac{\alpha t}{N}\right)^N = N\left(1 + \frac{\alpha t}{N}\right)^{N-1}\frac{\alpha}{N} = \left(1 + \frac{\alpha t}{N}\right)^N\left(1 + \frac{\alpha t}{N}\right)^{-1}\alpha = \alpha e^{\alpha t}\left(1 + \frac{\alpha t}{N}\right)^{-1} = \alpha e^{\alpha t}$ dove nell'ultimo passaggio si è eliminato un ter-

mine che tende a 1. Si nota come α commuti con i termini tra parentesi poiché l'unico operatore all'interno è α stesso, e chiaramente α commuta con se stesso.
$e^{\alpha t}\beta e^{-\alpha t} = \left(1+\frac{\alpha t}{N}\right)^N \beta\left(1-\frac{\alpha t}{N}\right)^N$, che vuol dire applicare N volte a β una moltiplicazione a sinistra e una moltiplicazione a destra per i due fattori dentro le parentesi. Vediamo meglio cosa succede: $\left(1+\frac{\alpha t}{N}\right)\beta\left(1-\frac{\alpha t}{N}\right) = \left(\beta+\frac{t}{N}(\alpha\beta-\beta\alpha)\right)$. Ora, se uso la definizione suggerita $\hat{\alpha}\beta = \alpha\beta - \beta\alpha$, ho che $\left(1+\frac{\alpha t}{N}\right)\beta\left(1-\frac{\alpha t}{N}\right) = \left(1+\frac{\hat{\alpha} t}{N}\right)\beta$, e applicarla N volte significa trovare $\left(1+\frac{\hat{\alpha} t}{N}\right)^N \beta = e^{\hat{\alpha} t}\beta$ (la t all'esponente è mancante nel testo dato).
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\alpha(t)} = e^{\alpha(t)}e^{-\alpha(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\alpha(t)} = e^{\alpha(t)}e^{-\hat{\alpha}(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. Per semplicità di notazione si scrive $e^(\alpha)e^{-\hat{\alpha}}D$, dove è sottointeso che $\alpha = \alpha(t)$. Ora si ottiene $e^{\alpha}(D - \hat{\alpha}D + \frac{\hat{\alpha}^2}{2!}D - \frac{\hat{\alpha}^3}{3!}D \ + \dots)$. Ora usando che D con niente a destra è $D1 = 0$, e che $\hat{\alpha}D = \alpha D - D\alpha = D\alpha = \dot{\alpha}$, si può scrivere $e^{\alpha}(0 + \dot{\alpha} - \frac{\hat{\alpha}}{2!}\dot{\alpha} + \frac{\hat{\alpha}^2}{3!}\dot{\alpha} - \dots) = e^{\alpha}\frac{1-e^{-\hat{\alpha}}}{\hat{\alpha}}\dot{\alpha}$, dove nell'ultimo passaggio si è riconosciuta la serie di Taylor di $\frac{1-e^{-x}}{x}$. Si noti come $\dot{\alpha}$ non commuti necessariamente con α, poiché $\alpha(t)$ non commuta necessariamente con $\alpha(t')$.

83. ** ! Il Teorema di Mamikon è vero perché il segmento tangente può solo ruotare o muoversi parallelamente a se stesso (il segmento e il versore tangente alla traiettoria $(\dot{x}(\lambda), \dot{y}(\lambda))$ sono paralleli per ipotesi!). Ora, l'area spazzata è dovuta alla rotazione del segmento, non al suo moto parallelo a se stesso! Un'asta che si muove parallelamente a se stessa infatti non spazza area.
Anche senza sapere i raggi dei due cerchi che formano l'anello circolare, si vede che l'area dell'anello è spazzata dal segmento lungo a (che parte tangente dal cerchio e arriva al cerchio esterno), se lo si fa ruotare attorno al cerchio interno (ruoterà di un angolo 2π). Per il Teorema di Mamikon è l'area spazzata da un segmento lungo a che ruota di 2π, ovvero l'area di un cerchio di raggio a, cioè πa^2.
L'area sottesa dalla cicloide è un problema complicato, perché non bisogna mantenere il segmento tangente di lunghezza costante. Si rimanda alla pagina di wikipedia in inglese "Visual Calculus".
Il laccio tenuto dal bambino è lungo a, si muove parallelamente a se stesso come richiesto dal Teorema di Mamikon, e ruota in tutto di $\pi/2$. L'area spazzata è dunque quella di un quarto di cerchio, cioè $\pi a^2/4$.

84. ** Per come è stata definita, si chiede che il segmento parallelo alla curva verso l'asse y sia lungo a, ovvero $a^2 = x^2 + (\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2 x^2$, da cui, isolando la derivata, si trova $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$ (si ricorda che la funzione è decrescente per come sono stati scelti gli assi).
L'ODE trovata può essere integrata, ma non è illuminante.

85. * !! I risultati si ottengono se $f(x)$ è una funzione che va a 0 all'infinito più velocemente di qualunque polinomio (cioè con ordine di infinitesimo maggiore), altrimenti alcuni integrali non convergono e non scompare un

termine quando si fa l'Integrale per Parti.
Nel primo esercizio c'è un lapsus all'esponente (mancava la x, senza la quale l'esercizio è banale perché la costante esce fuori): $F[e^{i\alpha x}f(x)](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega+\alpha)x} f(t)\mathrm{d}t = F[f(x)](\omega+\alpha)$.
$F[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{i\omega t})f(t)\mathrm{d}t = -i\omega\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{i\omega t})f(t)\mathrm{d}t = -i\omega F[f(x)](\omega)$, dove nell'Integrale per Parti l'altro termine è nullo.
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F[f(x)](\omega) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}itf(t)\mathrm{d}t$
$= F[ixf(x)](\omega)$. Se chiamiamo la funzione rettangolo $R(x)$ si ha:
$F[R(x)](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}R(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{+1} e^{i\omega t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[\frac{e^{i\omega t}}{i\omega}]_{-1}^{1} = \frac{e^{i\omega}-e^{-i\omega}}{2\pi i\omega} = \frac{\sin(\omega)}{\pi\omega}$

86. !!! Se moltiplico una funzione continua e con integrale finito per una sinusoide di frequenza molto alta, mi aspetto che l'ansa alta e quella bassa della sinusoide, essendo molto vicine e molto strette, siano alte uguali (vengono moltiplicate per valori quasi uguali di $f(x)$). Quindi aumentando sempre più la frequenza il valore dell'integrale va a zero.

87. * !!! $\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2} = 0$ chiaramente, visto che il numeratore decresce e il denominatore è circa x^2, che è un numero finito. L'unico problema si ha se $x = 0$: in questo caso il limite è $1/\epsilon$, ovvero infinito. Il grafico diventa una sorta di campana centrata in 0 che diventa via via più stretta e alta.
$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{y^2+1}$ dove $y = x/\epsilon$. L'integrale è $\arctan(+\infty) - \arctan(-\infty) = \pi$.
E' chiaro che mentre la funzione a campana diventa stretta e alta, l'area sottesa resta costante.
Per fare $\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}f(x)dx$ basta notare che la campana stretta e alta fa in modo che contino solo i valori di $f(x)$ con x vicino a 0: quelli lontani vengono moltiplicati per valori molto piccoli, e sono irrilevanti. Al limite, conta solo il valore $f(0)$ e i valori vicini (che sono praticamente identici), moltiplicati per π. Il risultato è dunque $\pi f(0)$.

88. ! La gaussiana è una funzione a campana (anche se non è quella dell'esercizio precedente). In ogni caso come $\delta(x)$ va bene una funzione di qualunque forma, anche a rettangolo, o a triangolo, o a pinna di squalo, purché abbia area 1 e ampiezza infinitesima. I motivi per cui $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)f(x)dx = f(0)$ sono gli stessi dell'esercizio precedente: avente la funzione ampiezza infinitesima, contano solo i valori $f(x)$ con $x \approx 0$, che sono tutti all'incirca $f(0)$ (se f è continua). Quindi sto facendo la media di questi valori (l'integrale di una funzione moltiplicata per un'altra funzione di area 1 corrisponde a una media!), e troverò necessariamente $f(0)$.

89. ! $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(x)f(x)\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)f'(x)dx = -f'(0)$

90. ! $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{(n)}(x)f(x)\mathrm{d}x = (-1)^n\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)f^{(n)}(x)\mathrm{d}x$ applicando n volte l'integrazione per parti, ottenendo infine $(-1)^n f^{(n)}(x)$

91. ** (C5.139 e C5.140)

92. ** !! In base a quanto detto, una regione perde calore se ha più calore della media del calore delle regioni circostanti (delle celle circostanti nel nostro modello a cubetti, oppure della superficie sferica circostante se prendiamo una regione sferica). Quindi $\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}$ deve essere proporzionale al laplaciano $\nabla^2 Q(x,t)$, e la costante di proporzionalità è positiva: infatti se la regione ha meno calore che le regioni circostanti, si è visto che il laplaciano è positivo (la somma delle derivate seconde è positiva!) e con costante positiva si ha un aumento del calore nel tempo. L'equazione quindi è $\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = D\nabla^2 Q(x,t)$, dove $D > 0$ include tutte le informazioni sul tipo di materiale. Si noti come si è usato il postulato sottointeso che il calore non viene mai creato né distrutto, ma solo trasportato per diffusione nel metodo indicato. Questa è l'*equazione del calore* o *equazione di diffusione.*

93. * !!! $n! = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^n \mathrm{d}t$. Per trovare il massimo dell'integrando (al variare di t), poiché $e^{-t}t^n = e^{-t+nln(t)}$, basta imporre che $-t + nln(t)$ abbia valore massimo, cioè derivata nulla: $-1 + n/t = 0$, ovvero si ha massimo per $t = n$. Espandendo $f(t) = -t + nln(t)$ per $t \approx n$ si ottiene con Taylor $f(t) = f(n) + f''(n)(t-n)^2/2$ (poiché la derivata prima si annulla perché è un massimo!) ovvero $-n + nln(n) - (t-n)^2/2n$, che reinserito nell'esponente dell'integrando da l'integrale voluto: $\int_0^{+\infty} e^{-n+n\ln n - \frac{(t-n)^2}{2n}} \mathrm{d}t$ (nel testo del problema c'erano un paio di lapsus).

   Tirando fuori le costanti troviamo $e^{-n+n\ln n}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{(t-n)^2}{2n}} \mathrm{d}t$. Poiché l'integrando decresce rapidamente quando ci si allontana da n, si può estendere questo integrale da $-\infty$ a $+\infty$ commettendo un errore trascurabile. Ora, noi sappiamo l'area totale sottesa da una gaussiana grazie alla formula dell'esercizio 73 ritoccata con un cambio di variabili, ovvero $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$. Si ottiene dunque $e^{-n}n^n\sqrt{2n\pi}$, che è esattamente l'approssimazione di Stirling.

94. ** ! Si definisce $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ (c'era un lapsus nel testo riguardo agli estremi di integrazone). Ora $I^n = \int_0^{+\infty} e^{-r^2} S_n(r) \mathrm{d}r$, dove $S_n(r)$ è la superficie $(n-1)$-dimensionale di un'ipersfera a n dimensioni. Calcoliamola: chiaramente $S_n(r) = S_n(1)r^(n-1)$, quindi ottengo $I^n = S_n(1)\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{(n-1)} \mathrm{d}r = S_n(1)\int_0^{+\infty} e^{-s} s^{(n-2)/2} \mathrm{d}s\frac{1}{2} = (\frac{n-2}{2})!S_n(1)\frac{1}{2}$. Quindi $S_n(r) = r^{n-1}S_n(1) = r^{n-1}\frac{2\pi^{n/2}}{(\frac{n-2}{2})!}$. Per trovare il volume basta integrare: $V_n(R) = \int_0^R S_n(r)\mathrm{d}r = \frac{R^n}{n}\frac{2\pi^{n/2}}{(\frac{n-2}{2})!} = \frac{\pi^{n/2}R^n}{(\frac{n}{2})!}$ usando il fatto che $\frac{(}{n-2}2)!\frac{n}{2} = (\frac{n}{2})!$ per le proprietà del fattoriale.

95. *** Il suggerimento dato nel testo è sufficiente. I conti sono fatti, ad esempio, sulla pagina di wikipedia "Beta di Eulero".

96. * Si può provare a dire $\sin(x) = ...(x+3\pi)(x+2\pi)(x+1\pi)x(x-1\pi)(x-2\pi)(x-3\pi)...$, ma questa espressione non converge mai (esistono sempre infinite radici da cui sono molto distante). Se l'espressione deve andare a 1 quando $x = 0$, si fa in modo che tutti i fattori vadano a

1, dividendo per il fattore giusto (ovviamente si intendono tutti i fattori tranne x, per soddisfare $\sin(x) \approx x$ quando x va a 0). Si ottiene così $\sin(x) = ...(1+\frac{x}{3\pi})(1+\frac{x}{2\pi})(1+\frac{x}{\pi})x(1-\frac{x}{\pi})(1-\frac{x}{2\pi})(1-\frac{x}{3\pi})... = x(1-\frac{x^2}{\pi^2})(1-\frac{x^2}{4\pi^2})(1-\frac{x^2}{9\pi^2})... = x\prod_{k=1}^{+\infty}(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2})$, dove la Π indica la produttoria per tutti i k, in questo caso da 1 a $+\infty$.
Si noti come questa espressione non è stata effettivamente dimostrata in quanto potrebbero esserci altri zeri nel piano complesso che stiamo ignorando, oppure potrei moltiplicare per esponenziali (che non aggiungono nuovi zeri), oppure altro. In ogni caso questa espressione è giusta.

97. *** $\sinh(x) = \frac{1}{2}((1+\frac{x}{N})^N-(1-\frac{x}{N})^N) = \frac{1}{2}((1+\frac{x}{N})-(1-\frac{x}{N}))\prod_{k=1}^{(N-1)/2}((1+\frac{x}{N})^2+(1-\frac{x}{N})^2-2(1+\frac{x}{N})(1-\frac{x}{N})\cos(\frac{2\pi k}{N}) = \frac{x}{N}\prod_{k=1}^{(N-1)/2}(2+2\frac{x^2}{N^2}-2\cos(\frac{2\pi k}{N}+2\frac{x^2}{N^2}\cos(\frac{2\pi k}{N})$.
Ora $\cos(2\pi kN) = 1-\frac{1}{2}\frac{4\pi^2k^2}{N^2}+O(\frac{k^4}{N^4})$. Si ottiene:
$\sinh(x) = \frac{x}{N}\prod_{k=1}^{(N-1)/2}(4\frac{x^2}{N^2}+\frac{4\pi^2k^2}{N^2}+O(\frac{k^4}{N^4})+O(\frac{k^2x^2}{N^4}))$, ma l'ultimo O si può omettere poiché, quando $x >> k$ è più piccolo di $O(\frac{1}{N^4})$, e poiché $k > 1$ si può includere nell'altra O; mentre quando $k >> x$, il termine è più piccolo di $O(\frac{k^4}{N^4})$, e quindi è già incluso nell'altra O.
Si ottiene così qualcosa da cui si riesce a intravedere il risultato che ci si aspettava: infatti, raccogliendo, si trova:
$\sinh(x) = \frac{x}{N}\prod_{k=1}^{(N-1)/2}(4\frac{k^2\pi^2}{N^2})\prod_{k=1}^{(N-1)/2}(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}+O(\frac{k^2}{N^2}))$ (al contrario dell'esercizio precedente qui c'è il + poiché si sta parlando del seno iperbolico).
Un grosso problema è che, verso la fine della produttoria $k \approx N$, e $\frac{k}{N}$ diventa non trascurabile. Come però fatto notare nel suggerimento (*iii*), quando questo avviene il contenuto della produttoria non dipende più da x: infatti $\frac{x^2}{k^2} \approx \frac{x^2}{N^2}$, che tende a zero ed è trascurabile in confronto a $1-O(\frac{k^2}{N^2})$. La produttoria si può quindi dividere in due parti: all'inizio $k << N$ e quindi $O(\frac{k^2}{N^2})$ è trascurabile, mentre alla fine $N \approx k >> x$, e in questo caso posso trascurare il termine che dipende da x (a essere precisi c'è una fase intermedia in cui entrambi i termini sono trascurabili, e quindi contribuisce con degli 1 alla produttoria...). Il prodotto sulla parte finale non dipende da x e viene chiamato B. Il prodotto sulla parte iniziale può essere reso eliminando $O(\frac{k^2}{N^2})$ ed estendendo l'estremo superiore della produttoria fino a $+\infty$ (dopo un po' si sta praticamente moltiplicando solo per 1). Si ottiene quindi:
$\sinh(x) = B\frac{x}{N}\prod_{k=1}^{(N-1)/2}(4\frac{k^2\pi^2}{N^2})\prod_{k=1}^{+\infty}(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2})$
Ora, ho ottenuto quello che volevo a parte per il fattore $\frac{1}{N}\prod_{k=1}^{(N-1)/2}(4\frac{k^2\pi^2}{N^2})$, che chiamo A e che non dipende da x. Ho quindi:
$\sinh(x) = ABx\prod_{k=1}^{+\infty}(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2})$
Al prim'ordine questa espressione fa $x = ABx$. Ottengo così che $AB = 1$, e quindi:
$\sinh(x) = x\prod_{k=1}^{+\infty}(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2})$ Da $\sin(x) = \frac{1}{i}\sinh(ix)$ si ottiene facilmente anche:
$\sin(x) = x\prod_{k=1}^{+\infty}(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2})$

98. Guardando il terzo ordine dell'espressione precedente si ottiene: $-\frac{x^3}{3!} =$

$-\frac{x^3}{\pi^2}(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...)$, da cui si conclude facilmente che $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$ (*Problema di Basilea*).

Riferimenti bibliografici

[1] David Morin, *There once was a Classical Theory* [M]

[2] James Nearing, *Mathematical Tools for Physics* [MTP]

[3] Giancarlo Cella, *Un Esercizio al Giorno* [C]

Tutti questi libri sono attualmente reperibili in rete.