

Elettromagnetismo

Bruno Bucciotti*, Raffaele Salvia†

6 febbraio 2018

Sommario

In linea di principio, tutto l'elettromagnetismo è racchiudibile in sole quattro equazioni (che usano concetti matematici inventati appositamente a questo scopo). In questa lezione ne esploreremo alcune conseguenze, iniziando da problemi di elettrostatica, per poi passare ai circuiti elettrici e all'induzione magnetica.

1 Introduzione

1.1 Formule

In presenza di un campo elettrico $\vec{E}$ e di un campo magnetico $\vec{B}$ su un punto materiale dotato di carica q agisce la forza di Lorenz:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

In presenza di un campo magnetico $\vec{B}$, su un filo rettilineo di lunghezza L attraversato da corrente I agisce una forza:

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$$

dove $\vec{L}$ è diretto lungo il filo. Nel vuoto, i campi elettrico e magnetico sono legati dalle equazioni di Maxwell:

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\Phi(\vec{B}) = 0$$

*bruno.bucciotti@sns.it

†raffaele.salvia@sns.it

$$\Gamma(\vec{E}) = -\frac{\partial\Phi(\vec{B})}{\partial t}$$

$$\Gamma(\vec{B}) = \mu_0 \left(I + \epsilon_0 \frac{\partial\Phi(\vec{E})}{\partial t} \right)$$

dove, detto $\vec{V}$ un generico campo vettoriale, A una superficie e γ una curva, il flusso e la circuitazione sono definiti così:

$$\Phi(\vec{V}) = \int_A \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$$\Gamma(\vec{V}) = \int_\gamma \vec{V} \cdot d\vec{l}$$

Infine il potenziale elettrico è legato al campo elettrico dalla relazione:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

In presenza di cariche in moto si definisce il vettore corrente $\vec{J}$ come:

$$\vec{J} = \rho\vec{v}$$

dove ρ è la densità di carica (misura la carica in un elemento di volume) e $\vec{v}$ la velocità a cui si muove tale elemento. Si ricava inoltre che, data una superficie A , si ha:

$$\int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = I_A$$

dove I_A è la corrente che scorre attraverso la superficie.

La conservazione della carica si può scrivere come:

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}$$

che equivale alla seguente relazione per un qualsiasi volume V contenente carica Q_{int} e racchiuso dalla superficie A :

$$\int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = -\frac{dQ_{int}}{dt}$$

1.2 Trovare i campi date le sorgenti

Queste formule sono inserite principalmente per completezza e in generale non saranno necessarie: si ricorre normalmente all'uso di simmetrie, discusso

fra poco. $d\tau'$ indica l'elemento di volume che si considera come sorgente: viene normalmente rimpiazzato con $dx dy dz$.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\nu} \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau'$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\nu} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau'$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\nu} \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau'$$

1.3 Campo di sorgenti notevoli

Ricaviamo il campo per alcune sorgenti ricorrenti mediante Gauss (campo elettrico) o Ampere (campo magnetico). La strategia è di fare considerazioni di simmetria preliminari in modo da rendere banale l'integrale della circuitazione o del flusso.

Piano carico infinito Gli si dia una densità di carica uniforme σ . Mediante simmetrie di traslazione possiamo dire che il campo elettrico dipende al più dalla distanza dal piano, è simmetrico rispetto al piano ($E(x)$ e $E(-x)$) ed è ortogonale al piano per simmetria di rotazione. Si consideri un cilindro di altezza h e area A incastrato ortogonalmente al piano. La carica al suo interno è σA e gli unici contributi al flusso si hanno sulle basi del cilindro e valgono ciascuno EA (uso l'uniformità del campo). Dunque per la legge di Gauss si ha $2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$, da cui $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}$, dove $\hat{z}$ versore che si allontana dal piano ortogonalmente. Notiamo che il campo non dipende dalla distanza dal piano.

Problema 1.1. Il campo di una sfera uniformemente carica ($\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$) e di un filo carico infinito con densità lineare di carica λ ($\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$).

Filo con corrente I Il campo magnetico può dipendere solo dalla distanza r dal filo. Non può avere componente lungo $\hat{z}$ perchè il campo magnetico è sempre ortogonale alla corrente che lo genera, e qui tutta la corrente è lungo la direzione $\hat{z}$. Supponiamo che abbia componente radiale, allora invertendo il verso della corrente la componente radiale (come tutte le componenti) cambia verso; ora però capovolgiamo il filo: la componente radiale rimane invertita, ma la corrente che la genera è tornata quella iniziale. Poichè una corrente genera un campo magnetico ben definito è necessario

che la componente radiale sia nulla. Dunque l'unica componente possibile è quella tangenziale. Vale $2\pi r B = \mu_0 I$, dunque $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$.

Problema 1.2. Trovare il campo di un piano con corrente uniforme $\vec{K}$ per unità di lunghezza. ($\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{K} \times \hat{z}}{2}$)

Osservazioni Notate che il flusso e la circuitazione spesso si possono calcolare "a tratti costanti", cioè ad esempio se sono in una spira rettangolare e devo calcolare la circuitazione di un campo elettrico uniforme su ogni singolo lato mi basta sommare sui 4 lati $\vec{E} \cdot \vec{l}$, dove $\vec{l}$ è il lato orientato (il modulo è la lunghezza del lato). Inoltre quando si calcola la circuitazione di $\vec{E}$ lungo un percorso chiuso (anche non giacente in un piano) studiando il flusso di $\vec{B}$ nel tempo, la superficie su cui si calcola il flusso può essere qualsiasi, a patto di avere per bordo il percorso scelto. Chiaramente più complicata è la superficie più risulta contorto il calcolo.

1.4 Conduttori

I conduttori (in equilibrio elettrostatico) sono materiali in cui il campo elettrico interno è nullo e tutta la carica si trova sulle superfici (eventualmente anche "dentro"! A tal proposito per "interno" intendo la parte metallica; se ci fosse una cavità interna al conduttore, vuota, la chiamerò cavità interna). Il campo elettrico esterno incide ortogonalmente le loro superfici, che sono equipotenziali, cioè il potenziale V è lo stesso ovunque all'interno del metallo. Mentre le prime asserzioni sono quasi la definizione di conduttore, possiamo osservare che, se il campo non fosse ortogonale alla superficie, vi sarebbe un campo parallelo alla superficie tendente a spostare le cariche superficiali, contro l'ipotesi di equilibrio. Inoltre dovete sapere che, essendo $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$, $\vec{E}$ "punta" verso la direzione di massima decrescita di V , mentre in direzioni ortogonali al suo gradiente V non varia affatto per spostamenti abbastanza piccoli; il fatto generale dunque è che le linee di campo sono sempre ortogonali al potenziale che le genera. NB: non tutti i campi ammettono un potenziale! Ad esempio il campo magnetico $\vec{B}$ non è, in generale, esprimibile come gradiente di un campo scalare (nonostante in certe situazioni speciali si possa). Un'osservazione: il potenziale elettrico (come quello gravitazionale) è determinato a meno di costante additiva: se la distribuzione di carica è limitata si usa mettere il potenziale a 0 a grande distanza dalle cariche e vale la formula integrale data; nel caso la distribuzione sia illimitata questa scelta generalmente non è possibile e/perchè l'integrale viene infinito. Il riferimento 0 del potenziale è allora suggerito dal problema, per esempio per un piano

infinito carico lo si mette a 0 sul piano; per un filo rettilineo infinito carico si fa una scelta arbitraria, poichè anche mettere lo 0 sul filo farebbe divergere il potenziale.

Talvolta infine si parla di conduttori "messi a terra": questo termine, che trova origine in elettrotecnica, significa semplicemente che il potenziale del dato conduttore è lo stesso della "terra", un corpo che si comporta da serbatoio illimitato di cariche, e che tale conduttore può scambiare cariche, assorbendole o cedendole, liberamente con la terra; nella pratica è proprio il pianeta Terra che approssima molto bene un serbatoio di carica illimitato (ricordo che, pur potendo assorbire grandi quantità di carica, ad esempio i fulmini, la Terra resta complessivamente neutra, non generando quindi un campo elettrico significativo); nella teoria si può ricordare che qualunque carica libera messa su di un conduttore a terra si disperderà "svanendo", mentre è possibile che per polarizzazione (vedi dopo) su un conduttore a terra compaia una carica netta. Se la carica è localizzata si può visualizzare la messa a terra come una sorta di filo che collega il conduttore a una terra posta a enorme distanza (diremmo "a infinito"), da cui si deduce che il potenziale di un conduttore a terra è 0. I problemi sui conduttori sono fondamentalmente di due tipi: o viene assegnato il potenziale del conduttore (ad esempio mettendolo a terra) oppure viene assegnata la carica totale sul conduttore (ad esempio neutro: un caso notevole è una sfera neutra con, al di fuori, una carica q): discusso in carica immagine.

1.5 Condizioni di raccordo

Il campo elettrico è continuo a meno che non vada incontro a una densità di carica superficiale σ , nel qual caso ha una discontinuità di $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$. Il potenziale è invece sempre continuo (a meno di distribuzioni particolari legate a densità di dipolo).

Problema 1.3. Verificare le affermazioni nel caso di una superficie sferica uniformemente carica.

Per il campo magnetico vale una legge analoga: questo è sempre continuo a meno di correnti superficiali (ad esempio lungo un piano). Attenzione: sulla superficie che separa due mezzi dielettrici diversi è possibile che appaia carica per polarizzazione!

1.6 Elettromagnetismo nella materia

Trattiamo solo dielettrici lineari, omogenei e isotropi. Nel caso in cui il campo elettrico sia all'interno di un dielettrico (cioè un materiale isolante) gli

atomi si polarizzano e compare una densità di carica superficiale σ_{pol} (potrebbe comparirne anche una all'interno nel caso *nel* dielettrico vi sia carica, come quando caricate una bacchetta di vetro, ma non lo tratteremo). Per trattare il problema si sostituisce ϵ_0 con $\epsilon_0\epsilon_r$ (e μ_0 con $\mu_0\mu_r$ nel caso di campi magnetici) dove ϵ_r è una costante che dipende dal materiale. Per illustrare con un esempio consideriamo due piastre conduttrici piane e parallele di area A e a distanza d con carica Q e $-Q$ rispettivamente (un condensatore). Poichè sono vicine possiamo trascurare gli effetti di bordo e abbiamo che il campo elettrico è uniforme e dato dall'approssimazione di piano infinito con densità superficiale di carica $\sigma = \frac{Q}{A}$, che ricordo essere $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$: fuori le due piastre i contributi si elidono, mentre si sommano entro le due piastre dando un campo $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$; notiamo di sfuggita la formula $\Delta V = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$ che vale poichè il campo è uniforme. Ora inseriamo un dielettrico con costante dielettrica relativa ϵ_r : secondo la nostra ricetta il campo fuori resta nullo, dentro diventa $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon_r}$. Possiamo interpretare questo abbassamento del campo elettrico come una riduzione della carica in corrispondenza delle piastre: a σ va ora sommata una densità di carica indotta σ_{pol} di segno opposto che possiamo calcolare. Supponiamo di avere sulle piastre una densità di carica $\sigma - \sigma_{pol}$, allora il campo elettrico all'interno del condensatore è $E = \frac{\sigma - \sigma_{pol}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon_r}$, da cui si ricava $\sigma_{pol} = \sigma \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}$. Che cosa abbiamo fatto? Ci siamo ricordati che la legge fondamentale non ha nessun ϵ_r , vi sono solo campi elettrici dovuti a cariche (libere o indotte): l'introduzione di ϵ_r è comoda per calcolare il campo perchè le cariche indotte non sono note a priori. Facciamo qualche caso limite: per $\epsilon_r = 1$ non abbiamo carica indotta e recuperiamo il caso senza dielettrico; per $\epsilon_r \rightarrow \infty$ ho $\sigma_{pol} = \sigma$ e ho che il dielettrico diventa un conduttore, annullando lo squilibrio di cariche.

Problema 1.4. Ecco una possibile espansione dell'esercizio: allontanano una faccia del condensatore dal dielettrico, che resta fisso: poichè il campo di un piano infinito non cambia con la distanza il campo dentro il dielettrico resta uguale, ma ora vedo la carica Q staccata dalla carica indotta. Calcolare il campo nella regione fra faccia allontanata e dielettrico.

2 Elettrostatica e irraggiamento

2.1 Il campo di una sfera uniformemente carica

Prendiamo una sfera di raggio a , in cui è uniformemente distribuita una carica Q (quindi la densità di carica è $\rho = \frac{3Q}{4\pi a^3}$). La prima equazione di Maxwell ci dice che, presa qualunque superficie, il flusso del campo elettrico attraverso di essa è proporzionale alla carica dentro. Scegliamo come superficie

una sfera concentrica alla nostra sfera carica. Per via della *simmetria sferica* del sistema, il campo elettrico deve essere radiale e costante sulla superficie della sfera; quindi l'integrale si riduce a una moltiplicazione, e troviamo che dentro la sfera

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{r}$$

mentre fuori dalla sfera, non sorpendentemente,

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

La maggior parte dei problemi elementari che si incontrano in elettrostatica hanno o simmetria sferica, o piana, o cilindrica. Ricavare il campo elettrico per un cilindro e una lastra uniformemente carichi (specificando dettagliatamente gli argomenti di simmetria che si usano). Vedi già campo di distribuzioni notevoli.

2.2 Esercizio: sfere sovrapposte

Due sfere uniformemente cariche dello stesso raggio, una con carica Q e l'altra $-Q$, sono quasi sovrapposte, ma i loro centri si trovano a distanza δ . Per il principio di sovrapposizione, il campo elettrico nella regione di sovrapposizione sarà

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{r}_1 - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{r}_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{\delta}$$

quindi uniforme, costante, e proporzionale alla separazione fra i due centri.

Problema 2.1. Come sarà fatto, invece, il campo elettrico molto lontano dalle due sfere?

2.3 Il dipolo elettrico

Si tratta di una configurazione di cariche molto utile da tenere presente per la quale si immagina di porre due cariche Q e $-Q$ a distanza δ e poi, mentalmente, diminuire fino a zero δ e far tendere a infinito Q in modo che $p = Q\delta$ sia costante. L'oggetto che risulta ricorda ancora la direzione e il verso delle cariche, ed è rappresentabile con il vettore $\vec{p} = Q\vec{\delta}$, dove per convenzione $\vec{\delta}$ va dalla carica negativa a quella positiva. Calcoliamo ora il potenziale che genera immaginandolo come due cariche a distanza finita δ e

facendo il limite alla fine. Ponendolo lungo l'asse z ($-Q$ nell'origine e Q in $z = \delta$) e lavorando in sferiche abbiamo che il campo in r, θ è

$$V = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{r^2 + \delta^2 - 2\delta r \cos(\theta)}}$$

e sviluppando con Taylor abbiamo

$$V \approx \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1 + \frac{\delta}{r} \cos(\theta))}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q\delta \cos(\theta)}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

Se siamo abbastanza lontani da una distribuzione di cariche che è globalmente neutra, il dipolo è l'unica cosa che vediamo. In generale, il momento di dipolo di una distribuzione di cariche si calcola con $\vec{p} = \sum \vec{r}_i q_i$, o nel caso continuo, con $\vec{p} = \int \vec{r} \rho(\vec{r}) d\tau$. Se mettessimo vicini due dipoli opposti, cancelleremmo anche il termine che va come r^{-3} , e rimarrebbe solo il *termine di quadrupolo* del campo elettrico, che decresce come r^{-4} (esempio: la molecola di anidride carbonica).

Problema 2.2. Stimare il momento torcente che un campo elettrico uniforme esercita su di una molecola d'acqua.

2.4 Sphereception

Mettiamo tutto insieme: abbiamo una palla conduttrice (piena) con carica Q con una cavità interna, anch'essa sferica ma decentrata, al centro della quale vi è un dipolo p . Fuori dalla palla vi è una sfera conduttrice messa a terra e ancora al di fuori c'è un condensatore sferico sottile con dielettrico ϵ_r , carica sulla faccia interna Q_2 e sulla faccia esterna $-Q_2$. Assumere nota la geometria del problema. Trovare il campo elettrico ovunque. Assumere che non vi sia carica di polarizzazione dentro il dielettrico. Ipotizzare $Q = Q_2$ e $\epsilon_r = 2$.

2.5 Cariche immagine

Si tratta di un metodo di elettrostatica utile per risolvere alcuni problemi con conduttori. Consideriamo ad esempio una sfera conduttrice di raggio a messa a terra con, all'esterno, una carica q a distanza d ; vogliamo calcolare il campo elettrico fuori dalla sfera. Purtroppo la sfera conduttrice si polarizzerà (in un modo difficile da indovinare) al fine di rendere la propria superficie equipotenziale. Dimentichiamoci per un attimo di questo problema e consideriamone un altro: la carica q resta lì, ma dentro la sfera, a distanza $d' = \frac{a^2}{d}$

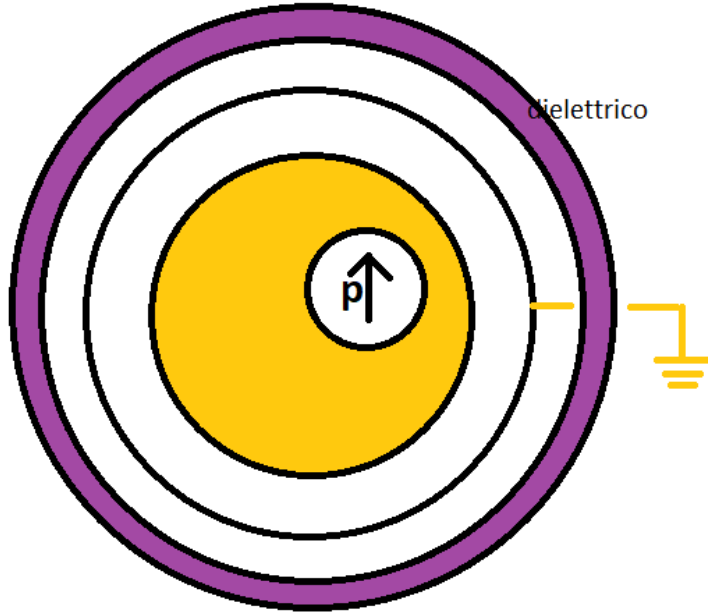


Figura 1: Sphereception

dal centro e in direzione di q , mettiamo una carica $q' = -q\frac{a}{d}$. Calcoliamo ora il potenziale in un punto qualsiasi a distanza a dall'origine (chiamo θ l'angolo fra q , l'origine e il punto in cui calcolo V)

$$V(a, \theta) = \frac{q'}{\sqrt{a^2 + d'^2 - 2ad' \cos(\theta)}} + \frac{q}{\sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cos(\theta)}}$$

che si osserva essere zero per qualsiasi θ . Il bello è che questa distribuzione di cariche, fuori dalla sfera, genera un potenziale (e dunque un campo elettrico) identico a quello della sfera conduttrice con carica esterna. Dunque abbiamo risolto il problema di partenza: il campo elettrico fuori dalla sfera è dato dalla sovrapposizione dei campi delle due cariche, una reale l'altra immagine. Per trovarlo basta prendere il gradiente del potenziale. Un'ultima osservazione: in questo problema la sfera era a terra. Nel caso di una sfera con carica complessiva assegnata è sufficiente mettere una seconda carica immagine al centro della sfera: ad esempio nel caso di una sfera neutra la seconda carica sarà opposta alla prima. Estendiamo ora il risultato al caso di un piano conduttore infinito. Vedo una sfera di enorme raggio come un piano; chiamo A il punto all'intersezione fra la sfera e la retta fra origine e q , tengo fisso A e mando a a infinito. Poichè l'origine è lontanissima, le distanze interessanti diventano le distanze di q e q' da A , che chiamo $\delta = d - a$ e $\delta' = a - d'$. Tenere fermo A equivale a tenere costante δ ; per realizzare ciò serve che

d cresca insieme ad a in modo da tenere la differenza costante. Allora ho $\frac{d}{a} = \frac{d-a}{a} + 1 = \frac{\delta}{a} + 1 \rightarrow 1$, $q' \rightarrow -q$ e $\delta' \rightarrow \delta$. Fisicamente questo vuol dire che se abbiamo una carica q di fronte a un piano conduttore infinito a distanza δ , il potenziale nel semispazio con la carica sarà la sovrapposizione di q e una carica $-q$ posta simmetricamente rispetto al piano. Osservo che, in base alla discontinuità del campo elettrico, si può ricostruire la densità di carica sulla superficie del conduttore: fuori il campo è noto dal metodo delle cariche immagine, dentro è nullo; $\Delta E = \frac{\sigma_{pol}}{\epsilon_0}$. Sfortunatamente, a parte questi semplici casi il metodo delle cariche immagine è di scarsa utilità pratica. Altre situazioni risolvibili in questo modo, solo leggermente più complicate, e che vi lasciamo per casa, sono le seguenti:

Problema 2.3. carica di fronte ad angolo retto di conduttore; carica di fronte a un piano con una protuberanza semisferica.

2.6 Sfera conduttrice in un campo uniforme

Immergiamo una sfera di metallo in un campo elettrico $\vec{E}$ uniforme e costante. Il campo dentro alla sfera deve essere 0, e questo vuol dire che la sfera dispone delle cariche sulla sua superficie in modo da creare un campo uniforme e costante dentro.

Esercizio: ricordando l'esercizio delle sfere sovrapposte e passando al limite, sapreste dire quanto vale la densità superficiale di carica sulla superficie della sfera, in funzione dell'angolo?

Un campo uniforme e costante è anche il limite del campo di una carica puntiforme sempre più grande e lontana. Se la teoria è consistente, ci aspettiamo di trovare lo stesso risultato. Come abbiamo imparato prima, una carica puntiforme $-q$ a distanza r (x positiva) da una sfera conduttrice neutra di raggio a produce un campo che si può descrivere inserendo una carica immagine di valore $q' = q \frac{a}{r}$ in posizione $r' = \frac{a^2}{r}$, e una carica immagine $q'' = -q'$ al centro. Se la carica è sempre più lontana, il campo che arriva sulla sfera sarà sempre più simile a un campo uniforme e costante, mentre le due cariche immagine sulla sfera saranno sempre più vicine. Se la carica è talmente lontana che le linee di campo ci arrivano quasi parallele, allora

$$\vec{E} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{x}$$

e quindi

$$q \approx 4\pi\epsilon_0 E r^2$$

Questo vuol dire che le cariche immagine che dobbiamo mettere nella sfera valgono

$$q' = q \frac{a}{r} \approx 4\pi\epsilon_0 E a r = -q''$$

Le due cariche immagine sono a distanza

$$\delta = \frac{a^2}{r}$$

e quindi tendono a un dipolo di valore

$$\vec{p} = q'\vec{\delta} = 4\pi\epsilon_0\vec{E}a^3$$

In effetti, abbiamo calcolato in un altro modo il momento di dipolo delle due sfere cariche parzialmente sovrapposte (convincetevi che i due problemi sono equivalenti).

2.7 Oscillazioni di Mie

Immaginiamo ora che le due sfere non siano più bloccate al loro posto, ma siano libere di muoversi sotto la forza dell'altra. Chiamiamo x_1 e x_2 le posizioni dei centri delle due sfere lungo un asse che li congiunge (possiamo scegliere l'origine in modo che $x_1 = -x_2$). Se entrambe le sfere hanno massa M , e il loro centro di massa coincide con il centro geometrico, allora

$$\begin{cases} M \frac{d^2 x_1}{dt^2} = QE(x_1) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} (x_1 - x_2) \\ M \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -QE(x_2) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} (x_2 - x_1) \end{cases}$$

che ha soluzione (a meno di una fase)

$$\begin{cases} x_1 = \delta_0 \cos(\omega_p t) \\ x_2 = -\delta_0 \cos(\omega_p t) \end{cases}$$

dove $\omega_p = \sqrt{\frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0 a^3 M}}$ è talvolta chiamata la *frequenza di plasma* del sistema. Da lontano, vediamo un dipolo che oscilla armonicamente:

$$\vec{p} = \vec{p}_0 \cos(\omega_p t)$$

Queste oscillazioni si osservano davvero in laboratorio: ad esempio, possiamo immaginare di usare un campo molto forte per separare di pochissimo gli elettroni e i nuclei di un conduttore (in questo caso, una delle due sfere è molto più pesante dell'altra, e non è difficile rendersi conto che la frequenza di plasma si abbassa di un fattore $\sqrt{2}$ rispetto quella del nostro esercizio). Questo modo di oscillazione è un primo esempio di *plasmone*.

Problema 2.4. Rifare il presente esercizio con cilindri e con lastre sovrapposte, ed esprimere la frequenza di plasma in funzione della densità di elettroni n_e nel materiale.

2.8 Irraggiamento di dipolo

Le oscillazioni non continueranno all'infinito, anche supponendo che non ci sia alcun attrito. Infatti, l'energia dell'oscillatore verrà irraggiata in onde elettromagnetiche. L'elettrodinamica prevede che le cariche accelerate irrraggino. Se una particella di carica q si sta muovendo con un'accelerazione di modulo a (in regime non relativistico), la *formula di Larmor* ci dice che sta irraggiando una potenza

$$P = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} q^2 a^2$$

Da questo si dimostra facilmente che un dipolo variabile nel tempo irraggia una potenza

$$P = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left| \frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} \right|^2$$

Nel nostro caso, questo significa che le due sfere stanno irraggiando una potenza istantanea

$$P(t) = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} Q^2 \delta^2 \omega_p^4 \cos^2(\omega_p t) = \frac{Q^6}{24\pi^3 \epsilon_0^3 a^6 M^2 c^3} \delta^2 \cos^2(\omega_p t)$$

Ora, per semplificarci di molto la vita, sostituiamo al coseno al quadrato il suo valore medio, ovvero $\frac{1}{2}$. Questo passaggio è legittimo se supponiamo che le oscillazioni si smorzino su una scala temporale molto maggiore di quella di un periodo. L'equazione diventa

$$\bar{P} = -\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} Q^2 \delta^2 \omega_p^4 \overline{\cos^2(\omega_p t)} = \frac{Q^4}{12\pi^2 \epsilon_0^2 M a^3 c^3} \omega_p^2 \delta^2$$

e, ricordando che l'energia totale di un'oscillatore armonico che oscilla con ampiezza δ è $\mathcal{E} = \frac{1}{2} m \omega^2 \delta^2$,

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{Q^4}{6\pi^2 \epsilon_0^2 a^3 M^2 c^3} \mathcal{E}$$

Quindi l'energia irraggiata si smorza esponenzialmente, con un tempo caratteristico

$$\tau = \frac{6\pi^2 \epsilon_0^2 a^3 M^2 c^3}{Q^4}$$

Visto che l'energia è proporzionale al quadrato dell'ampiezza di oscillazione, poiché $(e^{t/\tau})^2 = e^{2t/\tau}$ ne consegue che quest'ultima si smorza con un tempo caratteristico

$$\tau' = 2\tau = \frac{12\pi^2 \epsilon_0^2 a^3 M^2 c^3}{Q^4}$$

Problema 2.5. Verificare che il τ che abbiamo calcolato ha le dimensioni di un tempo.

Problema 2.6. Sotto quali condizioni l'approssimazione che abbiamo fatto è ragionevole?

3 Circuiti

Un circuito elettrico è fatto di varie componenti collegate fra loro da cavi in cui può scorrere corrente I . Abbiamo le due leggi di Kirchhoff:

- Per un nodo (un punto del circuito di incontro fra più cavi) la somma delle correnti entranti nel nodo è uguale alla somma delle correnti uscenti
- Per una maglia (una sequenza di rami di circuito chiusa) vale che la somma delle ddp su tutti gli elementi è zero (nel caso di campi magnetici variabili vale $-\frac{\partial\Phi(\vec{B})}{\partial t}$). Nel caso statico dunque a ogni punto del circuito può essere assegnato un potenziale V

Generatori e resistenze Un generatore ideale di differenza di potenziale è un elemento circuitale che aumenta il potenziale a un suo capo rispetto all'altro. Tuttavia esiste anche di un diverso tipo di generatore: un generatore di corrente ideale è un elemento circuitale che genera una corrente costante I , indipendente dalla ddp ai suoi capi (che in generale non è nulla!). Una resistenza R è un elemento che genera una caduta di potenziale ai suoi capi quando attraversata da corrente. Nel caso più semplice la resistenza si dice *ohmica* e la relazione che lega la corrente e la ddp è la legge di Ohm $I = \frac{\Delta V}{R}$. Nel caso di più resistenze in serie la serie di resistori è rimpiazzabile con un solo resistore di resistenza la somma delle resistenze $R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$, sostituzione che lascerà invariato il comportamento del resto del circuito semplificandone lo studio. Analogamente per resistenze in parallelo vale $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \dots + \frac{1}{R_n}$. Un resistore dissipa energia nel tempo, e vale per la potenza dissipata $P = I\Delta V$ (che è vera in generale; per resistenze ohmiche si può scrivere anche $I^2 R$ o $\frac{\Delta V^2}{R}$). Infine menzioniamo che nel caso si parlasse di generatore "non ideale" si intende il voler tenere conto della dissipazione di energia che si ha mentre il generatore opera: allora il generatore "reale" si rappresenta nel circuito come un generatore (ideale) collegato in serie con una resistenza interna r nel caso di un generatore di tensione, mentre la resistenza va in parallelo nel caso di un generatore di corrente.

Condensatori Un condensatore è fatto di due superfici conduttrici poste a breve distanza (ed eventualmente separate da un dielettrico) sulle quali si può accumulare una carica Q . Fra le due piastre vi sarà allora una ddp ΔV per la quale vale $C = \frac{Q}{\Delta V}$, con C una costante, detta capacità del condensatore. Si può dimostrare che nel caso di condensatori in parallelo la capacità equivalente è la somma $C_{eq} = C_1 + \dots + C_n$, mentre per condensatori in serie vale $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \dots + \frac{1}{C_n}$. I condensatori possono avere strutture diverse, ma le più frequenti sono 2 facce piane parallele, due cilindri coassiali, due sfere concentriche (le definizioni date restano). Talvolta si usa parlare della capacità di un conduttore C "rispetto a infinito", senza che ve ne sia un altro. In tal caso ciò che si chiede è: posta una carica Q sul conduttore, qual è il potenziale V sullo stesso (assumere $V=0$ a infinito)? La capacità del singolo conduttore è definita come $\frac{Q}{V}$. Per esercizio calcoliamo la capacità di un condensatore cilindrico. Partiamo descrivendone la geometria: sono due cilindri coassiali di raggi a e b e altezza h ; pongo una carica Q sul cilindro interno e una $-Q$ su quello esterno. Voglio calcolare il campo elettrico fra le due facce così da ricavare la ddp. Da Gauss su un cilindretto coassiale alle piastre cilindriche con raggio di base r e altezza h ho

$$2\pi r h E_r = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

da cui

$$\Delta V = \int_a^b E_r dr = \frac{Q}{2\pi h \epsilon_0} \int_a^b \frac{1}{r} dr = \frac{Q}{2\pi h \epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

da cui $C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{2\pi h \epsilon_0}{\ln(\frac{b}{a})}$. Per spessori piccoli, cioè $b = a + \delta$ con $\delta \ll a$, posso approssimare il logaritmo con $\ln(\frac{a+\delta}{a}) = \ln(1 + \frac{\delta}{a}) \approx \frac{\delta}{a}$. Allora

$$C \approx \frac{2\pi h a \epsilon_0}{\delta} = \epsilon_0 \frac{Area}{\delta}$$

Il risultato $\frac{Area}{separazione}$ non sorprende troppo perchè fisicamente l'approssimazione vuol dire che consideriamo il campo elettrico costante nell'intercapedine, perciò la ddp fra le facce si calcola come $E \cdot separazione$; d'altra parte nel calcolo del campo elettrico entra in gioco proprio l'area della superficie.

Problema 3.1. Quale sarà allora la capacità di un condensatore sferico sottile? (Non servono integrali!)

Circuito RC Affrontiamo anche il problema di carica (scarica per esercizio) di un condensatore: abbiamo un generatore di forza elettromotrice (ideale)

$\mathcal{E}$ collegato in serie con una resistenza R e un condensatore C . Abbiamo una sola maglia su cui applicare Kirchhoff II, e si ha

$$\mathcal{E} = \frac{Q}{C} + IR$$

dove, fissato un certo tempo t , Q e I sono carica sul condensatore e corrente nel circuito a quell'istante. La prima importante osservazione è che la corrente I , essendo la medesima sia nel condensatore che nella resistenza (per Kirchhoff I), in un tempo dt aumenta la carica sul condensatore di $dQ = Idt$. In altre parole $I = \frac{dQ}{dt}$. Allora abbiamo un'equazione differenziale in $Q(t)$ che governa il circuito e la risolviamo provando una soluzione $Q(t) = A + Be^{Dt}$; buttandola dentro l'equazione differenziale e imponendo la validità per ogni t si hanno 2 condizioni:

$$\frac{B}{C} = -BDR$$

e

$$\frac{A}{C} = \mathcal{E}$$

da cui, ponendo $\tau = RC$

$$Q(t) = C\mathcal{E} + Be^{-\frac{t}{\tau}}$$

Infine dobbiamo imporre che al tempo iniziale il condensatore sia scarico: $Q(0) = 0$, da cui risolvendo per B ho

$$Q(t) = C\mathcal{E}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{C\mathcal{E}}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Notare come asintoticamente la carica raggiunga $C\mathcal{E}$, ovvero sia condensatore carico al massimo e nessuna corrente in circolo. Nel caso di scarica del condensatore il circuito è condensatore collegato a una resistenza e il risultato è

$$Q(t) = C\mathcal{E}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Induttanza e circuito con campo magnetico L'ultimo elemento circuitale di cui parliamo è l'induttanza: questo elemento è realizzato normalmente con un solenoide e la legge che lo governa è $\Phi(B) = LI$ con L una costante detta induttanza, che dipende dalla geometria dell'elemento. Per capire gli effetti di un campo magnetico in un circuito consideriamo un circuito fatto di due resistenze r_1 e r_2 , senza generatori (e inizialmente senza voltmetro), dentro il quale mettiamo un campo magnetico variabile. Diciamo

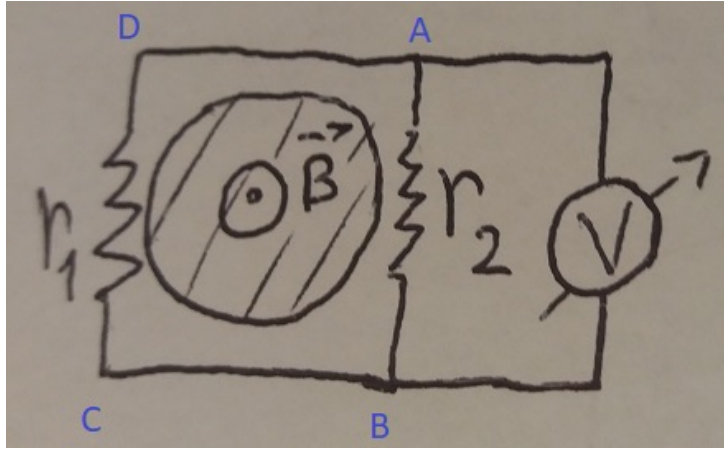


Figura 2

che in un certo istante la variazione del flusso di B è $\mathcal{E}$. So dalla legge di Faraday-Lenz che la corrente circola in senso orario (pollice uscente, le dita in senso antiorario, Lenz mette un segno meno), e che $\Delta V_1 + \Delta V_2 = \mathcal{E}$, dove ΔV_1 è la caduta di potenziale su r_1 , cioè la ddp $C - D$, mentre ΔV_2 è $A - B$ (dunque entrambe sono positive). La corrente I si conserva nel circuito, da cui $I(r_1 + r_2) = \mathcal{E}$. Ora introduciamo un voltmetro fra A e B polarizzato in modo da leggere la caduta di potenziale $A - B$. Un voltmetro non è altro che una resistenza molto grande R della quale conosco la corrente che la attraversa. Risolvo allora il nuovo circuito: considerando la maglia fatta da r_2 e R a cui posso applicare Kirchhoff II (non vi è flusso variabile entro questa maglia!) capisco che la caduta di potenziale su r_2 è la stessa che su R . Allora sono felice perchè il voltmetro leggerà la caduta di potenziale $A - B$, che si calcola essere $\mathcal{E} \frac{r_2}{r_1 + r_2}$. Al contrario se metto il voltmetro dall'altro lato (senza cambiargli orientazione) ho che la maglia senza flusso variabile è quella fatta da r_1 e R , perciò il voltmetro ora, *per il semplice fatto di averlo spostato*, legge una ddp = $-\mathcal{E} \frac{r_1}{r_1 + r_2}$ (il meno viene dal fatto che il voltmetro calcola la ddp $D - A$, che in questo caso è negativa). Questo problema illustra la non conservatività (poco intuitiva) del campo elettrico nel caso di campi magnetici variabili.

Induttanza del solenoide e circuito RL Tornando ora all'induttanza, calcoliamola nel caso semplice di un solenoide di lunghezza l , numero di spire N , raggio delle spire a e corrente circolante I . Abbiamo che il campo all'interno del solenoide è $\mu_0 \frac{N}{l} I$, ci sono N spire di area $a^2 \pi$ perciò $\Phi(B) = a^2 \pi N \mu_0 \frac{N}{l} I$, da cui osserviamo correttamente la proporzionalità fra $\Phi(B)$ e I ; allora $L = a^2 \pi \mu_0 \frac{N^2}{l}$. Per capire meglio la fisica dell'induttanza mettiamo L in un

circuito, inizialmente aperto, in serie con una resistenza R e un generatore di emf $\mathcal{E}$.

Chiudendo il circuito abbiamo che la corrente inizia a scorrere, ma l'induttanza si oppone alla variazione e la corrente cresce nel tempo. L'equazione del circuito, deducibile dalla legge di Faraday-Lenz, è

$$\mathcal{E} = IR + L \frac{dI}{dt}$$

Provo una soluzione $I(t) = A + Be^{CT}$. Ottengo, imponendo la validità per ogni t e che per $t = 0$ sia $I = 0$, che $I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-\frac{tR}{L}})$. Osserviamo dunque che la corrente cresce fino a raggiungere il suo massimo. Nel caso si apra il circuito la corrente scenderà come $I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{tR}{L}}$. Notiamo che in questo caso l'induzione avviene perchè vi è una corrente indotta nel circuito che è indotta dalla variazione di corrente nel circuito stesso (ciò che genera il campo magnetico variabile). Si parla in questo caso di auto-induttanza.

4 Induzione

4.1 Motore omopolare

Prendiamo un cilindro magnetizzato di raggio a , che genera sulla sua superficie superiore un campo magnetico B uniforme e diretto lungo $\hat{z}$. Creiamo un circuito collegando con un filo di resistenza R tra il centro della base del cilindro con il bordo. Mediante un generatore, interponiamo tra centro e bordo una differenza di potenziale V_0 , che produce quindi una corrente $I(0) = V_0/R$. Il campo magnetico esercita su ciascun pezzettino del filo percorso da corrente una forza azimutale $dF = BIdl$, e quindi un momento torcente lungo $\hat{z}$

$$\tau = \int_0^a r dF = \int_0^a r B I dr = \frac{a^2 B V_0}{2R}$$

che mette in moto il cilindro.

Il cilindro non accelera all'infinito: una volta in rotazione, infatti, la differenza di potenziale tra centro e bordo diminuisce, fino ad annullarsi ad una certa velocità angolare. Ricordiamo che la differenza di potenziale fra due punti è il lavoro che si deve compiere su una carica unitaria per spostarla dal punto iniziale a quello finale. Se il cilindro non è fermo, ma ruota con una velocità angolare ω , allora ogni pezzettino di filo gira con una velocità tangenziale $v = \omega r$, facendo subire agli elettroni dentro una forza di Lorentz

$\vec{F} = evB\hat{r} = eB\omega r\hat{r}$. Durante tutto il tragitto dal centro al bordo del cilindro, la forza di Lorentz ha compiuto un lavoro

$$\Delta U = \int_0^a \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^a eB\omega r dr = \frac{eB\omega a^2}{2}$$

che corrisponde a una differenza di potenziale

$$V' = -\frac{B\omega a^2}{2}$$

che va a sottrarsi alla tensione fornita dalla pila.

Un altro modo di trovare lo stesso risultato è usare la legge di Faraday-Neumann. Per farlo, dobbiamo capire bene come calcolare il flusso del campo magnetico. Il campo magnetico rimane fisso, però il flusso sta cambiando, perché il circuito si muove. Se il filo si muove con una velocità angolare ω , sta spazzando un'area

$$\frac{dA}{dt} = \frac{a^2\omega}{2},$$

(perché in un periodo spazzerebbe πa^2) e quindi il flusso del campo magnetico sta variando come

$$\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = \frac{a^2\omega B}{2}.$$

Ritroviamo quindi la stessa espressione per V' .

Denotando con J il momento d'inerzia del cilindro, l'equazione completa è quindi

$$J \frac{d\omega}{dt} = \frac{a^2 B}{2R} (V_0 + V') = \frac{a^2 B}{2R} (V_0 - \frac{a^2 \omega B}{2})$$

Con la condizione al contorno che $\omega(t=0) = 0$, la soluzione è

$$\omega(t) = \omega_\infty (1 - e^{-t/\tau})$$

dove $\omega_\infty = \frac{2V_0}{a^2 b}$ e $\tau = \frac{2RJ}{a^4 B^2}$.

4.2 Un modello per il campo magnetico terrestre: la dinamo ad autoeccitazione

Se si fa ruotare un disco di materiale conduttore (con resistenza non nulla) di raggio r con una velocità angolare ω , in un campo magnetico $\vec{B}$ uniforme e perpendicolare al disco, la forza di Lorentz sugli elettroni genererà una differenza di potenziale tra il centro e il bordo del disco, il cui valore è dato da:

$$\Delta V = \frac{\omega B r^2}{2} = \frac{\omega \Phi(\vec{B})}{2\pi}$$

Un dispositivo del genere è noto come *generatore omopolare*. Supponiamo che il circuito alimentato dalla differenza di potenziale così prodotta abbia un'induttanza pari a L e un coefficiente di mutua induzione M con il disco. Se nel circuito circola una corrente I , il flusso del campo magnetico attraverso il disco sarà (per la definizione di M):

$$\Phi(\vec{B}) = MI$$

e quindi:

$$\Delta V = \frac{\omega MI}{2\pi}$$

Ponendo uguale a R la resistenza totale del circuito, abbiamo allora che:

$$\frac{\omega MI}{2\pi} = RI + L \frac{dI}{dt}$$

Questa equazione differenziale ha soluzione:

$$I(t) = I(0)e^{\alpha t}, \quad \alpha = \frac{1}{L} \left(\frac{\omega M}{2\pi} - R \right)$$

Se $\omega < \frac{2\pi R}{M}$, il parametro α è negativo, e il sistema tenderà a stabilizzarsi in $I = 0$. Se invece $\omega > \frac{2\pi R}{M}$, qualunque perturbazione piccola a piacere del valore di I (o, equivalentemente, di $\vec{B}$) verrà amplificata esponenzialmente. Basta quindi far passare la dinamo in un piccolo campo magnetico esterno, affinché questa generi e sostenga un grande (tendente a infinito in questo modello semplificato) campo magnetico.

Si pensa che alla base del campo magnetico terrestre possano esserci processi di autoeccitazione analoghi a quello sopra descritto. Resta da postulare che la Terra abbia attraversato, nel corso della sua storia, un campo magnetico esterno sufficientemente intenso da scatenare il meccanismo (e non è chiaro come ciò potrebbe essere avvenuto).

Problema 4.1. Modificare il modello in modo che la corrente non vada all'infinito.

Soluzione problema 1.4

E' come avere un condensatore a facce piane e parallele con carica σ con dentro un secondo condensatore a facce piane e parallele con carica $\sigma_P = \sigma \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}$. Allora è chiaro che nel dielettrico il campo resta invariato,

poichè è la somma dei campi dei due condensatori; nello spazio che si è venuto a creare siamo dentro il primo condensatore ma fuori dal secondo, e ricordando che il campo di un condensatore al di fuori di esso è zero, si trova che nell'intercapedine si sente solo il campo $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$; all'esterno il campo è naturalmente 0.

Soluzione Sphereception

Diamo dei nomi: la sfera cava con il dipolo è s , quella più piccola con carica Q ha raggio a , quella messa a terra b e per il condensatore è c (faccia interna) con distanza fra le armature δ . Chiamo le sfere in base ai loro raggi.

Dipolo Per prima cosa bisogna capire che il campo dentro la sfera a (nella "polpa") è nullo, per proprietà di conduttore. Che il campo di dipolo venga annullato è possibile perchè la carica in a si riorganizza in modo da realizzare ciò. Dobbiamo però domandarci se, per conservazione della carica totale, non compaia una carica netta ulteriore sulla superficie di a . La risposta è che ciò non avviene poichè il dipolo è complessivamente neutro (le due cariche sono opposte), dunque anche la carica si forma sulla sfera s è complessivamente nulla; se ci fosse stata, una carica opposta sarebbe comparsa sulla superficie di a . Dunque possiamo escludere il dipolo per il resto del problema. Per il suo campo, si veda la sezione sfera conduttrice in campo uniforme, presente negli appunti.

Condensatore Consideriamo ora solo il condensatore c , escludendo (sfruttando la linearità) tutto il resto. La sua capacità è $C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{4\pi c^2}{\delta}$, dunque abbiamo $Q_2 = C\Delta V$ e

$$\Delta V = \frac{Q_2 \delta}{\epsilon_0 \epsilon_r 4\pi c^2}$$

Osserviamo che il potenziale aumenta entrando, per via del segno delle cariche. Osserviamo inoltre che scegliere c o $c + \delta$ come raggio della sfera non fa differenza al primo ordine in δ , che è assunto piccolo rispetto a c . Il campo elettrico all'interno delle armature è costante e vale $E = \frac{\Delta V}{\delta}$ (nell'approssimazione di δ piccolo), mentre è nullo altrove.

Messa a terra Questa è forse la parte più difficile: assegnamo una carica q incognita alla sfera b e imponiamo che la differenza di potenziale fra b e l'infinito sia nulla. Per farlo dobbiamo "risalire" da infinito fino a b .

Per non confonderci possiamo fare questo in due pezzi, sfruttando la linearità delle equazioni: prima calcoliamo la differenza di potenziale fra b e infinito assumendo solo la presenza del condensatore c , poi assumendo solo la presenza delle sfere interne ed escludendo il condensatore. Sommando i due risultati otteniamo la ddp complessiva, che imporremo essere nulla risolvendo per q incognita.

Consideriamo solo il condensatore: il campo elettrico è nullo fuori dalle due armature (dove non c'è dielettrico), mentre all'interno il potenziale aumenta del ΔV calcolato prima. Dunque il potenziale è 0 fuori, dentro il condensatore cresce (linearmente, come in ogni condensatore con facce vicine), dentro c è costante di nuovo e vale ΔV .

Ora pensiamo di rimuovere le armature del condensatore che portavano carica Q_2 . E' legittimo rimuovere anche il dielettrico? No! Difatti le sfere interne generano un campo elettrico che polarizzerà il dielettrico inducendo una carica di polarizzazione, e non possiamo trascurare questo effetto. Fuori da b la carica che "vedo" è $Q + q$. Dunque il campo elettrico fuori dal dielettrico è

$$E_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q + q}{r^2}$$

mentre nel dielettrico è

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{Q + q}{r^2}$$

Dobbiamo ora calcolare la differenza di potenziale fra infinito e b . Pensiamo di portare una carica di prova da b a infinito. $dV = E dr$ da integrare. Dunque

$$\Delta V = \int_b^c E_0 dr + \int_c^{c+\delta} E_r dr + \int_{c+\delta}^\infty E_0 dr$$

L'integrale $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}$, dunque viene

$$\frac{Q + q}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{\epsilon_r} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c + \delta} \right) + \left(\frac{1}{c + \delta} - \frac{1}{\infty} \right) \right]$$

Sviluppando in Taylor $\frac{1}{c + \delta} \approx \frac{c - \delta}{c^2}$ si ha

$$\frac{Q + q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{b} - \frac{\delta}{c^2} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) \right]$$

Verificare i casi limite $\epsilon_r = 1$ e $\epsilon_r \rightarrow \infty$.

Sommando i due potenziali, ricordando ora $Q = Q_2$ e $\epsilon_r = 2$, imponendo che in b il potenziale sia 0, otteniamo dopo alcuni passaggi

$$q = \frac{-Q}{1 - \frac{\delta b}{2c^2}}$$

Essendo ora nota l'incognita q è possibile sostituire nelle formule precedenti e ricavare il campo elettrico sommando quello del condensatore a quello del resto.

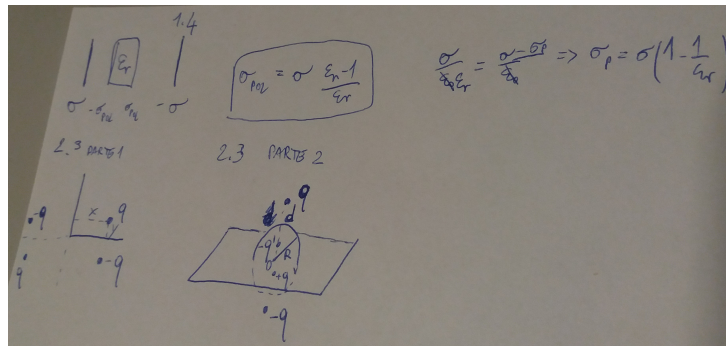


Figura 3

Soluzione problema 2.3

Parte 1

Ho due semipiani conduttori infiniti che formano un angolo retto fra loro e metto una carica puntiforme q a distanza x da uno e y dall'altro; voglio trovare il campo nella regione con questa carica. Si può intuire che le cariche immagine da mettere sono simmetriche rispetto ai 2 semipiani, arrivando quindi a 4 cariche disposte come in figura. Osservo che non sono state aggiunte cariche nella regione di interesse e che la configurazione è invariante per la seguente azione: $q \rightarrow -q$ e poi riflessione rispetto a uno dei due piani. Come cambia il campo elettrico? Supponiamo ad esempio che nel semipiano "orizzontale" il campo elettrico abbia una componente non ortogonale al piano. Allora sotto la simmetria di sopra tale componente del campo prima si inverte (cambio segno a tutte le cariche), poi rimane invariato (il vettore appartiene al piano rispetto a cui sto riflettendo); dunque complessivamente si inverte. Ma le sorgenti, essendo rimaste uguali, devono dare un campo

uguale a prima, dunque non è possibile avere componenti non ortogonali ai 2 semipiani. Se il campo elettrico è sempre ortogonale ai 2 semipiani allora essi sono equipotenziali (vedi sezione 1.4), dunque ho soddisfatto tutte le richieste necessarie per asserire che nella zona di interesse il campo delle due configurazioni (quella di 1 carica con conduttori e quella con 4 cariche senza conduttori) è uguale.

Parte 2

Immagino il piano coincidente col piano xy, la semisfera centrata nell'origine e di raggio R , la carica q posta a quota d sopra l'origine (lungo z). Chiamo q' , d' la carica e la distanza che si usano per la carica immagine in una sfera del medesimo raggio. Metto una carica q' a quota d' , una $-q'$ a quota $-d'$, una q a quota $-d$. Allora si verifica che la coppia di cariche sopra (risp la coppia di sotto) rende la semisfera equipotenziale (è come nel caso della sfera da sola). Inoltre per antisimmetria rispetto al piano deduco che anche il piano è equipotenziale (si applica il ragionamento di parte 1). Dunque la configurazione funziona, poichè tutto il "conduttore" (materialmente assente nella configurazione immagine) è equipotenziale, e le cariche aggiunte sono nella regione non di interesse.

Soluzione problema 2.4

Fissata una densità di carica p , il modulo del campo elettrico di una lastra piana infinita vale $E = \frac{\rho}{\epsilon_0}r$; quello di un cilindro infinito $E = \frac{\rho}{2\epsilon_0}r$, e quello di una sfera $E = \frac{\rho}{3\epsilon_0}r$.

Procedendo in modo del tutto analogo a quanto fatto con le sfere (e trascurando gli effetti di bordo, cioè il fatto che i cilindri e le lastre non siano infinite), troviamo che per due cilindri di raggio a e altezza h la frequenza di oscillazione è $\omega_p^2 = \frac{3Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2 h M}$; mentre, per una lastra piana di area A e spessore h , $\omega_p^2 = \frac{3Q^2}{2\pi\epsilon_0 A h M}$. Supponiamo ora che ad oscillare sia una nube di elettroni, di densità di carica $\rho = -en_e$ (i protoni sono molto più pesanti, e possiamo considerarli fermi). Allora, nel caso della lastra, la forza di richiamo sentita da un elettrone è

$$m_e \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{e^2 n_e}{\epsilon_0} r$$

(per il cilindro o la sfera, basta aggiungere 2 o 3 al denominatore), e quindi la frequenza di plasma è

$$\omega_p^2 = \frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e}$$

Soluzione problema 2.6

Per poter sostituire il coseno al quadrato con il valore medio $\frac{1}{2}$, serve che lo smorzamento delle oscillazioni sia molto più lento del periodo, cioè che $\tau \gg \frac{1}{\omega_p}$. Sostituendo, questo vuol dire che deve valere

$$\frac{6\pi^2\epsilon_0^2a^3M^2c^3}{Q^4} \gg \sqrt{\frac{2\pi\epsilon_0a^3M}{Q^2}}$$

Eliminando le costanti dell'ordine dell'unità e semplificando, la condizione da soddisfare risulta

$$\left(\frac{\epsilon_0Mc^2}{Q^2}\right)^{3/2} \gg 1$$

Soluzione problema 3.1

La sua area è $4\pi r^2$, il suo spessore è $d \ll r$, dunque la capacità è $C = \epsilon_0 \frac{4\pi r^2}{d}$

Soluzione problema 4.1

Ci sono molti modi di farlo. Ad esempio, si potrebbe postulare che il comportamento del filo non sia perfettamente descritto dalla legge di Ohm, cioè che la resistenza non sia costante. Qualunque sia la funzione che lega la resistenza alla corrente, possiamo approssimarla con uno sviluppo al primo ordine, scrivendo

$$R(I) = R_0 + \epsilon I + \epsilon' I^2 + \epsilon'' I^3 + \dots \approx R_0 + \epsilon I$$

Con questa assunzione l'equazione diventerebbe

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{L} \left(\frac{\omega M}{2\pi} - R_0 - \epsilon I \right) I$$

, che ammette una soluzione stazionaria, indipendente da L ,

$$I = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\omega M}{2\pi} - R_0 \right)$$

Un'altra possibilità potrebbe essere considerare la variazione della resistenza con la temperatura. Chiamiamo C la capacità termica del circuito. L'energia termica dissipata dal filo è $E_{diss} = \int_0^t I^2(t') R dt'$; se viene tutta convertita in calore, allora la temperatura del filo è

$$T(t) = T_0 + C E_{diss} = T_0 + C \int_0^t I^2(t') R(t') dt'$$

Ipotesizzando che la variazione della resistenza sia lineare nella variazione di temperatura, $\Delta R = \lambda \Delta T$, possiamo allora scrivere

$$R(t) = R(0) + C \lambda \int_0^t I^2(t') R(t') dt'$$

Questa è un'equazione integro-differenziale, e non occorre provare a risolverla per capire che non ammette soluzioni stazionarie. Infatti, la temperatura può solo aumentare, e quindi alla fine dei secoli la corrente tenderà asintoticamente a 0. Per ovviare a questo inconveniente, possiamo mettere anche un meccanismo di dissipazione del calore; il lettore è incoraggiato a inventare delle possibilità (naturalmente non serve risolvere le equazioni per trovarne le soluzioni stazionarie; è sufficiente porre $I(t)$ costante).