

Problemi conclusivi

Raffaele Salvia*

10 febbraio 2018

1 Età del nucleo terrestre

In questo esercizio cercheremo di capire di se, a causa degli effetti relativistici, il centro della Terra sia più giovane o più vecchio della superficie, e di quanto. Alla differenza di età concorrono due effetti. Vista dal centro la superficie terrestre si muove, e questo tende a far scorrere più lentamente il tempo della superficie; ma si trova anche a un potenziale gravitazionale più alto rispetto alla superficie, e questo tende ad accelerarla. Quale dei due effetti vince?

Iniziamo dalla dilatazione dei tempi dovuta alla gravità. Talvolta viene citata, attribuendola a Feynman, l'affermazione che il nucleo terrestre sarebbe più giovane di “uno o due giorni” rispetto alla superficie in virtù di questo effetto. Come è stato fatto notare di recente, questo non è l'ordine di grandezza giusto: in realtà, sono uno due anni. Prima di tutto, dobbiamo avere una formula per la dilatazione dei tempi causata dalla gravità. Prendiamo della luce di frequenza ν_0 , che possiamo vedere anche come un insieme di “fotoni” di energia $E = h\nu$. I fotoni hanno una massa a riposo nulla, ma una *massa relativistica* pari a

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu_0}{c^2}$$

. Se il fotone si sposta in un altro punto, in cui il potenziale gravitazionale è più alto di ΔV , la sua energia aumenterà di $m\Delta V$. Di conseguenza, la sua frequenza sarà variata di

$$\Delta\nu = \frac{\nu_0\Delta E}{h} = \frac{\Delta V}{c^2}$$

*raffaele.salvia@sns.it

Quindi, se usiamo questa frequenza per misurare il tempo, la differenza fra i tempi segnati dai due orologi sarà

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta E}{h} = \frac{\Delta V}{c^2}$$

Questo è tutta la Relatività Generale di cui abbiamo bisogno.

Supponiamo che la Terra sia una sfera di raggio R , massa M e densità omogenea. Per il teorema di Gauss, la forza gravitazionale all'interno della sfera è

$$\vec{F} = -\frac{GMr}{R^3}\hat{r}$$

Integrando, e imponendo che il potenziale all'infinito sia 0 (e quindi che quello sulla superficie sia $V(r=R) = -\frac{GM}{R}$), troviamo il potenziale gravitazionale all'interno della sfera

$$\vec{F} = \frac{GM}{2R^3}r^2 - \frac{3GM}{2R}$$

Il potenziale al centro della Terra è quindi $V(r=0) = \frac{3GM}{2R}$, e la differenza di potenziale gravitazionale fra centro e superficie è:

$$\Delta V = V(R) - V(0) = \frac{1}{2} \frac{GM}{R}$$

Chiamiamo $T_{\oplus}$ l'età della superficie della Terra. Per quanto detto prima, e usando che $g = \frac{GM}{R^2}$, la differenza tra le età di centro e nucleo è allora data da

$$\Delta T = T_{\oplus} \frac{\Delta V}{c^2} = -T_{\oplus} \frac{GM}{2Rc^2} = -T_{\oplus} \frac{gR}{2c^2}$$

Il raggio terrestre è di circa $R \approx 6000$ km, e la velocità della luce circa $c \approx 300000$ km/s, quindi $\frac{R}{2c} \approx 0,01$ s. Due coincidenze utili da ricordare sono che $\frac{c}{g} \approx 1$ anno, e che 1 anno $\approx \pi \cdot 10^7$ s. L'età della Terra è di circa $4,5 \cdot 10^9$ anni. In definitiva, possiamo stimare

$$\Delta T \approx -\frac{4,6 \cdot 10^9 \text{ anni}}{1 \text{ anno}} \frac{10^{-2} \text{ s}}{\pi \cdot 10^7 \text{ s/anno}} \approx -1,4 \cdot 10^9 \text{ anni}$$

Se inseriamo dei numeri più accurati ($T_{\oplus} = 4,54 \cdot 10^9$ anni; $g = 9,81$ m/s²; $R = 6371$ km; $c = 299792458$ m/s), otteniamo

$$\Delta T = -T_{\oplus} \frac{gR}{2c^2} \simeq -1,58 \text{ anni}$$

Questa è una sottostima, perché la densità della Terra è più alta vicino al centro, e quindi la differenza di potenziale gravitazionale è maggiore.

Passiamo ora alla differenza di età dovuta alla rotazione terrestre. La velocità tangenziale con cui ruota la superficie terrestre, a una latitudine θ si può calcolare con

$$v = \frac{2\pi R}{1 \text{ giorno}} \sin \theta$$

La velocità di rotazione terrestre in passato era più alta, quindi anche questa è una sottostima. Ora, sappiamo che le placche si muovono, e possiamo immaginare che, nel corso della sua storia, ogni atomo abbia viaggiato a varie latitudini. In maniera alquanto rozza e sbrigativa, prendiamo una “latitudine media” $\sin \theta = \frac{1}{2}$, sicché

$$v = \frac{\pi R}{1 \text{ giorno}} \approx 230 \text{ m/s}$$

Questo vuol dire che

$$\beta = \frac{v}{c} \approx 8 \cdot 10^{-7}$$

e quindi, dato che

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \approx 1 + \frac{\beta^2}{2}$$

abbiamo $\gamma - 1 \approx 3 \cdot 10^{-13}$

Se sulla superficie misuriamo un intervallo di tempo $T_{\oplus}$, nel sistema di riferimento del nucleo si misura un tempo $T'_{\oplus} = \gamma T_{\oplus}$, e quindi la differenza fra le due età è

$$\Delta T = T'_{\oplus} - T_{\oplus} = (\gamma - 1)T_{\oplus} \approx 3 \cdot 10^{-13} \cdot 4,5 \cdot 10^9 \text{ anni} \simeq 10^{-4} \text{ anni}$$

. Questo effetto è trascurabile rispetto a quello stimato in precedenza. Quindi il nucleo terrestre è più giovane della crosta, con una differenza di età dell'ordine di un paio di anni.

2 Sfere riscaldate

Nella prima edizione delle Olimpiadi Internazionali di Fisica, a Varsavia nel 1967, fu assegnato il seguente problema. Consideriamo due sfere identiche omogenee, A e B, con la stessa temperatura iniziale. Una delle due poggia sopra un piano orizzontale, mentre la seconda è appesa a una corda. La stessa quantità di calore è fornita ad entrambe le sfere. La temperature finali delle due sfere sono uguali o diverse? Tutti i processi che dissipano calore sono trascurabili.

Questo problema compare oggi in un gran numero di raccolte, e il modo comunemente accettato di svolgerlo è quello di supporre che le sfere si dilatino con la temperatura, e di imporre una conservazione dell'energia, considerando sia l'energia termica che quella meccanica. Assumiamo quindi che l'energia interna delle sfere dipenda solo dalla temperatura. Chiamiamo C_0 la capacità termica delle due sfere ad altezza del centro di massa costante, e α il coefficiente di dilatazione lineare (in modo che il raggio delle sfere vari come $dR = \alpha dT$). Riscaldando le due sfere, il centro di massa della sfera appoggiata si alza, mentre quello della sfera appesa si abbassa. La prima sfera guadagna un'energia potenziale gravitazionale

$$dU = Mg\alpha dT,$$

mentre la seconda ne perde altrettanta. Se forniamo un calore δQ ad entrambe le sfere, la conservazione dell'energia si scrive come

$$Q = C_0 dT \pm Mg\alpha dT$$

da cui

$$dT = \frac{\delta Q}{C_0 \pm Mg\alpha}$$

con la sfera appesa che si riscalda di più di quella appoggiata al tavolo. Le capacità termiche vanno definite sempre mantenendo costante qualcosa; in questo caso, abbiamo calcolato le capacità termiche mantenendo costanti altezza del punto più alto ed altezza del punto più basso.

Possiamo contentarci di questa soluzione; nondimeno, nel 2015 è stato osservato che modo di affrontare il problema è inconsistente con la seconda legge della termodinamica. Infatti, come vedremo, le ipotesi che abbiamo fatto ci permettono di costruire una macchina termica più efficiente di quella reversibile.

Prendiamo la palla appoggiata sul tavolo, a una temperatura T_1 . Per prima cosa la riscaldiamo a una temperatura $T_2 = T_1 + dT$. Per farlo dobbiamo fornirle un calore $\delta Q_1 = (C_0 + Mg\alpha R)dT$. Il centro di massa della sfera si alzerà di $dR = \alpha R dT$.

Mantenendo il centro di massa allo stesso livello, appendiamo la sfera con un filo. Rimettiamo poi la sfera a contatto con un bagno termico a temperatura T_1 (il serbatoio freddo). Perdendo una temperatura dT , la sfera cede al bagno termico una quantità di calore $\delta Q_2 = -(C_0 - Mg\alpha R)dT$. Il centro di massa si alza di un altro $\alpha R dT$.

In definitiva, abbiamo alzato il centro di massa della sfera di $2dR = 2\alpha R dT$, e facendola ricadere sul tavolo possiamo ricavarne un lavoro $dL = 2Mg\alpha R dT$.

Per far ciò, abbiamo dovuto fornire con la sorgente calda una quantità di calore $\delta Q_1 = (C_0 + Mg\alpha R)dT$. Il rendimento di questo ciclo è:

$$\eta = \frac{dL}{\delta Q_1} = \frac{2Mg\alpha R}{C_0 + Mg\alpha R}$$

Questo rendimento non dipende da dT , e in particolare non tende a 0 quando dT tende a 0. Abbiamo costruito una macchina termica più efficiente di quella di Carnot!

Questo problema mostra che, se non facciamo attenzione alle ipotesi che inseriamo nel nostro modello, possiamo facilmente trovare conclusioni contraddittorie. Altri esempi sono i *paradossi di Painlevé*, che derivano dal voler mettere insieme il concetto di corpo rigido col modello elementare di attrito statico e dinamico; oppure il prossimo problema.

3 Troppe conservazioni

Un'asta rigida di lunghezza l è incardinata tra due anelli concentrici di raggio a e $a+l$. I vincoli sono perfettamente lisci (e se non lo sono, li possiamo livellare), cosicché possono esercitare solo una forza perpendicolare. C'è la gravità.

All'istante iniziale, l'asta si trova in posizione orizzontale. La lasciamo cadere. Cosa succede? L'energia si conserva, perché non ci sono attriti. Inoltre si conserva il momento angolare rispetto al centro di massa, perché le reazioni vincolari sono parallele all'asta, e la forza di gravità agisce sul centro di massa. Le reazioni vincolari nell'istante iniziale non possono avere alcuna componente lungo $\hat{y}$, dunque la risultante delle forze punta verso il basso. Di conseguenza, la sbarra deve accelerare verso il basso. Questo implica, per la conservazione dell'energia, che debba acquistare velocità; ma questo è impossibile, perché metterebbe in rotazione la sbarra, violando la conservazione del momento angolare. Quindi la sbarra non può iniziare a cadere, ma non può nemmeno restare ferma.

Il modello che abbiamo costruito è contraddittorio: non è logicamente consistente immaginare che in questa situazione si possano conservare energia e momento angolare, e che il vincolo sia liscio.

Problema 3.1. Invece di una sbarra unidimensionale, prendiamo due sbarre, collegate nel loro mezzo (i punti di contatto coi vincoli diventano 4). Analizzare cosa succede quando la separazione fra le due sbarre tende a 0.

4 Matita in equilibrio sulla punta

Problema 4.1. Trovare un limite superiore al tempo in cui possiamo tenere una matita ben temperata in equilibrio sulla sua punta, usando il principio di indeterminazione.

5 Tempi di urinazione dei mammiferi

Misurando il tempo t_u impiegato ad urinare dagli animali dello zoo di Atlanta, dei ricercatori hanno constatato che esso non sembra dipendere dalle dimensioni e dalla massa dell'animale, ed è in media sempre uguale a 21 s (sebbene con una grande deviazione standard, pari a 13 s).

Problema 5.1. Usando questa informazione, e argomenti di analisi dimensionale, determinare se la principale forza responsabile della minzione sia la gravità oppure la pressione del muscolo, e se il comportamento dell'urina sia dominato dall'inerzia o dalla viscosità.

6 Temperatura della Terra

In questo esercizio vedremo una versione alquanto semplificata di una classe di teorie realmente usate in climatologia, e noti come *modelli a bilancio di energia zero-dimensionale* (“zero-dimensionale” perché tutto il pianeta è descritto da una sola temperatura media).

Conosciamo, per misura diretta, la quantità di energia irraggiata dal Sole sulla terra:

$$I = 1370 \text{ W/m}^2$$

Possiamo stimare la temperatura della Terra con questo dato? Se la temperatura è costante, il flusso di energia entrante deve essere uguale al flusso uscente. Se la Terra fosse un corpo nero, allora

$$I = \sigma T^4$$

e quindi

$$T = \left(\frac{I}{\sigma}\right)^{1/4} \simeq 354 \text{ K}$$

Decisamente troppo. Cerchiamo di trovare una stima migliore. Per prima cosa, ci stiamo dimenticando che ogni tanto fa notte. Visto che la Terra

assorbe da una sola direzione, ma emette da tutta la sua superficie, allora possiamo porre

$$I\pi R^2 = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

che corrisponde a una temperatura $T \simeq 279$ K: una stima sorprendentemente accurata, considerando la semplicità del modello che abbiamo usato.

La Terra assorbe principalmente nel visibile, ed emette nell'infrarosso. In quest'ultima regione si comporta approssimativamente come un corpo nero, mentre nel visibile ha una certa costante di emittività c . Per un principio molto generale, che lega il segnale in ingresso e quello in uscita di tutti i sistemi lineari, questo implica che nella regione della luce visibile la Terra assorbe solo una frazione c dell'energia che le arriva, che chiameremo *coalbedo*; mentre il resto viene riflesso. Quanto vale il coalbedo? Tra un ghiacciaio e un deserto c'è una certa differenza, quindi il coalbedo deve dipendere dalla temperatura media della Terra T . Il terriccio e l'acqua allo stato liquido hanno $c_{max} \simeq 0,7$, quindi questo sarebbe il valore del coalbedo se la superficie della Terra fosse composta unicamente da essi (ossia a temperature molto alte). Se invece fosse tutto ghiaccio, avremmo un coalbedo $c_{min} \simeq 0,35$.

Ci serve una funzione che valga circa c_{min} per temperature molto basse, e circa c_{max} per temperature molto alte, con un raccordo intorno agli zero gradi. Una funzione che ha le caratteristiche che desideriamo è la tangente iperbolica: possiamo porre

$$c(T) = c_{min} + \frac{1}{2}(c_{max} - c_{min})(1 + \tanh(\gamma T))$$

dove il parametro γ serve a controllare quanto velocemente sale la funzione. A $T \simeq 400$ K sicuramente non c'è più ghiaccio, quindi una buona scelta può essere $\gamma = 0,05 \text{ Ka}^{-1}$.

L'equazione di prima diventa

$$c(T)I = 4\sigma T^4$$

Per trovare i punti di equilibrio, dobbiamo quindi risolvere

$$I \left(c_{min} + \frac{1}{2}(c_{max} - c_{min})(1 + \tanh(\gamma T)) \right) - 4\sigma T^4 = 0$$

Questa funzione parte positiva a $T = 0$; poi scende sotto lo zero all'aumentare di T^4 , risale sopra lo 0 quando il ghiaccio si scioglie e l'albedo aumenta; e infine ridiscende definitivamente sotto lo 0.

Ci sono quindi tre punti di equilibrio: uno in cui la Terra è fredda perché è chiara e riflette il calore; uno in cui la Terra è calda è scura e lo assorbe; e uno

in mezzo, circa alla temperatura in cui si scioglie il ghiaccio. Quest'ultimo punto di equilibrio corrisponde, evidentemente, allo stato in cui si trova la Terra attualmente.

Sfortunatamente, si tratta di un punto di equilibrio *instabile*. Infatti, la funzione passa dallo 0 con derivata positiva; quindi, se aumenta un pochino la temperatura, la Terra comincia ad assorbire più calore di quanto ne emetta, e quindi la temperatura aumenta ancora; e viceversa.

Esercizio: risolvere numericamente l'equazione, e trovare la temperatura di equilibrio. Confrontare quella di mezzo con la vera temperatura media della Terra, $T = 288\text{ K}$.

Nel corso della sua storia, la Terra è precipitata più volte nel punto di equilibrio freddo. È possibile risalire alla temperatura $T(t)$ che la Terra aveva in passato in diversi modi, ad esempio contando il numero di certi tipi di radiolari nei sedimenti oceanici, oppure misurare l'eccesso dell'isotopo ^{18}O nei foraminiferi.

7 Evaporazione dei buchi neri

Problema 7.1 (adattato da IPhO 2007). Nella Relatività Generale esiste un congettura abbastanza ben fondata, e a cui molti fisici credono abbastanza da chiamarla *teorema*: il *No Hair Theorem*, che asserisce che i buchi neri con stessa massa, carica elettrica e momento angolare sono indistinguibili.

Qui considereremo solo buchi neri neutri e che non girano. Quindi, tutto dipende solo dalla massa.

1. Usando considerazioni di analisi dimensionale, trovare una formula che legghi l'area dell'orizzonte degli eventi di un buco nero alla sua massa.

Quando qualcosa cade in un buco nero, sparisce per sempre dall'universo osservabile, quindi apparentemente riduce il numero di gradi di libertà dell'universo, causando un abbassamento dell'entropia. Per salvare il secondo principio della termodinamica, possiamo provare ad assegnare un'entropia ai buchi neri. Una possibilità è quella di definire un'entropia proporzionale all'area (la massa di un buco nero può solo aumentare, quindi anche la sua area può solo aumentare). Poniamo quindi $S = \eta A$.

2. Trovare una formula per η

La teoria quantistica dei campi prevede che possano nascere dal vuoto delle effimere coppie particella-antiparticella, che si annichiloscono immediatamente restituendo l'energia che avevano "preso in prestito". Hawking, pensando

a come mettere insieme la relatività generale con la meccanica quantistica, ha pensato che se una coppia di particelle virtuali nasce poco al di fuori dell'orizzonte degli eventi di un buco nero, e una delle due particella ci cade dentro mentre l'altra riesce a sfuggire. L'effetto finale è che il buco nero emette una particella. Questa è la radiazione di Hawking. Il buco nero perderebbe gradualmente energia (e quindi massa) fino ad "evaporare". Aspettando un tempo che, già per un buco nero di una massa solare, è di molto superiore all'età dell'universo, alla fine del buco nero non dovrebbe rimanere più nulla.

3. Supponendo che il buco nero non compia lavoro sull'ambiente, ricavare la temperatura dall'entropia con un argomento termodinamica.
4. usando il risultato precedente, e trattando il buco nero come un corpo nero, scrivere un'equazione differenziale per la perdita di massa del buco nero
5. Semplificare il risultato esprimendo la costante di Boltzmann σ in termini delle costanti fondamentali. Il fattore davanti è $\frac{2\pi^5}{15}$.
6. Ripetere l'esercizio mettendoci anche la radiazione cosmica di fondo, per effetto della quale il buco nero assorbe continuamente un'energia proporzionale alla sua area. C'è una massa a cui la dimensione del buco nero non cambia? Se sì, cosa succede al di sopra e al di sotto di questa massa di equilibrio?

8 Serbatoio alla deriva

Problema 8.1 (APhO 2017). ¶ Questo problema vuole studiare la dinamica di un detrito spaziale. Per tale scopo, consideriamo la schematizzazione in figura 1 di uno stadio di un *Kerbodine 42*:

In particolare, la circonferenza centrata in C rappresenta un serbatoio sferico di carburante. Introduciamo un sistema di riferimento Cxy solidale con il razzo, con origine nel centro di massa C . L'asse x è un'asse di simmetria cilindrica per il sistema e i momenti di inerzia intorno agli assi x e y sono rispettivamente J_x e J_y (con $J_x < J_y$).

Parte A. Rotazione.

Assumiamo che il serbatoio sia vuoto e che sul razzo non agisca alcuna forza o momento torcente. Consideriamo una configurazione generica in cui il momento angolare $\vec{L}$ forma un angolo θ con l'asse di simmetria del razzo, come in figura 2:

¹Scritto da Giuseppe Bogna (giuseppe.bogna@sns.it)

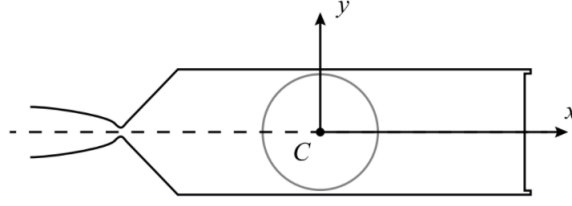


Figura 1: Schematizzazione del razzo.

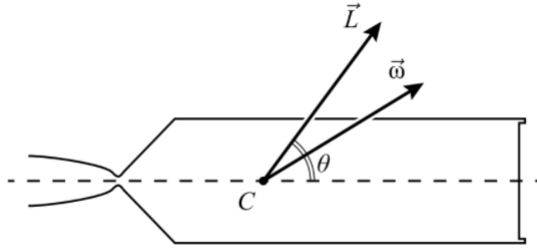


Figura 2: Rotazione del razzo.

1. Trovare componenti della velocità angolare $\vec{\omega}$ nel sistema solidale con il razzo, sapendo che $\vec{L} = J_x \omega_x \hat{x} + J_y \omega_y \hat{y}$ in funzione di $L = |\vec{L}|$, θ e dei momenti di inerzia J_x e J_y .
2. Trovare l'energia rotazionale E in funzione di L e $\cos \theta$.

Consideriamo ora una rotazione libera del razzo, con la condizione iniziale $\theta(0) = \theta_0$. Sia inoltre $\hat{x}_0$ la direzione che ha l'asse di simmetria del razzo per $t = 0$ in un qualunque sistema inerziale.

3. Usando delle leggi di conservazione, trovare l'angolo massimo ψ che forma l'asse $\hat{x}$ con la sua direzione iniziale $\hat{x}_0$ per $t > 0$ (Suggerimento: dato che il momento torcente agente sul razzo è nullo, $\vec{L}$ è una costante del moto).

Introduciamo ora il sistema di riferimento $Cx_1y_1z_1$ con asse y_1 diretto lungo il momento angolare $\vec{L}$. Questo sistema ruota intorno all'asse y_1 in modo che l'asse di simmetria del razzo sia sempre nel piano x_1y_1 , come in figura [3](#)

4. Esprimere, in funzione di L , θ_0 , J_x e J_y , la velocità angolare $\Omega(t)$ del sistema di riferimento $Cx_1y_1z_1$ intorno all'asse y_1 . Dare inoltre l'espressione della velocità angolare $\vec{\omega}_s(t)$ del razzo nel sistema $Cx_1y_1z_1$

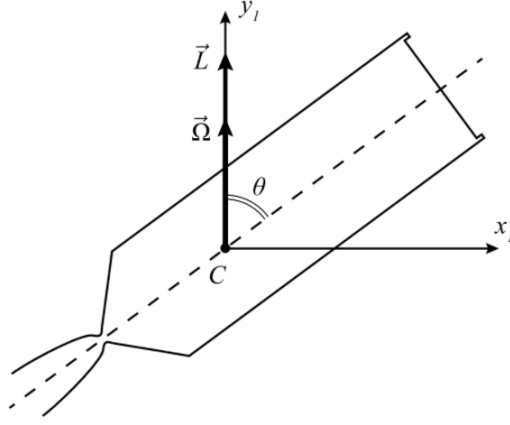


Figura 3: Precessione.

e dell'angolo $\gamma_s(t)$ che forma rispetto all'asse di simmetria del razzo (Suggerimento: vale $\vec{\omega} = \vec{\Omega} + \vec{\omega}_s = \vec{\omega}_x + \vec{\omega}_y$).

Parte B. Transiente iniziale

La maggior parte del propellente viene utilizzata mentre il razzo viene portato in orbita. Tuttavia, dopo tale fase rimane un po' di carburante nel serbatoio. La massa m del carburante rimanente è trascurabile rispetto alla massa M del razzo, nonostante ciò il moto del liquido e le forze viscosi fanno perdere parte dell'energia al sistema. Dopo un transiente iniziale, l'energia raggiunge il suo valore minimo.

5. Trovare il valore θ_2 dell'angolo θ dopo il transiente, per valori arbitrari di L e di $\theta(0) = \theta_1 \in (0, \pi/2)$.
6. Trovare il valore ω_2 della velocità angolare ω dopo il transiente, in funzione di $\omega(0) = \omega_1$ e dell'angolo $\gamma(0) = \gamma_1$ formato da $\vec{\omega}_1$ con l'asse di simmetria del razzo, come in figura [4](#).

Parte C. Campo magnetico.

L'interazione del razzo con il campo magnetico terrestre è un fattore importante per la dinamica del razzo. Consideriamo in un primo momento un problema ausiliario sulle correnti parassite. Consideriamo un guscio sferico molto sottile di raggio R e spessore D immerso in un campo magnetico uniforme $\vec{B}$, che cambia lentamente nel tempo in modo che $\dot{\vec{B}}$ formi un angolo costante α con $\vec{B}$. Il guscio ha resistività ρ .

7. Trascurando l'autoinduttanza del guscio, trovare il momento magnetico indotto $\vec{\mu}$ e darne le componenti rispetto al sistema xyz in figura [5](#).

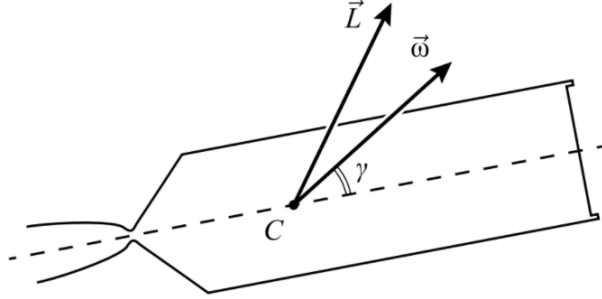


Figura 4: Angolo tra velocità angolare e asse del razzo.

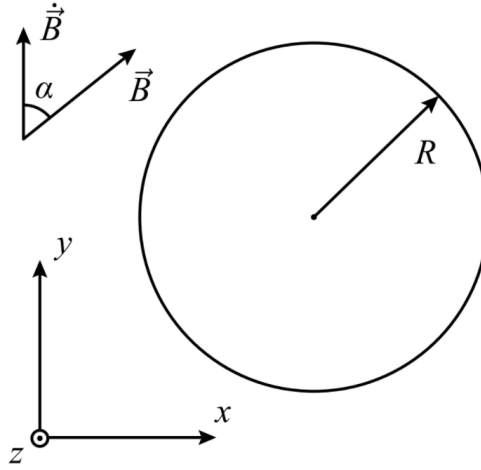


Figura 5: Guscio sferico in campo magnetico esterno.

8. Trovare, nello stesso sistema, il momento torcente $\vec{\tau}$ agente sul guscio.

Torniamo ora al razzo e consideriamo un'orbita circolare in un piano contenente i poli terrestri. Sia T il periodo con cui viene percorsa l'orbita. Supponiamo che il transiente iniziale sia terminato e che la velocità angolare iniziale del razzo sia $\vec{\omega} = \vec{\omega}_2$, perpendicolare al piano dell'orbita. Il campo magnetico terrestre $\vec{B}_E$ può essere modellizzato come il campo generato da un dipolo $\vec{\mu}_E$ posto nel centro della Terra. Ricordiamo che in un punto a distanza $\vec{r} = r\hat{r}$ dal dipolo tale campo è della forma

$$\vec{B}_E = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{\mu}_E \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{\mu}_E}{r^3}$$

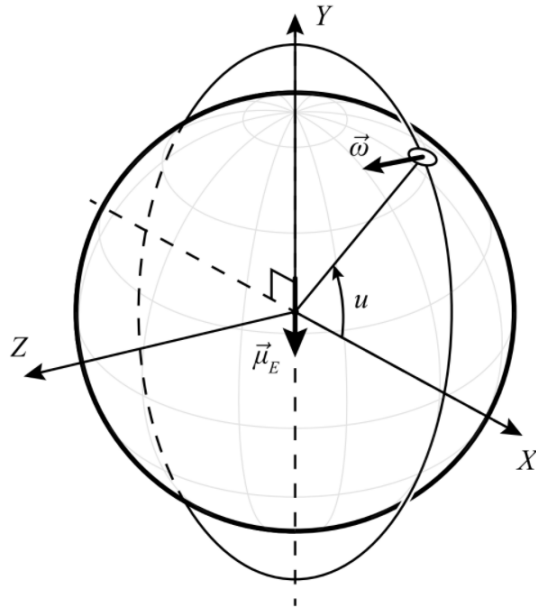


Figura 6: Orbita del razzo.

9. Esprimere nel sistema XYZ le componenti di $\vec{B}_E(u)$, dove u è l'angolo in figura 6 (può essere comodo esprimere la risposta in funzione di $2u$).
10. Trovare, nello stesso sistema, le componenti del momento torcente $\vec{\tau}$ agente sul razzo quando questo ruota con velocità angolare $\vec{\omega}$ diretta lungo Z , sapendo che il serbatoio di carburante è l'unica parte metallica del razzo (indicate con ρ la sua resistività).
11. Trovare il modulo della velocità angolare $\omega(t)$ in funzione del tempo, sapendo che varia in maniera trascurabile in un singolo periodo.
12. Dopo un tempo sufficientemente lungo, il razzo entra in uno stato stazionario. Trovare in questo stato il rapporto tra periodo orbitale T e periodo di rotazione T_s .

Soluzioni (parziali) ai problemi conclusivi

Giuseppe Bogna*, Raffaele Salvia†

10 febbraio 2018

1 Matita in equilibrio sulla punta

Proviamo a mettere in equilibrio una matita di massa m e lunghezza $2l$ (in modo che il centro di massa sia a istanza l). Inevitabilmente, non la metteremo esattamente a $\theta = 0$, ma a un certo angolo θ_0 . Inoltre, non riusciremo a metterla esattamente ferma, ma avrà una certa velocità angolare iniziale ω_0 .

La componente tangenziale della forza di gravità è pari a $mg \sin \theta \approx mg\theta$, e l'accelerazione del centro di massa si può scrivere come $a = l\alpha$ (dove α è l'accelerazione angolare). Quindi

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \frac{g}{l}\theta(t)$$

Questa è un'equazione differenziale lineare, omogenea e del secondo ordine. La sua soluzione più generale è:

$$\theta(t) = Ae^{t/\tau} + Be^{-t/\tau}$$

con $\tau = \sqrt{l/g}$. Le condizioni iniziali sono che $\theta(0) = \theta_0$, e $\omega(0) = \omega_0$. Da questo si può trovare $A = \frac{1}{2}(\theta_0 + \omega_0\tau)$ e $B = \frac{1}{2}(\theta_0 - \omega_0\tau)$. L'esponenziale negativo va a 0, e quindi ben presto rimarrà solo

$$\theta(t) \approx Ae^{t/\tau} = \frac{1}{2}(\theta_0 + \omega_0\tau)e^{t/\tau}$$

Il principio di indeterminazione ci dice che $\Delta p \Delta x \geq \hbar$, cioè che $(l\theta_0)(ml\omega_0) \geq \hbar$. Questo vuol dire che

$$\omega_0 \geq \frac{\hbar}{ml^2\theta_0}$$

*giuseppe.bogna@sns.it

†raffaele.salvia@sns.it

e quindi che

$$\theta(t) \geq \frac{1}{2} \left(\theta_0 + \frac{\hbar\tau}{ml^2\theta_0} \right) e^{t/\tau}$$

Dalla diseguaglianza tra le medie aritmetica e geometrica, $x + \frac{a^2}{x} \geq a$, e quindi

$$\theta(t) \geq \frac{1}{2} \left(\theta_0 + \frac{\hbar\tau}{ml^2\theta_0} \right) e^{t/\tau} \geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar\tau}{ml^2}} e^{t/\tau} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar\tau}{ml^2}} e^{t/\tau}$$

Ponendo $\theta = 1$ e risolvendo per t , troviamo che la matita può resistere in equilibrio per un tempo massimo

$$t \leq \frac{1}{4} \sqrt{\frac{l}{g}} \ln \left(\frac{m^2 l^3 g}{h^2} \right)$$

La costante di Planck è $\hbar = 1,07 \cdot 10^{-34}$ Js. Calcolare il valore massimo di t , inserendo valori ragionevoli per massa e lunghezza della matita.

2 Tempi di urinazione dei mammiferi

Supponiamo che la taglia dell'animale, le dimensioni della vescica che la lunghezza dell'uretra siano esprimibili in funzione di una stessa lunghezza caratteristica L .

Supponiamo che l'urina sia un fluido ideale, e che la forza nel processo di urinazione sia quella di gravità. In questo caso, il tempo di urinazione sarà funzione della densità di forza gravitazionale sull'urina, ρg (di dimensioni $[l]^{-2}[m]^1[t]^{-2}$), della densità dell'urina ρ ($[l]^{-3}[m]^1$), e della lunghezza dell'uretra, proporzionale a quella dell'animale L . Dobbiamo combinarle per ottenere un tempo. Imponendo

$$t_u \propto (\rho g)^\alpha \rho^\beta L^\gamma$$

troviamo che la soluzione è

$$t_u \propto (\rho g)^{-1/2} \rho^{1/2} L^{1/2} = \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Dipende da L , quindi non va bene.

Proviamo quindi a supporre che la forza principale che spinge fuori l'urina non sia la gravità, ma le contrazioni muscolari. Oltre che di ρ e di L , il

tempo di minzione sarà allora funzione della pressione P fornita dal muscolo detrusore, di dimensione $[l]^{-2}[m]^1$. Ponendo quindi

$$t_u \propto (P)^\alpha \rho^\beta L^\gamma$$

troviamo

$$t_u \propto (\rho g)^{-1/2} \rho^{1/2} L^1 = L \sqrt{\frac{\rho}{P}}$$

Ancora peggio: dipende linearmente dalla lunghezza.

Dobbiamo tirare fuori e sperimentare qualche altra costante. Invece che pensare che la caratteristica principale dell'urina sia la sua densità ρ , possiamo usare la sua viscosità η (scegliamo o l'una o l'altra, perché altrimenti avremmo tre equazioni e quattro incognite). La viscosità ha dimensioni $[l]^{-1}[m]^1[t]^{-1}$. Se la forza dominante è la gravità, allora

$$t_u \propto (\rho g)^\alpha \eta^\beta L^\gamma$$

che ha soluzione

$$t_u \propto (\rho g)^{-1} \eta^1 L^{-1} = \sqrt{\frac{\eta}{\rho g l}}$$

In questo caso, gli animali più grandi urinerebbero più velocemente.

Rimane da provare il caso di un'urina viscosa e spinta prevalentemente dalla pressione del muscolo. In questo caso, le costanti in gioco sono la pressione del muscolo detrusore P , la viscosità η e la scala di lunghezza L . Ponendo

$$t_u \propto (P)^\alpha \eta^\beta L^\gamma$$

troviamo

$$t_u \propto (P)^{-1} \eta^1 L^0 = \frac{\eta}{P}$$

che non dipende dalle dimensioni dell'animale, in accordo con le osservazioni.

Di conseguenza, possiamo supporre che la principale forza responsabile dell'urinazione sia la pressione del muscolo, e che la risposta del fluido sia dominata dalla viscosità e non dall'inerzia.

3 Evaporazione dei buchi neri

1. L'area dell'orizzonte degli eventi di un buco nero sarà funzione solo della massa m , e di costanti universali. L'orizzonte degli eventi è la superficie oltre la quale nemmeno la luce riesce a scappare dalla gravità;

quindi, le uniche costanti che qui sembrano pertinenti sono la costante gravitazionale, G , e la velocità della luce c . Scriviamo quindi

$$A = f(m)G^\alpha c^\beta m^\gamma$$

dove $f(m)$ è un fattore adimensionale, che non possiamo determinare. dimensionalmente, dobbiamo avere che

$$[l]^2 = [l]^{3\alpha+\beta} [m]^{-\alpha+\gamma} [t]^{-2\alpha-\beta}$$

e quindi

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta = 2 \\ -\alpha + \gamma = 0 \\ -2\alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

. Ne "segue" che la formula che cerchiamo, a meno di qualche fattore ignoto davanti, sarà

$$A \propto \frac{G^2 m^2}{c^4}$$

2. Imponendo che la velocità di fuga sia maggiore o uguale di quella della luce, si ottiene

$$A = \frac{16\pi G^2}{c^4} m^2$$

Questa formula continua ad essere valida in Relatività Generale (seppur con delle sottigliezze su cosa si debba intendere per "area").

3. L'entropia è un'energia diviso per una temperatura ($[l]^2[m]^1[t]^{-2}[T]^{-1}$), quindi il coefficiente η dovrà avere dimensioni $[m]^1[t]^{-2}[T]^{-1}$. Vogliamo trovare una formula per η , e visto che crediamo nel teorema No Hair, η può dipendere solo da costanti fondamentali. Le costanti che connettono lunghezze, tempi, masse e temperature (e che un giorno forse vorrete porre uguali a 1) sono le seguenti:

- (a) La costante di gravitazione universale G , di dimensioni $[l]^3[m]^{-1}[t]^{-2}$;
- (b) La velocità della luce c , di dimensioni $[l]^1[t]^{-1}$;
- (c) La costante di Planck h , di dimensioni $[l]^3[m]^1[t]^{-2}$;
- (d) La costante di Boltzmann k_B , di dimensioni $[l]^2[m]^1[t]^{-2}[T]^{-1}$.

Poniamo quindi

$$\eta \propto G^\alpha c^\beta h^\gamma k_B^\delta$$

ossia

$$[m]^1[t]^{-2}[T]^{-1} \propto [l]^{3\alpha+\beta+2\gamma+2\delta}[m]^{-\alpha+\gamma+\delta}[t]^{-2\alpha-\beta-\gamma-2\delta}[T]^{-\delta}$$

per cui possiamo trovare gli esponenti con il sistema

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta + 2\gamma + 2\delta = 0 \\ -\alpha + \gamma + \delta = 1 \\ -2\alpha - \beta - \gamma - 2\delta = -2 \\ -\delta = -1 \end{cases}$$

Il risultato è che

$$\eta \propto \frac{k_B c^3}{Gh}$$

Hawking ha fissato la costante a $\frac{1}{4}$, cosicché

$$S_{BH} = \frac{k_B c^3}{4Gh} A$$

4. Immaginiamo che anche per la radiazione di Hawking valga la legge di Stephen-Boltzmann, secondo cui la potenza irradiata da un corpo nero a una temperatura T è data da $P = \sigma T^4 A$. La potenza irradiata dal buco nero, sottoforma di calore, è $dE = T dS$, quindi possiamo definire la "temperatura" del buco nero come

$$\begin{aligned} T^{-1} &= \frac{dS}{dE} = \frac{d}{d(mc^2)} \eta A = \frac{d}{d(mc^2)} \eta A = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dm} \frac{k_B c^3}{4Gh} A = \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{d}{dm} \frac{k_B c^3}{4Gh} \frac{16\pi G^2 m^2}{c^4} = m \frac{8\pi G k_B}{hc^3} \end{aligned}$$

Quindi il buco nero perde massa con una velocità

$$\frac{dm}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{dE}{dt} = -\frac{1}{c^2} \sigma T^4 A = -\frac{128\pi^2 \sigma h^3 c^6}{Gk_B^3} \frac{1}{m^2}$$

Da cui si ricava

$$m(t) = \sqrt[3]{m(0) - \frac{384\pi^2 \sigma h^3 c^6}{Gk_B^3} t}$$

A un tempo

$$t^* = \frac{m(0) G k_B^3}{384\pi^2 \sigma h^3 c^6}$$

il buco nero è completamente evaporato.

4 Serbatoio alla deriva

1. Si ha ovviamente

$$\omega_x = \frac{L \cos \theta}{J_x}$$

$$\omega_y = \frac{L \sin \theta}{J_y}$$

2. L'energia rotazionale da due contributi: la rotazione intorno all'asse x e la rotazione intorno all'asse y . Di conseguenza

$$E = \frac{1}{2} J_x \omega_x^2 + \frac{1}{2} J_y \omega_y^2 = \frac{L^2}{2J_x} + \frac{L^2}{2} \left(\frac{1}{J_x} - \frac{1}{J_y} \right) \cos^2 \theta \quad (1)$$

3. Anche E è una costante del moto. Di conseguenza, θ è costante, ovvero l'asse di simmetria del razzo si muove lungo un cono di semiapertura θ e asse $\hat{L}$. Allora

$$\psi = 2\theta_0$$

4. Dato che θ è costante, l'asse di simmetria del razzo è a riposo nel sistema $Cx_1y_1z_1$. Di conseguenza, $\vec{\omega}_s(t)$ deve essere sempre collineare con l'asse di simmetria, ossia

$$\gamma_s(t) = 0$$

Proiettando lungo gli assi del sistema solidale con il corpo si ottiene

$$\omega_s(t) + \Omega(t) \cos \theta_0 = \frac{L \cos \theta_0}{J_x}$$

$$\Omega(t) \sin \theta_0 = \frac{L \sin \theta_0}{J_y}$$

In particolare, Ω e ω_s non dipendono dal tempo

$$\Omega = \frac{L}{J_y}$$

$$\omega_s = \left(\frac{1}{J_x} - \frac{1}{J_y} \right) L \cos \theta_0$$

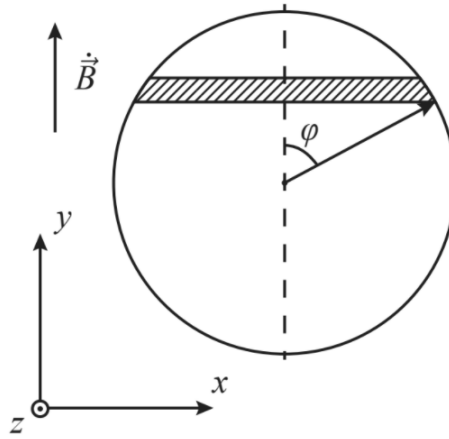
5. Dato che $J_x < J_y$, l'energia (1) è minima per

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

6. ω_2 si trova dalla conservazione del momento angolare, notando che dopo il transiente si ha $\vec{L} = J_y \omega_2 \hat{y}$. Si ottiene

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{\sqrt{J_x^2 \cos^2 \gamma_1 + J_y^2 \sin^2 \gamma_1}}{J_y}$$

7. Tagliamo il guscio in striscioline e introduciamo l'angolo φ come in figura. La f.e.m. indotta nella strisciolina è



$$\mathcal{E} = -\pi R^2 \sin^2 \varphi \dot{B}$$

La resistenza dr della strisciolina è invece

$$dr = \frac{2\pi\rho \sin \varphi}{D d\varphi}$$

Di conseguenza il momento magnetico della strisciolina è

$$d\vec{\mu} = -\hat{y} d\varphi \frac{\pi R^4 D \sin^3 \varphi \dot{B}}{2\rho}$$

Integrando su φ si ottiene infine

$$\vec{\mu} = -\frac{2\pi D R^4 \dot{B}}{3\rho} \hat{y}$$

8. Il momento torcente è

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = \frac{2\pi DR^4 \dot{B} B \sin \alpha}{3\rho} \hat{z}$$

9. Se d è il raggio dell'orbita e M_E è la massa terrestre, allora

$$\frac{1}{d^3} = \frac{4\pi^2}{GM_E T^2}$$

Allora si ottiene

$$\vec{B}_E(u) = \frac{\pi\mu_0\mu_E}{2GM_E T^2} \left[(3 \cos 2u - 1) \hat{Y} - 3 \sin 2u \hat{X} \right]$$

Poniamo per semplicità

$$B_0 = \frac{\pi\mu_0\mu_E}{GM_E T^2}$$

10. Dobbiamo calcolare la derivata temporale di $\vec{B}$ vista dal razzo. La variazione di $\vec{B}$ proviene da due contributi: il movimento del razzo lungo l'orbita e la rotazione del razzo intorno a un qualche proprio asse. Consideriamo quindi un sistema di riferimento xyz con asse z parallelo a Z e con il piano xy ruotato di un angolo β intorno a Z rispetto al piano XY . In questo sistema si ha

$$B_x = B_X \cos \beta + B_Y \sin \beta$$

$$B_y = -B_X \sin \beta + B_Y \cos \beta$$

Di conseguenza

$$\dot{B}_x = (B'_X(u) \cos \beta + B'_Y(u) \sin \beta) \dot{u} + (B_Y(u) \cos \beta - B_X(u) \sin \beta) \dot{\beta}$$

$$\dot{B}_y = (-B'_X(u) \sin \beta + B'_Y(u) \cos \beta) \dot{u} - (B_X(u) \cos \beta + B_Y(u) \sin \beta) \dot{\beta}$$

Sostituendo ora $\dot{u} = 2\pi/T$ e $\dot{\beta} = \omega$, dal punto 8 si ottiene

$$\vec{\tau} = \frac{2\pi}{3\rho} DB_0^2 R^4 \left(\frac{3\pi}{T} (3 - \cos 2u) - \frac{\omega}{2} (5 - 3 \cos 2u) \right) \hat{Z}$$

11. Dato che ω varia lentamente nel tempo, possiamo mediare $\vec{\tau}$ su un periodo

$$\langle \vec{\tau} \rangle = \frac{2\pi}{3\rho} DB_0^2 R^4 \left(\frac{9\pi}{T} - \frac{5\omega}{2} \right) \hat{Z}$$

Il momento torcente è parallelo all'asse di rotazione, che dunque non varia con il tempo. Allora si ha semplicemente

$$J_y \dot{\omega} = \frac{2\pi}{3\rho} D B_0^2 R^4 \left(\frac{9\pi}{T} - \frac{5\omega}{2} \right)$$

Integrando e ricordando $\omega(0) = \omega_2$, si ottiene

$$\omega(t) = \frac{18\pi}{5T} + \left(\omega_2 - \frac{18\pi}{5T} \right) e^{-\lambda t}$$

Dove si è posto

$$\lambda = \frac{5\pi D B_0^2 R^4}{3\rho J_y}$$

12. Il valore asintotico di ω è

$$\omega(t \rightarrow +\infty) = \frac{18\pi}{5T}$$

Di conseguenza il rapporto cercato è

$$\frac{T}{T_s} = \frac{T\omega(t \rightarrow +\infty)}{2\pi} = \frac{9}{5}$$