

Appunti di ottica fisica

Federico Belliardo *

8 Febbraio 2018

Sommario

Nella seguente lezione verranno illustrati alcuni degli aspetti basilari dell'ottica fisica e dell'interpretazione della luce come un'onda elettromagnetica.

1 Onde

I mezzi materiali possono propagare perturbazioni di densità e pressione chiamate onde. Nella loro forma più semplice esse soddisfano l'equazione d'onda. Alcune soluzioni di questa equazione sono funzioni sinusoidali che rappresentano onde che si propagano nello spazio e nel tempo con una frequenza e una direzione ben precisa. Esse sono del tipo:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = A \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + B \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$$

dove $\omega = c|\mathbf{k}|$. Un po' di terminologia: ω si chiama frequenza angolare, $\mathbf{k}$ è chiamato numero d'onda. Osserviamo che $\mathbf{k}$ è la direzione di propagazione dell'onda, esso definisce anche la periodicità spaziale dell'onda. Cioè percorrendo una distanza pari a λ nella direzione di propagazione l'onda ritorna ad avere la stessa forma il tutto ad un fissato istante temporale. Vediamo che $\lambda = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}|}$ dalla periodicità delle funzioni trigonometriche. Analogamente ω fissa la periodicità temporale ed è possibile definire il periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ e la frequenza $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$. Onde di questo tipo sono dette monocromatiche poiché hanno frequenza ben definita. Questa specificazione è resa necessaria dal fatto che la linearità dell'equazione d'onda rende possibile sommare due soluzioni a ω diverso per ottenere una nuova soluzione. La soluzione risultante non avrà una ben precisa frequenza. In generale possiamo sommare un'onda monocromatica di ampiezza arbitraria per ogni numero d'onda $\mathbf{k}$:

*federico.belliardo@sns.it

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int d^3\mathbf{k} [f(\mathbf{k}) \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + g(\mathbf{k}) \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})] \quad (1)$$

Nelle situazioni derivanti dalla meccanica la funzione ψ è un campo di pressione o densità. Vedremo che questa descrizione è però applicabile anche alla luce, costituita da campi di diversa natura.

2 La luce come onda elettromagnetica

La teoria di Maxwell prevede oscillazioni dei campi elettromagnetici che si propagano alla velocità della luce c . E' stato il più grande risultato della fisica dell'800 l'identificazione di queste perturbazioni del campo elettromagnetico come onde luminose. Le onde elettromagnetiche non necessitano di un mezzo in cui propagarsi, esse si muovono nel vuoto. Qui (nel vuoto) troviamo un pletora di soluzioni per i campi elettromagnetici, tra le quali abbiamo:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = \mathbf{E}_0 [\cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + i \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})] \quad (2)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = \mathbf{B}_0 [\cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + i \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})] \quad (3)$$

Queste sono dette onde piane. Il significato di questa notazione complessificata è che sia la componente con il coseno che quella con il seno risolvono l'equazione delle onde. Una loro combinazione lineare con numeri reali la risolve ancora, ma anche una combinazione con numeri complessi. Pertanto combinando le due soluzioni sfasate di $\frac{\pi}{2}$ otteniamo una nuova soluzione che è esprimibile semplicemente in termini di un numero complesso con fase dipendente dal tempo e dalla posizione. Avremmo potuto aggiungere anche una fase ϕ_0 :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \phi_0}$$

ma si può sempre scegliere $\phi_0 = 0$ ridefinendo l'origine dei tempi.

$\mathbf{E}_0$ trasporta l'informazione sulla polarizzazione dell'onda, cioè la direzione di oscillazione dei campi elettromagnetici. Come già detto il vettore d'onda $\mathbf{k}$ identifica la direzione di propagazione dell'onda come si capisce analizzando la forma funzionale. Le equazioni Maxwell fissano delle relazioni tra $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$ e $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \frac{\omega}{c} \mathbf{B}_0$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0$$

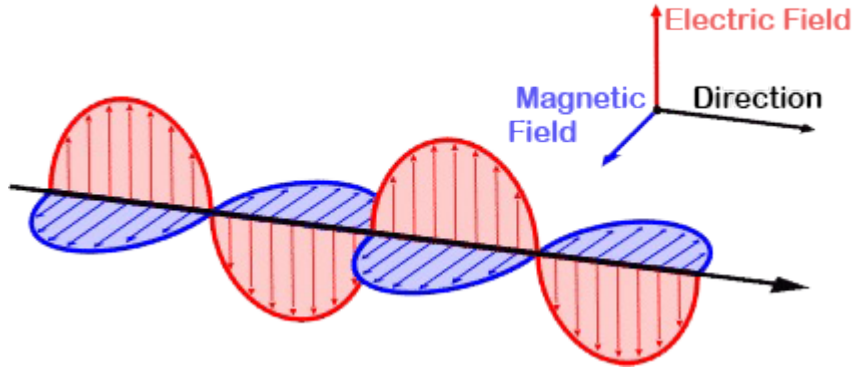


Figura 1: Un'onda elettromagnetica.

La prima viene dalla legge sull'induzione di Faraday e la seconda dalla legge di Gauss. Notiamo che per risolvere le equazioni di Maxwell i due campi elettrici e magnetici devono oscillare in fase di modo che si cancellino le dipendenze spazio temporali nelle equazioni di Maxwell (in forma differenziale). Abbiamo quindi che il campo elettrico e magnetico sono ortogonali alla direzione di propagazione e tra di loro e raggiungono insieme gli zeri, i massimi e i minimi.

Vediamo un'altra soluzione di onda elettromagnetica utile per i nostri scopi, le onde sferiche:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0 \left(\frac{l}{r} \right) e^{i\omega t - ikr}$$

dove l è una lunghezza caratteristica, quindi proporzionale alla lunghezza d'onda e r è la distanza dall'origine dell'onda sferica. Vale un'analogia espressione per $\mathbf{B}$. Nel seguito tratteremo spesso onde cilindriche, nelle quali il campo elettrico diminuisce sempre con il raggio (in coordinate cilindriche) allontanandosi dal centro. Si può capire questo fatto ragionando per analogia con il campo in un condensatore cilindrico.

Le onde trattate finora sono monocromatiche, cioè hanno una frequenza (ω e $\mathbf{k}$) definita. La somma di onde con frequenze diverse produce onde non monocromatiche. Come la luce sole che contiene tutte le frequenze del visibile (con intensità differenti).

L'intensità di un'onda elettromagnetica può essere definita come il modulo del vettore di Poynting. Aggiungiamo la media temporale per eliminarne le variazioni veloci (alla frequenza dell'onda):

$$\langle I \rangle = \langle |\mathbf{S}| \rangle = \left\langle \left| \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right| \right\rangle \propto \langle \mathbf{E}^2 \rangle$$

L'intensità rappresenta l'energia rilasciata per unità di tempo su un'unità di superficie ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda. In generale per qualsiasi tipo di onde l'intensità è proporzionale al quadrato dell'ampiezza:

$$I \propto |\psi|^2$$

Facciamo attenzione che considerare la soluzione complessa e prendere la parte reale e immaginaria alla fine dei calcoli è lecito finché facciamo operazioni lineari. Calcolare il flusso di energia non lo è dunque dobbiamo considerare le soluzioni reali. Le onde piane hanno intensità uniforme nello spazio. Mentre per le onde sferiche l'intensità diminuisce con il quadrato della distanza dal centro.

3 Generalità sull'interferenza

La somma di due soluzioni dell'equazione d'onda è ancora soluzione. Questo principio di linearità fa sì che sia relativamente facile studiare l'interferenza cioè la situazione per cui due onde generate indipendentemente vengono a sovrapporsi nello spazio (e eventualmente su uno schermo).

Studiamo l'interferenza tra due onde elettromagnetiche generiche:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}) + \mathbf{E}_0 \sin(\omega_2 t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} + \phi)$$

qui si è considerata anche una possibile differenza di fase tra le due onde ϕ . Calcoliamo il quadrato del campo:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^2 = & \mathbf{E}_0^2 \sin^2(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}) + \mathbf{E}_0^2 \sin^2(\omega_2 t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} + \phi) + \\ & + 2\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0 \sin(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}) \sin(\omega_2 t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} + \phi) \end{aligned} \quad (4)$$

Applichiamo la formula di Werner: $\sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ e otteniamo che il doppio prodotto si scrive:

$$\mathbf{E}_0^2 \cos(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \omega_2 t + \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} - \phi) - \mathbf{E}_0^2 \cos(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} + \omega_2 t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} + \phi)$$

Supponiamo che le due onde che interferiscono abbiano la stessa frequenza per esempio perché provengono dalla stessa sorgente e hanno subito una serie di riflessioni che ne hanno cambiato il vettore d'onda. Otteniamo:

$$\mathbf{E}_0^2 \cos(-\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} - \phi) - \mathbf{E}_0^2 \cos(2\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} + \phi)$$

Prendiamo la media temporale per ottenere l'intensità media della luce eliminando le variazioni a frequenze ottiche, ricordiamo che:

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$$

questo si può ricavare velocemente considerando che $\langle \cos^2 \omega t \rangle = \langle \sin^2 \omega t \rangle$ e $\langle \sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t \rangle = 1$. Passiamo alla media:

$$\langle \mathbf{E}^2 \rangle = \frac{\mathbf{E}_0^2 + \mathbf{E}_0^2}{2} + \mathbf{E}_0^2 \cos [(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{x} - \phi]$$

$$\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}_0^2 + \mathbf{E}_0^2 \cos [(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{x} - \phi] = \mathbf{E}_0^2 \{1 + \cos [(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{x} - \phi]\}$$

Osserviamo che se le onde non avessero avuto stessa frequenza la media temporale avrebbe eliminato entrambi i termini oscillanti, non permettendo la manifestazione dell'interferenza. Vediamo che vi sono alcuni punti dello spazio in cui l'intensità media dell'onda è nulla, in essi si realizza interferenza distruttiva. In altri l'intensità media è il doppio che per l'onda singole. Nel seguito lavoreremo con la teoria scalare della diffrazione, nell'ipotesi che le sorgenti siano di tipo laser (quindi a polarizzazione data) o che comunque gli apparati ottici considerati siano tali da far sovrapporre onde che mantengono coerenza di polarizzazione (e di fase).

4 La teoria scalare

Spesso nella teoria della diffrazione si opera la semplificazione di descrivere la luce mediante un solo campo scalare complesso $\psi(\mathbf{x}, t)$. Questa ipotesi permette di semplificare i calcoli poiché si trascurano le polarizzazioni dei raggi di luce cioè la natura vettoriale dei campi. Questa approssimazione verrà spesso usata nel seguito ma la sua validità va discussa caso per caso.

5 L'esperimento di Young

Procederemo ora all'analisi di un esperimento classico detto di Young che storicamente mostrò la natura ondulatoria della luce. Consideriamo un'onda piana monocromatica che incide su una parete su cui sono state praticate due sottili fenditure molto vicine, quanto sottili e quanto vicine sia necessario farle per osservare l'effetto lo si può discutere a posteriori. Non ci preoccuperemo di come ottenere una simile sorgente di luce monocromatica e coerente nello spazio e nel tempo ma supporremo semplicemente di poterla realizzare.

Scegliamo l'origine del sistema di coordinate in mezzo alle due fenditure, quando l'onda dietro la parete colpisce le fenditure si dirama da ognuna di

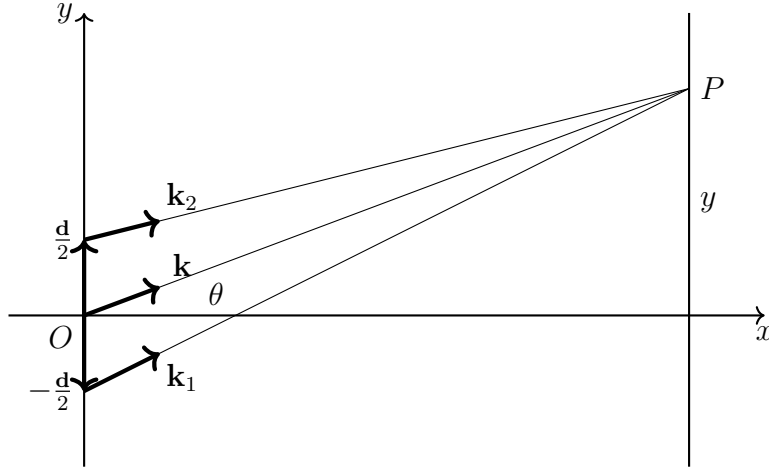


Figura 2: Esperienza di Young.

esse un'onda approssimativamente cilindrica. I dettagli di ciò verranno forniti nella sezione riguardante la diffrazione da fenditura. Le due onde nel punto in cui si trovano le fenditure devono essere in fase perché appartengono allo stesso fronte d'onda!

In un punto locato nella posizione (L, y) sullo schermo che riceve la luce arrivano in sostanza due onde piane provenienti dalle due fenditure. In effetti si può pensare all'onda uscente dalla fenditura come sovrapposizione di onde piane. In ogni punto dello schermo riceveranno soltanto le onde con il giusto vettore d'onda. Pertanto possiamo considerare le due onde piane:

$$\psi_1(\mathbf{x}, t) = \psi_0 \sin \left(\omega t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \mathbf{k}_1 \cdot \frac{\mathbf{d}}{2} \right)$$

$$\psi_2(\mathbf{x}, t) = \psi_0 \sin \left(\omega t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{k}_2 \cdot \frac{\mathbf{d}}{2} \right)$$

Trascuriamo la differenza di intensità delle due onde dovuta al differente cammino ottico per semplificare i calcoli. La differenza di fase è $\phi = (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_1) \cdot \frac{\mathbf{d}}{2}$.

il termine di interferenza diventa:

$$\cos \left[(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{x} - (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_1) \cdot \frac{\mathbf{d}}{2} \right] \quad (5)$$

Dunque calcoliamo questo argomento al primo ordine nel parametro $\frac{d}{L}$. Scriviamo innanzitutto i vettori d'onda, usando la notazione di indicare tra parentesi e componenti x e y di un vettore.

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_2 &= k \frac{(L, y - \frac{d}{2})}{\sqrt{L^2 + (y - \frac{d}{2})^2}} \\ \mathbf{k}_1 &= k \frac{(L, y + \frac{d}{2})}{\sqrt{L^2 + (y + \frac{d}{2})^2}}\end{aligned}\tag{6}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{L^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2} &= \sqrt{L^2 + y^2} \sqrt{1 - \frac{dy}{L^2 + y^2}} \sim \\ &\sim \sqrt{L^2 + y^2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{dy}{L^2 + y^2}\right)\end{aligned}$$

sostituendo nel vettore d'onda $\mathbf{k}_2$:

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_2 &= \frac{k}{\sqrt{L^2 + y^2}} \left(L, y - \frac{d}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{dy}{L^2 + y^2}\right) \sim \\ &\sim \frac{k}{\sqrt{L^2 + y^2}} \left(L + \frac{1}{2} \frac{dLy}{L^2 + y^2}, y - \frac{d}{2} + \frac{1}{2} \frac{dy^2}{L^2 + y^2}\right)\end{aligned}$$

Dunque se definiamo:

$$\mathbf{k} = \frac{k}{\sqrt{L^2 + y^2}} (L, y)\tag{7}$$

possiamo scrivere $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k} + \Delta\mathbf{k}$ e $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k} - \Delta\mathbf{k}$ con:

$$\Delta\mathbf{k} = \frac{k}{\sqrt{L^2 + y^2}} \left(\frac{1}{2} \frac{dLy}{L^2 + y^2}, -\frac{d}{2} + \frac{1}{2} \frac{dy^2}{L^2 + y^2}\right)\tag{8}$$

Poiché $\mathbf{k}_1$ si ottiene da $\mathbf{k}_2$ semplicemente sostituendo $d \rightarrow -d$ al primo ordine in d i due vettori si discostano da $\mathbf{k}$ per contributi opposti.

Dunque ritornando all'argomento del coseno che governa l'interferenza scriviamo:

$$(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{x} - (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_1) \cdot \frac{\mathbf{d}}{2} = 2\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{d}$$

dove abbiamo trascurato un'ulteriore termine quadratico in d .

Calcoliamo il primo termine:

$$\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \propto \frac{dL^2y}{L^2 + y^2} - dy + \frac{dy^3}{L^2 + y^2} = 0$$

Dunque al primo ordine in d l'interferenza è controllata dal termine $\mathbf{k} \cdot \mathbf{d} = \frac{k y d}{\sqrt{L^2 + y^2}} = k d \sin(\theta)$. Considerando l'approssimazione $y \ll L$ e teniamo solamente il primo ordine in y . Otteniamo $\mathbf{k} \cdot \mathbf{d} = \frac{2\pi y d}{L\lambda}$, dove abbiamo introdotto la lunghezza d'onda. L'interferenza è costruttiva quando

$$\frac{y d}{L\lambda} = n \quad (9)$$

con n intero.

Osservando che $\theta \sim \sin \theta \sim \tan \theta = \frac{y}{L}$ abbiamo l'equazione:

$$d\theta = n\lambda \quad (10)$$

L'interferenza distruttiva si ha ovviamente per n semi-intero.

Si può ricavare molto velocemente questa formula considerando che la differenza di cammino ottico tra i raggi uscenti dalle due aperture deve essere un numero intero di lunghezze d'onda per avere interferenza costruttiva.

6 Diffrazione da una fenditura

La diffrazione è il fenomeno per cui un'onda attraversando una piccola apertura da origine a delle frange luminose a intensità variabile a causa dell'interferenza con se stessa. Senza entrare nei dettagli della soluzione delle equazioni differenziali alle derivate parziali ad assegnate condizioni di bordo, che governano i fenomeni ondulatori introduciamo il principio di Huygens: ogni punto di un fronte d'onda è sorgente di un'onda sferica secondaria proporzionale al valore del campo nel punto in cui viene emessa. Applicheremo questo principio nel caso in cui si voglia studiare il campo al di là di un'apertura su cui incide un'onda, il quale si può esprimere come integrale su tutta la superficie dell'apertura delle onde sferiche che ogni punto del fronte d'onda che colpisce la fenditura emette.

$$\psi(P) \propto \int_S \psi(Q) \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} K(\chi) d^2 S \quad (11)$$

$K(\chi)$ è un fattore geometrico dipendente dagli angoli, che varia di punto in punto sull'apertura. Da un fronte d'onda di fatto dipartono delle emisfere in ogni punto, le onde non retro-propagano! $K(\chi)$ codifica il fatto che l'onda sferica emessa da un punto non è isotropa ma predilige la direzione normale al fronte d'onda in quel punto ed è nulla nella direzione trasversale, cioè sul piano tangente al fronte. Esso modifica le intensità con cui arrivano le onde

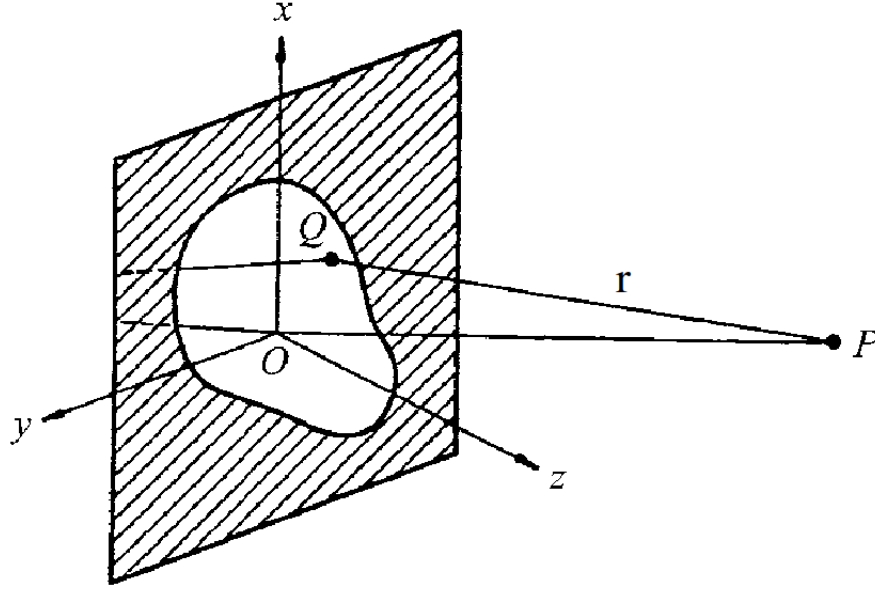


Figura 3: Principio di Huygens.

nel punto P ma non la loro fase, per semplificare i calcoli questa variazione di intensità sarà trascurata e $K(\chi)$ sarà assunto costante su tutta l'apertura.

Ora studieremo la diffrazione da una fenditura lineare verticale. Di fatto il problema è bidimensionale perché si può ottenere la soluzione in tutto lo spazio traslando la soluzione bidimensionale nella direzione verticale. In sostanza le onde che escono dalla fenditura sono cilindriche. Se consideriamo un punto su uno schermo lontano possiamo limitarci a considerare la somma delle onde piane che hanno il corretto vettore d'onda per raggiungere il punto scelto sullo schermo.

La fessura ha lunghezza d e ne consideriamo N punti che emettono l'onda sferica. Stiamo considerando la fenditura come una linea contenete N buchi. Alla fine del calcolo si manderà $N \rightarrow \infty$. Dovendo sommare tutti questi contributi la discretizzazione serve per passare dall'integrale alla sommatoria. Spesso in fisica si percorre la strada opposta. Si manipolerà la somma in modo da ottenere una serie geometrica, che può essere risommata esattamente ricordando che:

$$\sum_{n=0}^N e^{in\alpha} = \frac{1 - e^{i(N+1)\alpha}}{1 - e^{i\alpha}}$$

Nella sezione precedente è stata calcolata la differenza di vettore d'onda per due punti a distanza d , se la distanza è $\frac{d}{N}$ la formula si scrive:

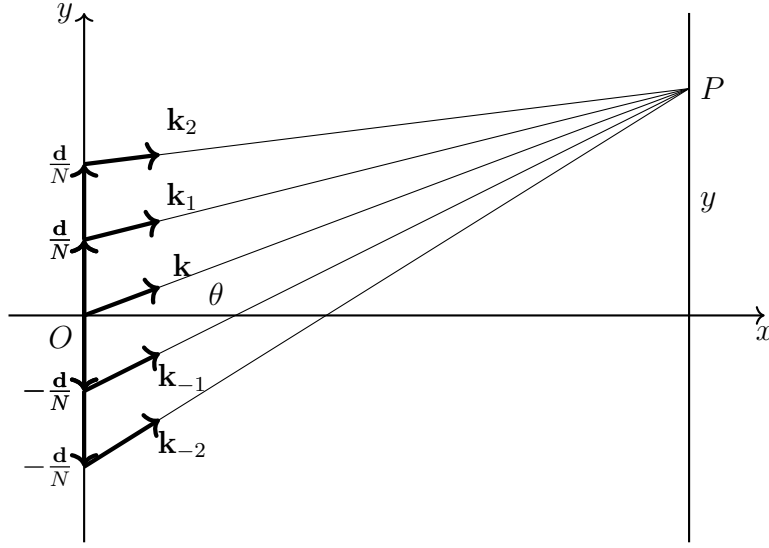


Figura 4: Diffrazione da una fenditura.

$$\Delta \mathbf{k}_N = \frac{k}{\sqrt{L^2 + y^2}} \left(\frac{1}{2N} \frac{dLy}{L^2 + y^2}, -\frac{d}{2N} + \frac{1}{2N} \frac{dy^2}{L^2 + y^2} \right) \quad (12)$$

Nuovamente poniamo l'origine nel mezzo della fenditura e chiamiamo $\mathbf{k} = \frac{k}{\sqrt{L^2 + y^2}} (L, y)$ il suo vettore d'onda associato. Ricordiamo che le onde hanno anche una differenza di fase dovuta alle differenti posizioni da cui partono.

Trascuriamo la differente intensità delle onde emesse da differenti parti della fenditura e scriviamo il campo in P , omettendo l'evoluzione temporale e approssimando $\frac{N}{2} + 1 \sim \frac{N}{2}$:

$$\begin{aligned} \psi(P) &= \sum_{i=-N/2}^{N/2} \psi_i = \psi_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \left(e^{-\frac{N}{2} \Delta \mathbf{k}_N \cdot \mathbf{x} + \frac{N}{2} \mathbf{k} \cdot \frac{\mathbf{d}}{N}} + \dots + 1 + \dots + e^{+\frac{N}{2} \Delta \mathbf{k}_N \cdot \mathbf{x} - \frac{N}{2} \mathbf{k} \cdot \frac{\mathbf{d}}{N}} \right) = \\ &= \psi_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \left(\frac{1 - e^{\frac{N}{2} \Delta \mathbf{k}_N \cdot \mathbf{x} - \mathbf{k} \cdot \frac{\mathbf{d}}{2}}}{1 - e^{\Delta \mathbf{k}_N \cdot \mathbf{x} - \mathbf{k} \cdot \frac{\mathbf{d}}{N}}} + \frac{1 - e^{-\frac{N}{2} \Delta \mathbf{k}_N \cdot \mathbf{x} + \mathbf{k} \cdot \frac{\mathbf{d}}{2}}}{1 - e^{-\Delta \mathbf{k}_N \cdot \mathbf{x} + \mathbf{k} \cdot \frac{\mathbf{d}}{N}}} - 1 \right) \end{aligned}$$

Nel calcolo sopra ai fini di calcolare la differenza di fase ϕ_N dovuta alla posizione di partenza dell'onda abbiamo approssimato $\mathbf{k}_i \sim \mathbf{k}$. Per scrivere la somma si sono considerati $N + 1$ punti di diffusione, ma è irrilevante ai fini

del limite asintotico. Esattamente come nel calcolo precedente $\Delta \mathbf{k}_N \cdot \mathbf{x} = 0$ e avremmo potuto ignorarlo fin dall'inizio arrivando a:

$$\psi(P) = \psi_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \left(\frac{1 - e^{\mathbf{k} \cdot \frac{\mathbf{d}}{2}}}{1 - e^{\mathbf{k} \cdot \frac{\mathbf{d}}{N}}} + \frac{1 - e^{-\mathbf{k} \cdot \frac{\mathbf{d}}{2}}}{1 - e^{-\mathbf{k} \cdot \frac{\mathbf{d}}{N}}} - 1 \right) \quad (13)$$

Attenzione: abbiamo scambiato l'ordine dei termini. Arrivati a questa equazione notiamo che ψ_0 che originariamente era stato inteso come l'intensità del campo nel punto P che genera l'onda secondaria è in realtà $\psi_0 d^2 S$ cioè il prodotto tra l'intensità del campo e l'elemento di superficie (nel nostro caso di linea) dunque ci aspettiamo che sia proporzionale all'intensità dell'onda incidente sulla fenditura per $\frac{1}{N}$. Eseguiamo il limite continuo ($N \rightarrow \infty$) come promesso:

$$\psi(P) = \frac{\psi_0}{N} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \left(\frac{1 - e^{\mathbf{k} \cdot \frac{\mathbf{d}}{2}}}{\mathbf{k} \cdot \frac{\mathbf{d}}{N}} + \frac{1 - e^{-\mathbf{k} \cdot \frac{\mathbf{d}}{2}}}{-\mathbf{k} \cdot \frac{\mathbf{d}}{N}} - 1 \right)$$

trascuriamo l'uno poiché la frazione è proporzionale a N :

$$\psi(P) = \psi_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \frac{\sin\left(\mathbf{k} \cdot \frac{\mathbf{d}}{2}\right)}{\mathbf{k} \cdot \frac{\mathbf{d}}{2}}$$

Calcoliamo l'intensità luminosa $I \propto |\psi(P)|^2$ e troviamo un andamento oscillante caratterizzato però da un pronunciato massimo centrale.

$$I = I_0 \left[\frac{\sin\left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{d}}{2}\right)}{\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{d}}{2}} \right]^2 \quad (14)$$

Sostituendo l'angolo θ otteniamo:

$$I = I_0 \left[\frac{\sin\left(\frac{kd \sin \theta}{2}\right)}{\frac{kd \sin \theta}{2}} \right]^2 \quad (15)$$

Per θ piccoli $\sin \theta \sim \theta$ e i massimi si trovano approssimativamente a:

$$d\theta = \left(n + \frac{1}{2}\right) \lambda \quad (16)$$

e i minimi:

$$d\theta = n\lambda \quad (17)$$

La corrispondenza dei minimi e dei massimi con i multipli interi e semi-interi di lunghezza d'onda è invertita rispetto a quanto trovato per Young.

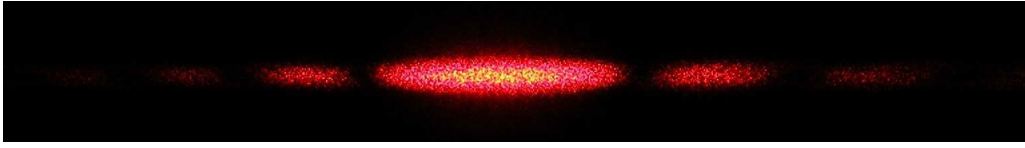


Figura 5: Diffrazione da singola apertura.

Un calcolo simile porta ad ottenere le frange di diffrazione da un'apertura circolare. Ci aspettiamo ovviamente delle frange a simmetria sferica. I massimi si trovano a:

$$\sin(\theta) = 1.22 \frac{\lambda}{d} \quad (18)$$

Dove θ è l'angolo al quale si trova la corona circolare che costituisce il massimo di diffrazione rispetto all'asse ortogonale all'apertura passante per il suo centro e d è il diametro dell'apertura.

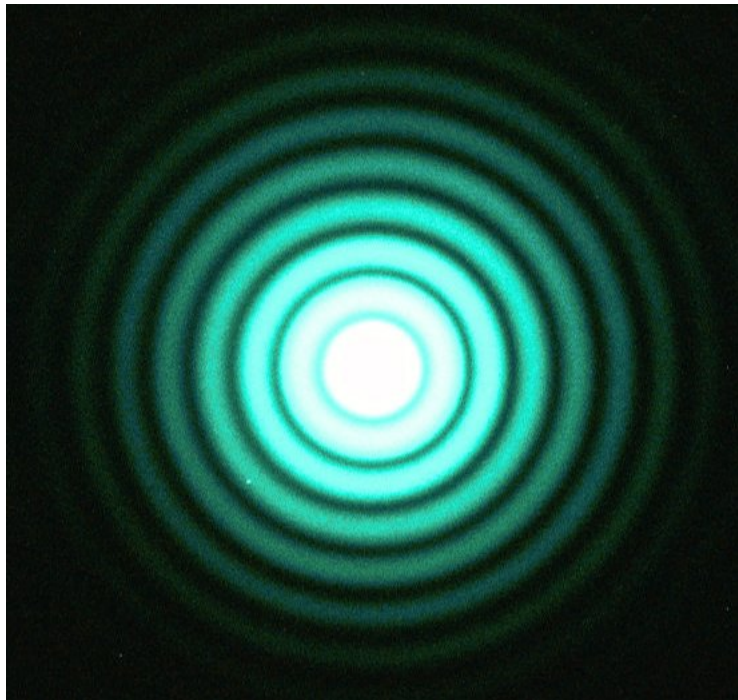


Figura 6: Diffrazione da apertura circolare.

E' possibile anche considerare la luce emessa da due fenditure molto vicine. In tal caso si sovrapporranno gli effetti dell'interferenza e della diffrazione come si vede nell'immagine. Le variazioni veloci di intensità sono date

dall'interferenza e l'involuppo dalla diffrazione. Nel calcolo dell'interferenza di Young si è trascurata la diffrazione.

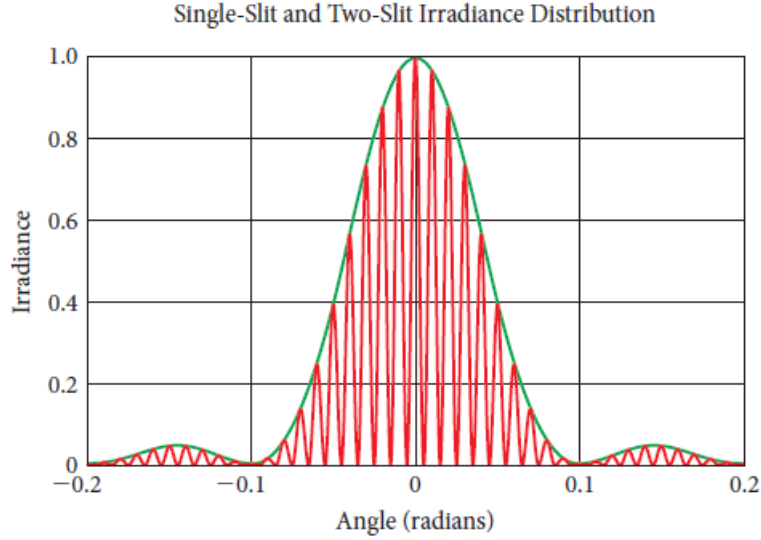


Figura 7: Diffrazione e interferenza da doppia fenditura, sovrapposizione degli effetti.

7 Principio di complementarità di Babinet

Consideriamo il complementare di un'apertura su una parete, cioè un ostacolo. In questo caso possiamo ancora applicare il principio di Huygens integrando sul fronte d'onda al di fuori dall'ostacolo bidimensionale. Per la linearità dell'equazione d'onda possiamo sommare le due soluzioni (con ostacolo e con apertura) per ottenere la propagazione dell'onda nello spazio vuoto. Infatti sommare le due onde è come estendere l'integrale del principio di Huygens a tutto il fronte d'onda cosa che faremmo se nessun oggetto la bloccasse. Dunque:

$$\psi_o + \psi_f = \psi \quad (19)$$

Nell'equazione sopra ψ è l'onda incidente e ψ_o è l'onda nel semipiano di destra ottenuta inserendo un ostacolo. ψ_f è l'onda che si avrebbe considerando la fessura complementare all'ostacolo bidimensionale. Questa equazione ci mostra come i punti in cui $\psi_o = 0$ hanno $\psi_f = \psi$.

Bisogna stare attenti però all'utilizzo di questa formula per ricavare relazioni tra le figure di interferenza di un oggetto e del suo complementare.

Infatti dobbiamo verificare esplicitamente il valore di ψ nel punto considerato. Se la sorgente di luce è un laser collimato nei punti in cui si guarda la figura di diffrazione (cioè fuori dall'asse ottico e dalla traiettoria del laser) esso avrebbe avuto comunque intensità nulla anche se non fosse stato inserito niente tra la sorgente e lo schermo. Dunque nei punti in cui si guarda la figura di interferenza (in queste condizioni sperimentali) $\psi = 0$, pertanto $\psi_o = -\psi_f$ e le figure di diffrazione di un oggetto e del suo complementare sono uguali. Pestiemo sempre attenzione al fatto che questo non vale sull'asse ottico dove $\psi \neq 0$.

Di contro consideriamo un caso in cui la sorgente luminosa sia uniforme in tutto lo spazio ($\psi \neq 0$ ovunque). L'oggetto complementare di una sottile fessura in un muro opaco è un sottile filo (un capello). Le frange luminose prodotte dalla fenditura corrisponderanno alle frange d'ombra prodotte dal capello (assumendo di poter rilevare una piccola diminuzione di intensità della luce). Quest'ultima ricordiamo non è la situazione sperimentale che tipicamente si presenta.

8 Criterio di Rayleigh

Consideriamo uno strumento ottico, trascuriamo l'effetto di ingrandimento dovuto alla presenza di lenti, esso è costituito da un'apertura circolare di diametro d che raccoglie la luce su uno schermo.

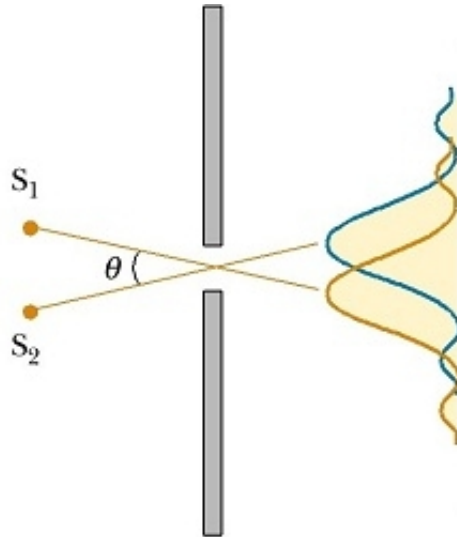


Figura 8: Produzione della doppia figura di diffrazione su uno schermo da parte di due punti luminosi.

I due punti luminosi (che supporremo monocromatici) che abbiamo per sorgenti producono due diverse figure di diffrazione sullo schermo. Le onde che arrivano sull'apertura sono fuori asse ottico, tuttavia possiamo ancora applicare approssimativamente i risultati citati nella sezione precedente. θ è l'apertura angolare tra i due punti ma è anche la distanza angolare tra i centri dei dischi di Airy ¹ che costituiscono le immagini dei due punti, esso è piccolo e possiamo approssimarlo con il seno: $\sin \theta \sim \theta$. Il criterio di Rayleigh asserisce che i due punti sono distinguibili finché il primo massimo di una figura di diffrazione non va a coincidere con il centro della seconda. In questa situazione la distanza tra i centri è esattamente il semidiametro angolare del disco. La minima distanza angolare che uno strumento può risolvere quindi è:

$$\theta_{min} = 1.22 \frac{\lambda}{d} \quad (20)$$

9 Reticoli di diffrazione

Un reticolo di diffrazione è un qualunque oggetto che impone una variazione periodica della fase e/o dell'intensità della luce. Vediamo nella seguente immagine un esempio di sistema che rispettivamente non è ed è un reticolo di diffrazione:

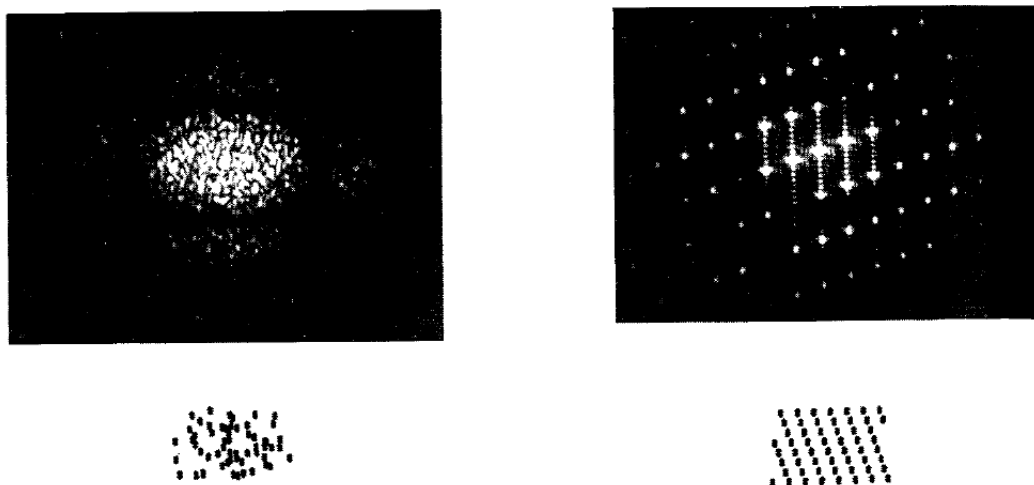


Figura 9: Sistemi costituiti da punti microscopici che si comportano o meno come reticolo di diffrazione. Vediamo che l'ordine spaziale si ripercuote sull'ordine nella figura di diffrazione.

¹Il disco di Airy è l'immagine del punto sullo schermo.

I reticoli di diffrazione possono lavorare per trasmissione o per riflessione della luce e sono caratterizzati dalla *funzione di trasferimento* dell'elemento ripetuto che li costituisce. Un reticolo di diffrazione in trasmissione può essere semplicemente una rete a maglia molto sottile o una superficie su cui sono stati praticati fori in modo periodico. Per realizzare i reticoli di diffrazione in riflessione si depositano su un substrato dei punti micrometrici che fungono da centri diffusori. Noi supporremo che ogni elemento del reticolo risponda con un'onda sferica quando colpito da radiazione elettromagnetica. Nel caso di reticolo costituito da linee sottili le onde diffuse da ognuna di essa sono effettivamente cilindriche.

Se il reticolo è 1D allora valgono i calcoli svolti nella sezione precedente per la diffrazione da fenditura che sono esattamente quello di cui abbiamo bisogno per trattare un reticolo, dove N non sarà più un parametro arbitrario da mandare all'infinito ma il numero di punti diffusori nel reticolo.

Ritorniamo all'equazione per il campo $\psi(P)$. La riscriviamo fattorizzando un fattore di fase (che dipende dalla posizione) e che non conta ai fini del calcolo dell'intensità e non scriveremo più. Introduciamo inoltre il vettore $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{d}}{N}$, che rappresenta la distanza tra un centro diffusore e un altro.

$$\begin{aligned}\psi(P) &= \sum_{i=0}^N \psi_i = \frac{\psi_0}{N} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-i\frac{N}{2}\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}} (1 + e^{+i2\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}} + \dots + e^{+iN\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}}) = \\ &= \frac{\psi_0}{N} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-i\frac{N}{2}\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}} \frac{1 - e^{iN\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}}}{1 - e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}}}\end{aligned}$$

raccogliamo a numeratore e denominatore rispettivamente $e^{i\frac{N\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}}{2}}$ e $e^{i\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}}{2}}$ e calcoliamo il quadrato.

$$I = \frac{|\psi_0|^2}{N^2} \left[\frac{\sin\left(\frac{N\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}}{2}\right)} \right]^2 \quad (21)$$

Questa formula presenta dei massimi principali e dei massimi secondari (tanto più bassi quanto più grande è N). I massimi principali si hanno quando il denominatore si annulla (e si annulla anche il numeratore, così che per calcolare il valore della funzione bisogna considerare il limite). Questo accade per $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p} = 2n\pi$. Dunque ricaviamo una formula che contiene esplicitamente l'angolo θ tra la normale al reticolo e il vettore che collega il centro del reticolo al punto di osservazione.

$$p \sin \theta = n\lambda \quad (22)$$

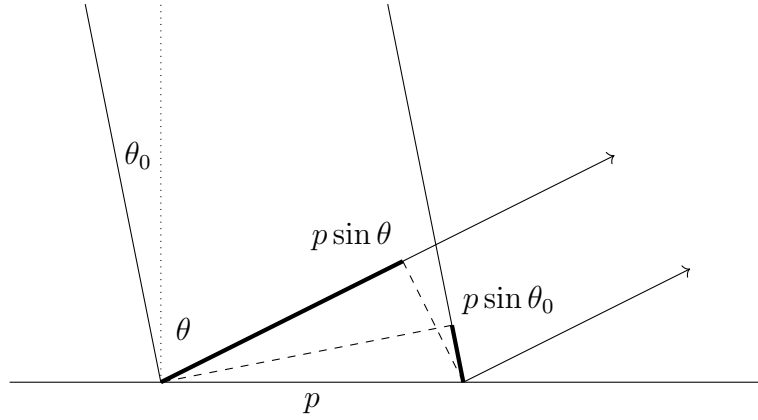


Figura 10: Determinazione della condizione di interferenza costruttiva per un reticolo semplice.

Questa equazione è simile a quelle ricavate nella sezione su Young, tuttavia il ruolo dall'ampiezza della fenditura qui è giocato dalla distanza lineare tra i centri diffusori nel reticolo. Essa è valida per un reticolo di diffrazione illuminato perpendicolarmente o per un reticolo in trasmissione. Questo perché non siamo stati attenti a considerare la risposta angolare dei punti sul reticolo. Nel caso il reticolo non sia illuminato frontalmente è necessario ripetere il calcolo considerando l'angolo di incidenza del fascio. Introducendo θ_0 che è l'angolo tra il fascio di luce incidente e la normale al reticolo (scegliamo la convenzione di considerare entrambi gli angoli come positivi) si ottiene la formula:

$$p(\sin \theta - \sin \theta_0) = n\lambda \quad (23)$$

Vediamo come ricavare in maniera più veloce questo risultato. Consideriamo due onde che vengono diffuse da due punti del reticolo a distanza p esse interferiranno costruttivamente se la differenza di cammino ottico accumulato è multiplo intero della lunghezza d'onda:

$$\Delta x = p(\sin \theta - \sin \theta_0) = n\lambda$$

Questa è esattamente la condizione trovata sopra.

Questa formula si applica anche ai reticoli che sono “effettivamente” unidimensionali, perché una dimensione è “banale”. L'esempio da noi considerato è di questo tipo, poiché si tratta di strisce.

Possiamo anche calcolare il potere risolvante di un reticolo di diffrazione, cioè la separazione angolare dei massimi di luce con lunghezza d'onda diversa.

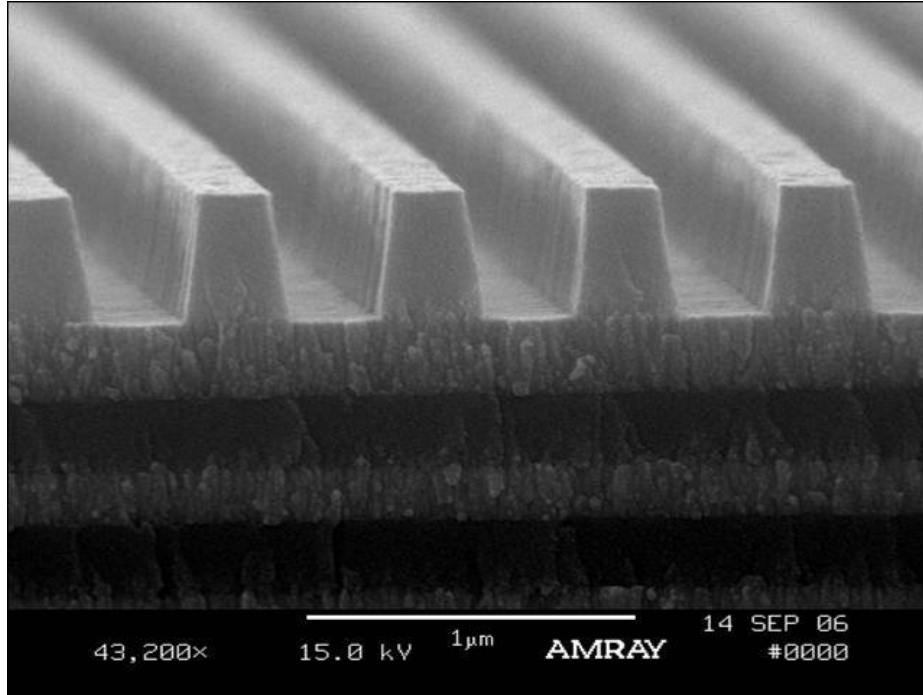


Figura 11: Reticolo di diffrazione 1D dal Plymouth Grating Laboratory.

Notiamo infatti che un reticolo di diffrazione separa la luce bianca nelle sue componenti spettrali, cioè diffrange la luce ad angoli diversi a seconda della lunghezza d'onda. Derivando la formula fondamentale si ottiene:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{n}{p \cos \theta} \quad (24)$$

Le simmetrie con cui sono disposti i centri diffusori sul reticolo si riflettono nelle simmetrie della figura di diffrazione (in maniera non banale). Per avere una figura di diffrazione è necessario che nel campione vi sia un ordine a lungo raggio (per esempio perché la disposizione dei centri segue una regola deterministica), tuttavia non è necessario che vi sia periodicità. Anche reticoli quasi-periodici sono interessanti. Di contro un'onda che incide su una superficie riflettente scabra (o i cui centri diffusori sono stati disposti in maniera casuale) produce una figura detta *speckles*.

10 Diffusione di Bragg

Un'onda incidente su un solido cristallino viene riflessa da ognuno dei suoi piani (ignoriamo il meccanismo per cui succede questo). Considerando

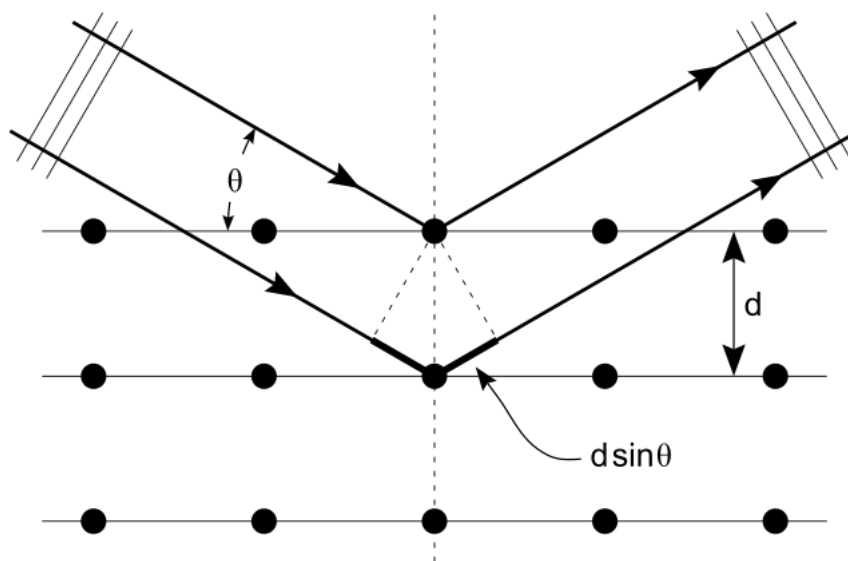


Figura 12: Schema di diffusione di Bragg.

soltanto i primi due piani cristallini ci accorgiamo che la luce riflessa dal primo può interferire con la luce in uscita dal secondo. I due raggi avendo profondità di penetrazione diverse hanno cammino ottico differente (dell'ordine delle distanze atomiche). Si può ottenere una semplice equazione (chiamata legge di Bragg) che fornisce l'angolo di riflessione (rispetto all'orizzontale) a cui si hanno i massimi di interferenza:

$$2d \sin \theta = n\lambda \quad (25)$$

La distanza tra i piani cristallini d è spesso dell'ordine dell'Angstrom, dunque si può osservare facilmente l'interferenza di raggi X, che hanno lunghezza d'onda confrontabile con questa distanza.

Qualche volta può capitare alle olimpiadi che i problemi di diffrazione e interferenza siano formulati in termini di onde di materia (per esempio neutroni), tutto quello che abbiamo detto qui continua a valere!

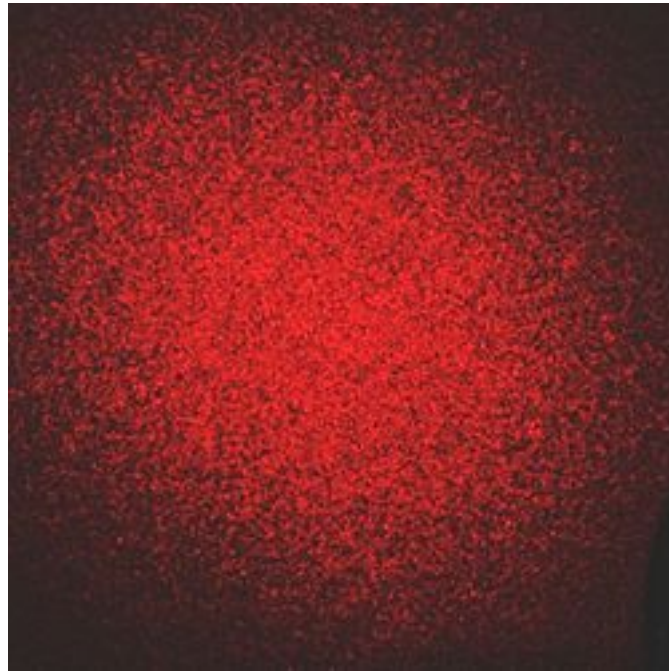


Figura 13: *Speckles*

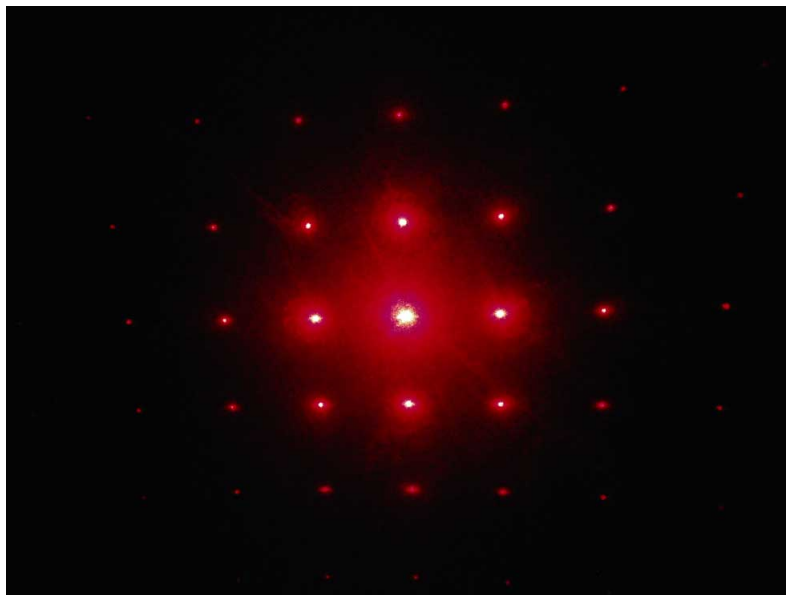


Figura 14: Figura di diffrazione di un reticolo quadrato.

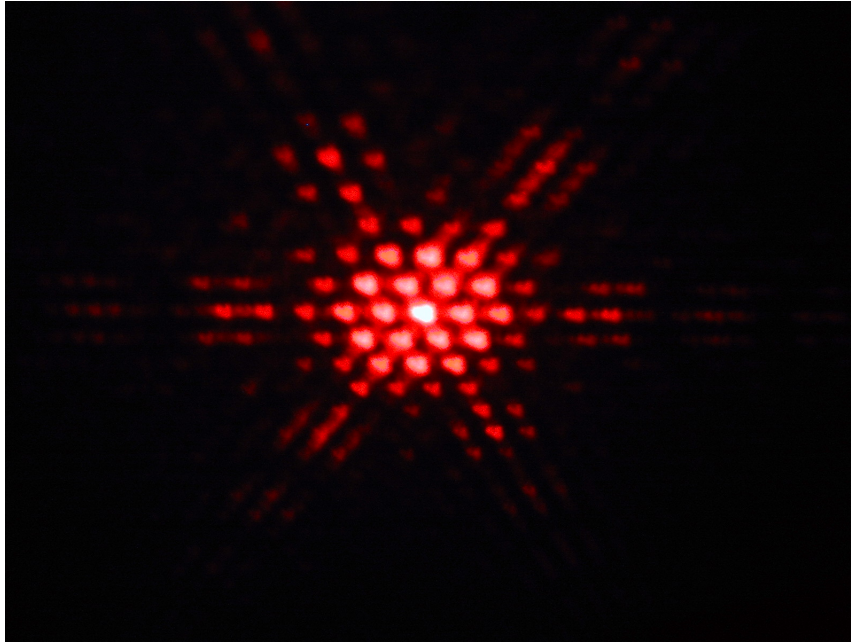


Figura 15: Figura di diffrazione di un reticolo triangonale.

11 Problemi

Problema 11.1. Si considerino tre fenditure sottili praticate su uno schermo aventi distanze relative pari ad a e b (che sono in rapporto razionale). Sulle fenditure incide un'onda monocromatica. Si trovi la condizione su a e b perché i minimi della figura di diffrazione abbiano intensità nulla.

Problema 11.2 (Una pellicola di acqua saponata). Un fascio di luce bianca investe, con un angolo di 30° , la superficie di una pellicola di acqua saponata; la luce riflessa presenta un colore verde predominante, di lunghezza d'onda $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$. L'indice di rifrazione del liquido di cui è costituita la pellicola è $n = 1.33$.

1. Qual è il minimo spessore possibile della pellicola?
2. Di quale colore appare la pellicola illuminata perpendicolarmente alla sua superficie?

Hint: Si tenga conto del cambiamento di fase pari a π subito dall'onda luminosa nella riflessione sulla superficie di un mezzo di indice di rifrazione maggiore di quello dell'aria circostante.

Problema 11.3 (Anelli di Newton - SNS 1956). Su di un piano orizzontale di vetro è appoggiata una lente piano-convessa con l'asse ottico verticale e la faccia piana rivolta verso l'alto. I raggi luminosi paralleli all'asse che investono questa faccia danno luogo, attraversata la lente, per presenza dell'intercapedine d'aria a frange localizzate. Se $a = 5.12 \times 10^{-3} \text{ m}$ è il diametro della frangia oscura di ordine $k = 4$ per la luce monocromatica di lunghezza d'onda $\lambda = 656.3 \text{ nm}$ quale risulterà il diametro della frangia di ordine $k = 9$ per luce di lunghezza d'onda $\lambda' = 486.1 \text{ nm}$? Di quanto esso varierà quando nell'intercapedine verrà posto un liquido di indice di rifrazione superiore a quello del vetro? Si consideri il raggio di curvatura R della lente molto più grande del suo diametro.

Problema 11.4. Sono dati una sorgente di luce monocromatica che è schermata in un emisfero. La luce incide su due specchi che formano un angolo $\alpha \ll 1$ con l'orizzontale come in figura. La luce riflessa dagli specchi è raccolta su uno schermo. Le distanze sono quelle indicate in figura. Caratterizzare la figura di interferenza. Si suppone che la luce sia sufficientemente coerente e che l'angolo tra due specchi rimanga comunque ottuso (perché questa ipotesi è necessaria?) coerentemente con la richiesta che sia $\alpha \ll 1$.

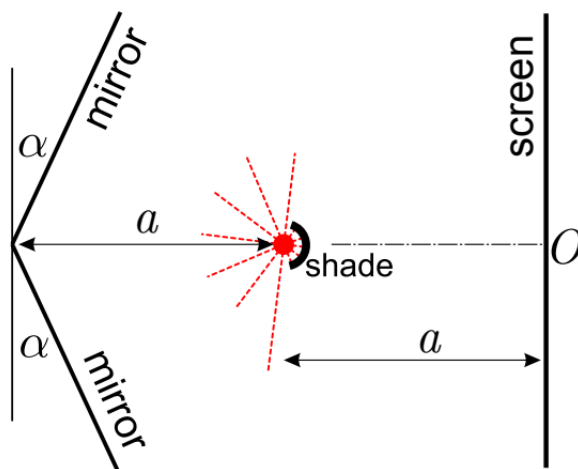


Figura 16: Interferenza da specchi inclinati.

12 Soluzioni

Soluzione 12.1. Considero il problema nelle stesse approssimazioni con cui si è trattato Young durante la lezione. Prendo come riferimento di fase l'onda

piana che arriva dalla fessura centrale. Le due sopra hanno un cammino differente rispetto a questa che i manifesta nell'interferenza sullo schermo. Scrivo l'onda in arrivo su un generico punto di esso:

$$\psi = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} (1 + e^{+ika \sin \theta} + e^{-ikb \sin \theta})$$

Il problema richiede di trovare per quali valori di a e b si può verificare $I = 0$ in qualche punto. $I \propto |\psi|^2$ e quindi $I = 0$ implica $|\psi|^2 = 0$, ma questo può succedere solo se in quel punto $\psi = 0$. Essendo ψ proporzionale alla somma di 3 fasi essa si può annullare solo se $1 + e^{+ika \sin \theta} + e^{-ikb \sin \theta} = 0$ dunque abbiamo che i tre fasori che rappresentano i numeri complessi devono trovarsi sui vertici di un triangolo equilatero. Perciò:

$$\begin{aligned} ka \sin \theta &= \frac{2}{3}\pi + 2\pi m \\ -kb \sin \theta &= -\frac{1}{3}\pi + 2\pi n \end{aligned}$$

questo porta alla scrittura:

$$\frac{a}{b} = \frac{1 + 3m}{-2 + 3n}$$

che si può verificare essere equivalente alla richiesta che il rapporto $\frac{a}{b} = \frac{i}{j}$ interi e $i - j$ multiplo di 3.

Soluzione 12.2. Un raggio di luce che incide sulla pellicola nel punto A viene in parte riflesso e in parte trasmesso; il raggio trasmesso subisce una rifrazione e giunge sulla superficie inferiore della pellicola nel punto B dove, nuovamente, viene parzialmente riflesso per emergere finalmente nel punto C della superficie superiore della pellicola dove subisce una nuova rifrazione. Un raggio parallelo al precedente che incide sulla pellicola nel punto C viene ugualmente in parte riflesso: si osserva l'interferenza dei due raggi provenienti dal punto C. Bisognerà calcolare la differenza di fase tra il raggio riflesso direttamente in C e quello che è stato riflesso dalla superficie inferiore della pellicola. La differenza di fase dipende dalla differenza di cammino ottico dei due raggi e quindi dallo spessore della pellicola e dalla lunghezza d'onda della luce. A seconda dello spessore della pellicola, le componenti di diverso color subiranno interferenza costruttiva o distruttiva.

La condizione per avere interferenza costruttiva è che la differenza tra i due cammini ottici contenga un numero intero di lunghezze d'onda. I raggi incidenti sono in fase nei due punti A e D. La differenza dei percorsi geometrici dei due raggi è

$$\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{DC} = \frac{2d}{\cos \beta} - 2d \tan \beta \sin \alpha$$

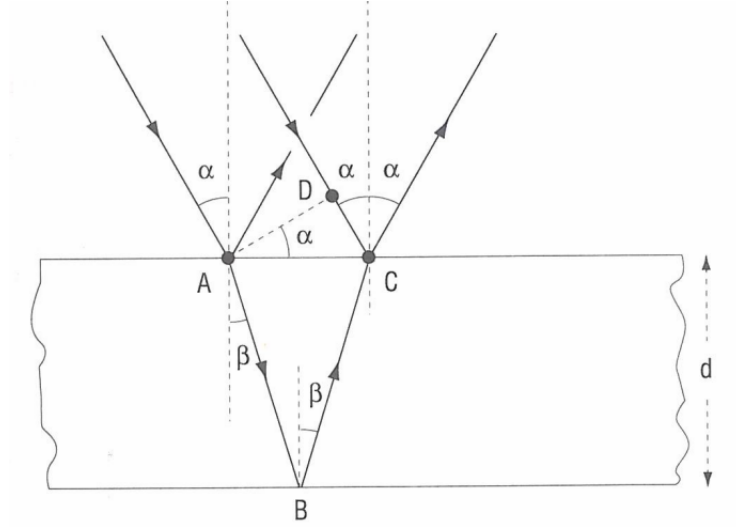


Figura 17: Interferenza dei raggi sulla pellicola.

La lunghezza d'onda della luce verde nel liquido è $\frac{\lambda_0}{n}$. Il numero di lunghezze d'onda nel tratto $\overline{AB} + \overline{BC}$ è quindi:

$$\frac{2nd}{\lambda_0 \cos \beta}$$

Il numero di lunghezze d'onda in DC è:

$$\frac{2d \tan \beta \sin \alpha}{\lambda_0} = \frac{2d \sin \beta \sin \alpha}{\lambda_0 \cos \beta}$$

Si deve inoltre tener conto del fatto che la riflessione sulla superficie superiore, che separa l'aria dal mezzo otticamente più denso, determina uno sfasamento di mezza lunghezza d'onda e il numero di lunghezze d'onda nel tratto $\overline{DC}$, immediatamente dopo la riflessione, diventa:

$$\frac{2d \sin \beta \sin \alpha}{\lambda_0 \cos \beta} + \frac{1}{2}$$

La condizione di interferenza costruttiva dei due raggi si ha se viene soddisfatta la seguente equazione:

$$\frac{2nd}{\lambda_0 \cos \beta} - \frac{2d \sin \beta \sin \alpha}{\lambda_0 \cos \beta} - \frac{1}{2} = k$$

con k numero intero. La legge di Snell afferma $\sin \alpha = n \sin \beta$ e sostituendo nella relazione precedente si trova:

$$\frac{2nd}{\lambda_0 \cos \beta} (1 - \sin^2 \beta) - \frac{1}{2} = k$$

Tenendo conto che $\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}$ e $\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta}$, la condizione di interferenza costruttiva può essere scritta nella forma

$$d = \frac{4d}{\lambda_0} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = 2k + 1$$

Il colore predominante dipende dunque dall'indice di rifrazione e dallo spessore della pellicola. Risolvendo l'equazione precedente rispetto a d si ottiene

$$d = \frac{\lambda_0}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} (2k + 1)$$

Poiché viene richiesto lo spessore minimo si pone $k = 0$. Sostituendo i valori dati per la lunghezza d'onda del colore verde, l'indice di rifrazione dell'acqua saponata e l'angolo di incidenza, si trova lo spessore della pellicola:

$$d = \frac{500 \text{ nm}}{4\sqrt{(1.33)^2 - 0.25}}$$

In questo caso $\alpha = 0$. Il colore predominante in direzione perpendicolare alla pellicola ha lunghezza d'onda che si può ricavare ponendo $k = 0$ e introducendo il valore già noto dello spessore d .

$$\lambda_1 = 4dn = 540 \text{ nm}$$

Soluzione 12.3 (Anelli di Newton). Il raggio riflesso sulla superficie curva della lente e quello riflesso dalla superficie sottostante interferiscono. La differenza di cammino ottico (vicino all'asse ottico della lente) è $2h$ (essendo le deviazioni dalla verticale trascurabili). La condizione di interferenza costruttiva è che questa distanza sia un multiplo dispari di mezze lunghezze d'onda. Questo perché non bisogna dimenticare la fase di π che il raggio prende quando incide sul vetro sottostante e viene riflesso. Abbiamo quindi che il diametro degli anelli luminosi è:

$$a_k = 2\sqrt{R(2k+1)} \frac{\lambda}{2}$$

e il diametro di quelli scuri è:

$$b_k = 2\sqrt{Rk\lambda}$$

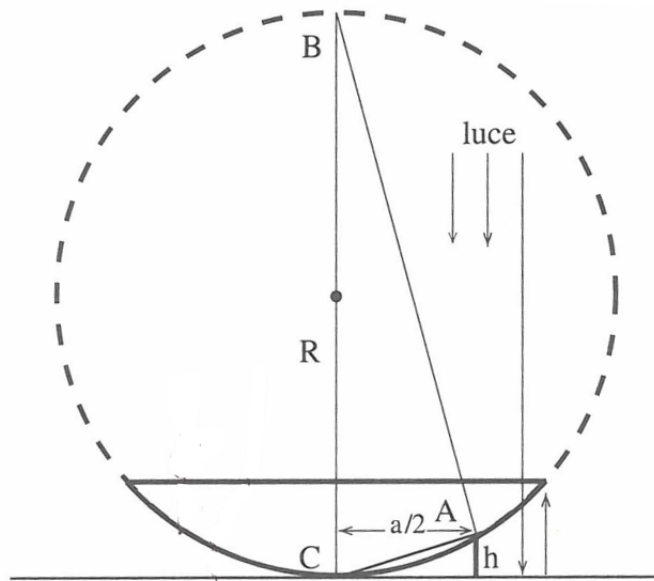


Figura 18: Schema del problema di interferenza.

dove k è l'ordine dell'anello. Il problema ci suggerisce di confrontare i diametri b_k e $b_{k'}$ di due diversi ordini di frange scure di diversa lunghezza d'onda λ e λ' . Questo consente di eliminare il raggio di curvatura della lente R e di ottenere:

$$\frac{b_k}{b_{k'}} = \sqrt{\frac{k\lambda}{k'\lambda'}}$$

Sostituendo i dati del problema si ottiene il valore del diametro a' della frangia scura di ordine 9 con $\lambda' = 486.1 \text{ nm}$ dato quello della frangia di ordine 4 con luce di lunghezza d'onda $\lambda = 656.3 \text{ nm}$:

$$b = 5.12 \sqrt{\frac{9\lambda'}{4\lambda}}$$

espresso in millimetri. Se nell'intercapedine viene interposto un liquido di indice di rifrazione n maggiore di quello del vetro le formule sono le stesse perché non si ha cambiamento della fase nella riflessione dal contro il vetro in basso ma si ha cambiamento della fase nella riflessione interna alla lente contro il liquido.

Soluzione 12.4. E' evidente che vi deve essere una figura di diffrazione infatti se l'angolo α ci sono due percorsi che la luce può seguire per raggiungere un punto dato dello schermo. La possibilità che vi siano riflessioni multiple e che

quindi vi siano più di due immagini è eliminata dall'ipotesi sull'angolo α (è ottuso). Una semplice costruzione geometrica mostra che la distanza tra le immagini è $2a \cos 2\alpha$, mentre la distanza delle due sorgenti dallo schermo è $a(2 \cos^2 \alpha + 1)$. La fase di π che l'onda prende a causa della riflessione sullo specchio è comune a entrambi i raggi e quindi non conta ai fini della costruzione. Poiché si ipotizza che sia $\alpha \ll 1$ usando la formula per l'interferenza costruttiva abbiamo che il primo massimo si trova a:

$$y = \lambda \frac{2 \cos^2 \alpha + 1}{2 \sin(2\alpha)} \sim \frac{\lambda}{4\alpha}$$

indipendente dalla distanza a . Nelle approssimazioni fatte i massimi sono sono alla stessa distanza l'uno dall'altro.

Riferimenti bibliografici

- [1] M. Born E. Wolf, *Principles of Optics*.