

Stage di fisica – ottica geometrica

Giovanni Maria Tomaselli*

8 febbraio 2018

1 I postulati

L'ottica geometrica è la descrizione più semplice, intuitiva e antica della propagazione della luce in mezzi materiali trasparenti. È una teoria approssimata e può essere completamente ricavata a partire dalle equazioni di Maxwell dell'elettromagnetismo. Dimenticandosi della natura ondulatoria della luce, l'ottica geometrica ne descrive la propagazione per mezzo dei *raggi*, cioè le traiettorie seguite da essa nel corso del suo moto. Una tale descrizione è evidentemente in maggior accordo con una teoria corpuscolare della luce, dato che il concetto di traiettoria è ben definito per un punto materiale, ma non per un'onda.

Oltre al concetto di raggio, l'ottica geometrica presenta anche alcuni postulati, che riguardano due sole situazioni qualitativamente diverse: la propagazione della luce in un mezzo omogeneo e nei pressi dell'interfaccia tra due mezzi materiali. La prima situazione è banalmente trattata dal primo postulato: in un mezzo omogeneo, i raggi di luce sono linee rette. In una teoria corpuscolare, ciò è in accordo con il primo principio della dinamica; nella teoria elettromagnetica di Maxwell, ciò si traduce nel fatto che le cosiddette *onde piane* sono soluzioni delle equazioni di Maxwell.

La seconda situazione (Figura 1) è più interessante ed è descritta dai ben noti postulati sulla riflessione e sulla rifrazione.

1. Quando un raggio (detto *incidente*) incontra la superficie di una interfaccia piana tra due mezzi omogenei, esso si divide in due raggi, detti *riflesso* e *rifratto*.
2. I raggi riflesso e rifratto giacciono sul piano individuato dal raggio incidente e dalla normale all'interfaccia nel punto di incidenza. Gli

*giovanni.tomaselli@sns.it

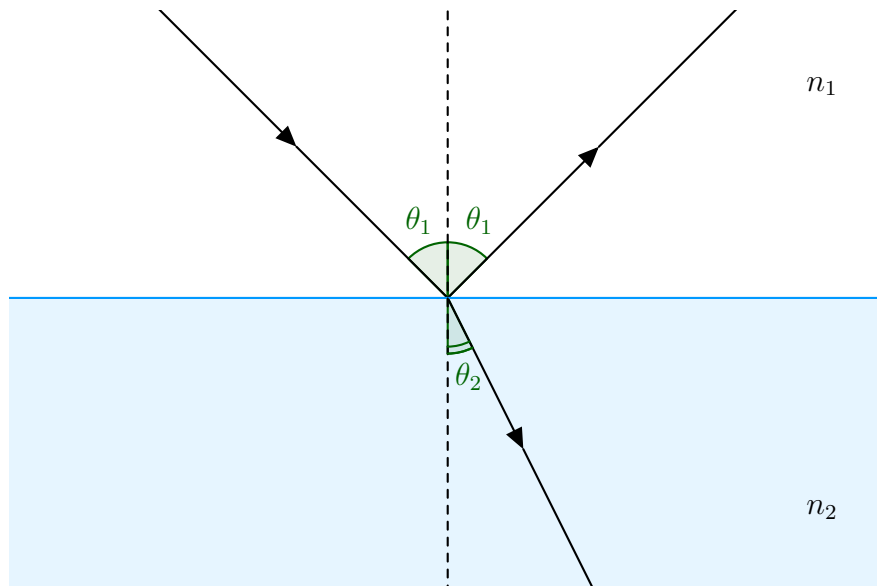


Figura 1: riflessione e rifrazione.

angoli tra la normale e i raggi sono detti angoli di incidenza, di riflessione e di rifrazione.

3. L'angolo di riflessione è uguale all'angolo di incidenza (θ_1 in Figura 1).
4. L'angolo di rifrazione (θ_2 in Figura 1) è legato all'angolo di incidenza dalla legge di Snell:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2,$$

dove n_1 e n_2 sono, in questa trattazione, numeri reali adimensionali e maggiori o uguali a 1, propri dei due mezzi, e detti *indici di rifrazione*.

In generale i raggi riflesso e rifratto sono entrambi presenti, ciascuno con una intensità minore di quella del raggio incidente, anche se tale aspetto è ovviamente ignorato dall'ottica geometrica, essendo legato alla natura ondulatoria della luce. Il modo in cui le intensità dei nuovi raggi sono legate a quella del raggio incidente è regolato dalle leggi di Fresnel (che si trovano studiando il problema attraverso le equazioni di Maxwell per i mezzi materiali) e dipende in modo complicato dall'angolo di incidenza. Può essere comunque utile sapere che, a incidenza normale ($\theta_1 = 0$), e in presenza di mezzi non assorbenti, l'intensità del raggio riflesso si ottiene moltiplicando quella del raggio incidente per $R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$, mentre per l'intensità del raggio trasmesso bisogna moltiplicare per $T = 1 - R$. Ci sono comunque due notevoli casi in cui uno dei due raggi è assente; entrambi possono essere spiegati in modo soddisfacente con le equazioni di Maxwell.

1. Se $n_1 > n_2$ e $\sin \theta_1 > n_2/n_1$ la legge di Snell perde significato, perché si avrebbe $\sin \theta_2 > 1$. In questo caso, non c'è il raggio rifratto e si parla di *riflessione totale*. $\theta_{\text{lim}} = \arcsin(n_2/n_1)$ è detto *angolo limite*.
2. Se $\tan \theta_1 = n_2/n_1$ (angolo di Brewster) e il raggio incidente è polarizzato linearmente, in modo che il campo magnetico sia parallelo all'interfaccia (il cosiddetto modo P), non c'è il raggio riflesso e si parla di *rifrazione totale*. Ovviamente questo fenomeno esula dall'ottica geometrica.

2 Il principio di Fermat

Le leggi dell'ottica geometrica sono indipendenti dal significato fisico dell'indice di rifrazione n di un materiale. Tuttavia, risolvendo il problema dell'interfaccia con la teoria elettromagnetica, salta fuori che il coefficiente che moltiplica il seno nella legge di Snell, cioè l'indice di rifrazione, è c/v , dove c è la velocità della luce nel vuoto e v la velocità della luce nel mezzo. Questo risultato combacia con la condizione $n \geq 1$ detta precedentemente, dato che dalla relatività speciale sappiamo che c è la velocità massima raggiungibile da un oggetto in natura. Tale aspetto presenta tuttavia alcune sottigliezze, ma per questa trattazione può essere sufficiente (e rassicurante) notare che la riduzione della velocità della luce in un mezzo materiale è dovuta non ad una violazione dei principi della relatività ristretta, ma a fenomeni di polarizzazione elettrica del mezzo rapidamente variabile, che fa sì che i campi *macroscopici* si muovano a velocità $v < c$.

Assunto, dunque, che la luce si muova a velocità diverse in mezzi diversi, i postulati dell'ottica geometrica possono essere spiegati a partire da un principio più generale, il principio di Fermat. Nella forma più classica, esso dice che, se un raggio di luce passa per un punto A e per un punto B , allora la traiettoria che ha seguito tra A e B è quella che minimizza il tempo di percorrenza. Più precisamente, si dovrebbe dire che le possibili traiettorie che ha seguito sono quelle che rendono stazionario il tempo di percorrenza (cioè approssimativamente costante per piccole variazioni della traiettoria).

È evidente che la propagazione in linea retta dei raggi in un mezzo omogeneo (in cui, quindi, la velocità della luce è costante) è spiegata dal principio di Fermat. È leggermente meno evidente che lo sono anche gli altri postulati. Prima di tutto, se i raggi (incidente e riflesso, oppure incidente e rifratto) e la normale non fossero complanari, potremmo considerare la proiezione della traiettoria su un piano contenente A e B e perpendicolare all'interfaccia, la quale ridurrebbe il tempo di percorrenza.

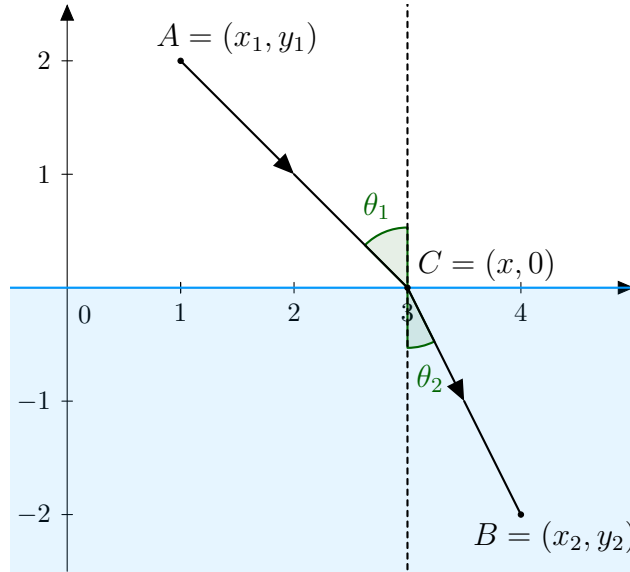


Figura 2: rifrazione.

Per quanto riguarda la legge della riflessione, se il raggio va da A a B riflettendosi sull'interfaccia, allora possiamo prendere la parte di traiettoria compresa tra il (primo) punto di contatto con lo specchio e B e rifletterla, rendendo il problema equivalente a quello, già risolto, della traiettoria seguita tra due punti (A e il riflesso di B) in un mezzo omogeneo.

È ancor più interessante che anche la legge di Snell sia spiegata da tale principio. Fissiamo infatti un sistema di coordinate planare che contenga la traiettoria del raggio e tale che l'asse x corrisponda all'intersezione dell'interfaccia con tale piano. Con riferimento alla Figura 2, se $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ (con $y_1 > 0$ e $y_2 < 0$) e il punto di incidenza è $C = (x, 0)$ (la condizione di minimo impone che x sia compreso tra x_1 e x_2), allora il tempo di percorrenza è

$$T = \frac{\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2}}{c/n_1} + \frac{\sqrt{(x - x_2)^2 + y_2^2}}{c/n_2},$$

da cui

$$\frac{dT}{dx} = 0 \implies n_1 \frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2}} + n_2 \frac{x - x_2}{\sqrt{(x - x_2)^2 + y_2^2}} = 0,$$

cioè $n_1 \sin \theta_1 + n_2 \sin(-\theta_2) = 0$.

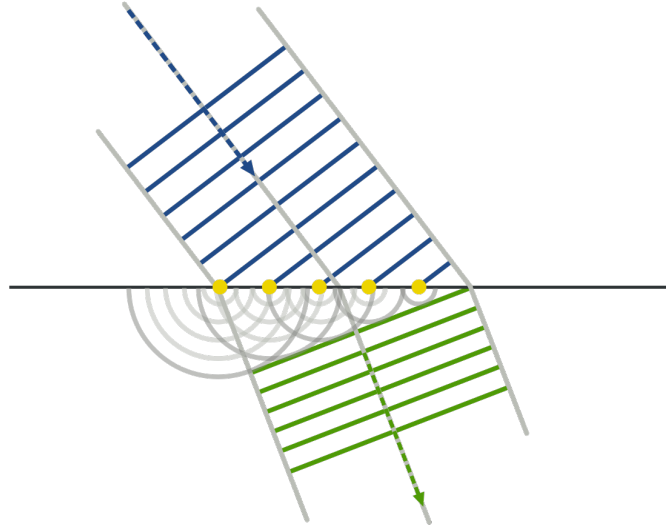


Figura 3: legge di Snell dal principio di Huygens.

3 Il principio di Huygens

I postulati dell'ottica geometrica possono essere ottenuti anche da un principio ondulatorio, interpretando i raggi di luce come le rette perpendicolari ai fronti d'onda, cioè le superfici a fase costante. Secondo il principio di Huygens, ogni punto di un fronte d'onda può essere considerato una sorgente di onde sferiche in fase con l'onda primaria, e i successivi fronti d'onda della primaria sono determinati dall'involuppo di quelli di tali onde sferiche. Il principio di Huygens ha fisicamente poco senso (le sorgenti delle onde non sono le onde stesse), tuttavia dà i risultati corretti; inoltre, la sua applicazione in questo contesto permette di generalizzare i postulati dell'ottica geometrica alla propagazione di altri tipi di onde, come quelle sonore o di gravità.

Consideriamo quindi un'onda piana (cioè con fronti d'onda che sono rette o piani paralleli) che, provenendo da un mezzo in cui si muove con velocità v_1 , impatta l'interfaccia con un altro mezzo, in cui ha velocità v_2 , con un angolo di incidenza θ_1 . Prendiamo due punti, sullo stesso fronte d'onda, che si muovono lungo due raggi distanti d tra loro (Figura 3). I due punti incontrano la superficie ad una distanza temporale $\Delta t = \frac{d \tan \theta_1}{v_1}$, tempo durante il quale l'onda sferica emessa dal primo punto di contatto si è propagata di una distanza $v_2 \Delta t$, determinando l'angolo di rifrazione: $\sin \theta_2 = v_2 \Delta t \left(\frac{d}{\cos \theta_1} \right)^{-1} = \frac{v_2}{v_1} \sin \theta_1$, cioè il risultato previsto dalla legge di Snell. La legge della riflessione si ottiene in maniera analoga.

Infine, notiamo che dal principio di Huygens segue che, nel passaggio da un mezzo a un altro, non varia la frequenza ν dell'onda. Infatti, le sorgenti sull'interfaccia emettono i nuovi fronti d'onda con lo stesso intervallo temporale che c'era tra i precedenti, perciò tale intervallo di tempo rimane costante. Dalla relazione $v = \lambda\nu$ deduciamo che a cambiare è la lunghezza d'onda λ .

4 Passaggio al continuo

Finora abbiamo trattato solo situazioni in cui è presente una separazione netta tra due mezzi con indice di rifrazione diverso. Tuttavia, si può applicare l'ottica geometrica anche per descrivere la propagazione della luce in mezzi il cui indice di rifrazione varia con continuità.

Partiamo considerando un raggio di luce che attraversa tre strati paralleli di diversi materiali, di indici di rifrazione n_1, n_2, n_3 . Applicando due volte la legge di Snell, il raggio entra nel terzo materiale con un angolo θ_3 dato da $n_3 \sin \theta_3 = n_2 \sin \theta_2 = n_1 \sin \theta_1$ (con ovvio significato di θ_1 e θ_2), grazie al fatto che le interfacce sono parallele, e quindi lo sono anche tra loro le normali nei due diversi punti di incidenza.

In generale, quindi, se un raggio attraversa più strati paralleli di diversi materiali, la sua direzione finale sarà legata a quella iniziale semplicemente applicando la legge di Snell tra il primo e l'ultimo strato. Questa osservazione ci permette di trattare facilmente il caso di un materiale con indice di rifrazione $n(y)$ dipendente dall'altezza y , perché possiamo immaginarlo come composto da strati orizzontali di altezza infinitesima in cui l'indice di rifrazione è costante. Se $h(x)$ è la funzione che descrive la traiettoria del raggio, il seno dell'angolo con la verticale è $\frac{1}{\sqrt{1+h'(x)^2}}$, quindi dalla legge di Snell troviamo che la quantità

$$\frac{n(h(x))}{\sqrt{1+h'(x)^2}}$$

è una costante. Una volta data un'opportuna condizione iniziale sulla traiettoria del raggio, che determini il valore della costante, si ottiene un'equazione differenziale per $h(x)$. Alternativamente, se in partenza è nota $h(x)$, la relazione può essere risolta per $n(h(x))$, da cui si ricava $n(y)$ invertendo la funzione $h(x)$.

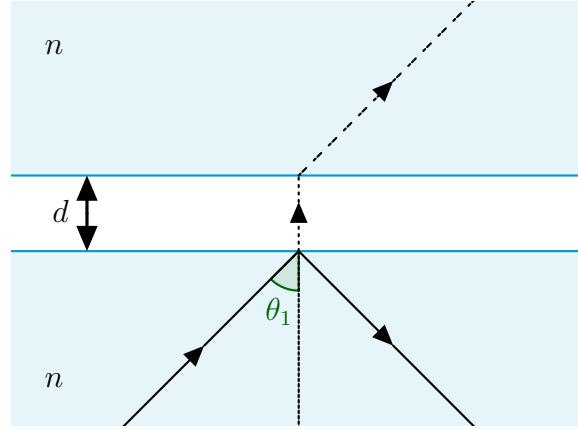


Figura 4: effetto tunnel elettromagnetico: nonostante $\theta_1 > \theta_{\text{lim}}$, se $d \lesssim \lambda$ è presente anche il raggio trasmesso nel secondo vetro.

5 Limiti di validità

Abbiamo più volte detto che l'ottica geometrica non è che un'approssimazione delle soluzioni ondulatorie delle equazioni di Maxwell per i mezzi materiali, ma in quali condizioni quest'approssimazione è valida? La risposta è legata al fatto che si sta trascurando la natura ondulatoria della luce. Dev'essere vero, infatti, che la lunghezza d'onda λ della luce che stiamo considerando sia molto minore rispetto alle dimensioni tipiche degli oggetti con cui la luce interagisce: quindi, per esempio, non si può più trascurare la diffrazione della luce da un'apertura di larghezza comparabile con λ . La lunghezza d'onda della luce visibile varia da circa 400 nm a circa 700 nm.

Nel caso di un mezzo con indice di rifrazione variabile con continuità, la condizione richiesta può essere espressa quantitativamente scrivendo $|\frac{dn}{dy}| \ll 1$, o anche, usando $n = \frac{c}{\lambda\nu}$, come $\frac{c}{\nu} \frac{1}{n^2} |\frac{dn}{dy}| \ll 1$, cioè l'indice di rifrazione deve variare su scale molto maggiori rispetto alla lunghezza d'onda.

Un esempio piuttosto illuminante di fallimento dell'ottica geometrica è l'effetto tunnel elettromagnetico (Figura 4). Consideriamo un raggio di luce soggetto a riflessione totale su una superficie (per esempio, di separazione tra vetro e aria), posta molto vicina ad un'altra superficie, oltre la quale inizia un nuovo materiale, ad esempio lo stesso di prima. Per quanto visto finora, non c'è alcun motivo per cui ci dovremmo aspettare che una parte del raggio attraversi lo spazio di separazione tra i due vetri, eppure è quello che si osserva. Il motivo si comprende soltanto risolvendo il problema con le equazioni di Maxwell, e risiede nel fatto che i campi elettromagnetici, nella zona di separazione e in assenza dell'ulteriore strato di materiale, non sono

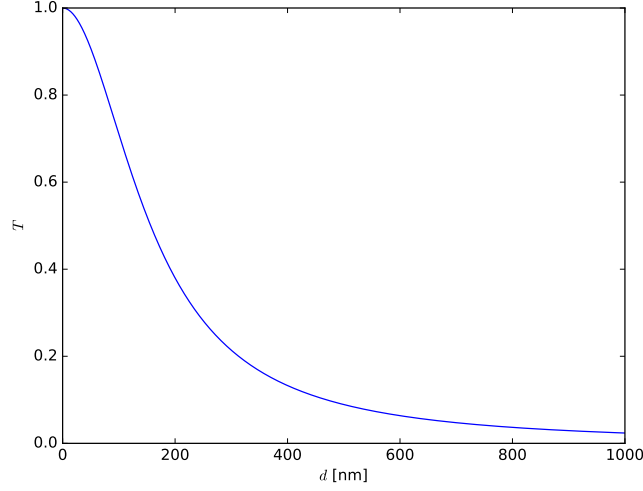


Figura 5: rapporto T tra intensità del raggio trasmesso nel secondo vetro e intensità del raggio incidente, in funzione di d , nel caso in cui $n = 1.5$, $\theta_1 = \theta_{\text{lim}}$ e $\lambda = 550$ nm. A $d = 0$ i vetri coincidono e $T = 1$; poi T decresce all'aumentare di d , smorzandosi su una lunghezza tipica dell'ordine di λ . L'ottica geometrica approssima questa discesa graduale con un gradino ($T = 0$ per $d > 0$).

nulli, ma hanno un'ampiezza proporzionale a $e^{-\frac{\omega}{c}\sqrt{n_2^2 \sin^2 \theta_1 - n_1^2} x}$, dove x è la distanza dalla prima superficie e $\omega = 2\pi\nu$ è la frequenza angolare. Essi sono quindi esponenzialmente smorzati e, riscrivendo l'esponenziale in termini delle lunghezze d'onda ($e^{-2\pi\sqrt{\sin^2 \theta_1/\lambda_2^2 - 1/\lambda_1^2} x}$) diventa più evidente che la lunghezza caratteristica dello smorzamento è legata, ovviamente, proprio alle lunghezze d'onda. Nel limite di ottica geometrica, l'esponenziale è nullo e i campi sono del tutto assenti nella zona oltre la prima interfaccia. Finché non si inserisce il terzo strato di materiale, inoltre, i campi sono fatti in modo da non trasportare energia perpendicolarmente all'interfaccia, ma soltanto parallelamente; quando invece si inserisce il terzo strato questi campi si riflettono sulla seconda interfaccia, creando interferenza con i campi già presenti e facendo in modo che avvenga un trasporto di energia perpendicolarmente all'interfaccia in quantità proporzionale al quadrato dell'ampiezza dei campi.

Altri due aspetti ignorati dall'ottica geometrica sono l'assorbimento e la dispersione della luce nei mezzi materiali. Il primo consiste nella riduzione dell'intensità della luce, il secondo nella dipendenza di n da ν , responsabile della separazione della luce in colori dopo l'attraversamento di due superfici non parallele, come quelle di un prisma.

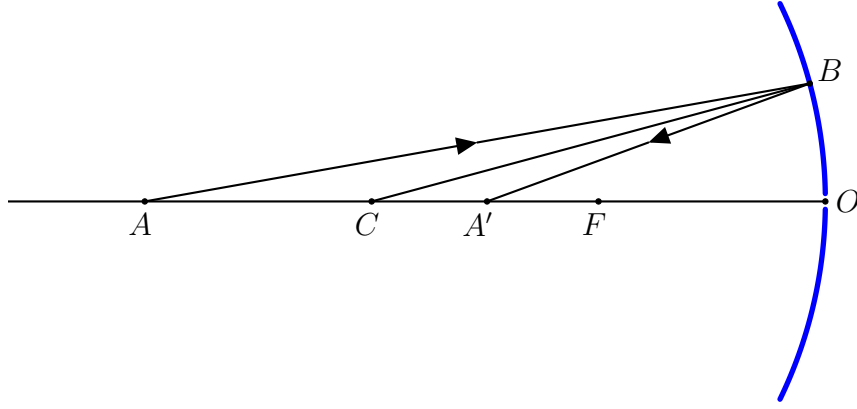


Figura 6: specchio sferico.

6 Specchi, diottri e lenti

Seppur approssimata, l'ottica geometrica consente di descrivere efficacemente il comportamento di sistemi ottici di grandezza macroscopica, come specchi curvi, lenti e combinazione di essi. Le varie leggi che ne derivano sono ben note, ma è un utile esercizio provare a ricavarle.

Chiariamo prima di tutto cosa si intende per *immagine*. Quando vediamo un oggetto (che possiamo pensare come una lampadina), capiamo che è collocato in un certo punto perché i raggi che partono da esso divergono da quel punto. I sistemi ottici deviano i raggi e fanno nascere nuovi punti in cui i raggi, durante il loro cammino, convergono, per poi divergere nuovamente. Ricevendo tali raggi, percepiremo l'oggetto come posto anche nel nuovo punto di convergenza, vedendo quindi una nuova immagine di esso.

Analizziamo ora il caso di uno specchio a forma di calotta sferica di raggio R e centro C , visto in sezione in Figura 6. Affinché funzioni la classica legge dei punti coniugati, che a breve ricaveremo, è necessario che il percorso dei raggi sia parassiale, ossia che i raggi che si riflettono formino un angolo piccolo (tra loro e con l'asse ottico CO). Imporremo quindi che sia le dimensioni dell'oggetto, sia il raggio r del bordo dello specchio siano molto minori di R .

Consideriamo adesso un punto A dell'oggetto, per semplicità sull'asse ottico, sorgente di raggi. Dopo la riflessione, dove vanno a convergere questi raggi? Prendiamo un generico raggio che si riflette nel punto B e incontra l'asse ottico in A' . Se $p = AO$, $q = A'O$, allora, per il teorema della bisettrice,

$$\frac{AC}{CA'} = \frac{AB}{A'B} \implies \frac{p - R}{R - q} \approx \frac{\sqrt{p^2 + h^2}}{\sqrt{q^2 + h^2}} \approx \frac{p}{q},$$

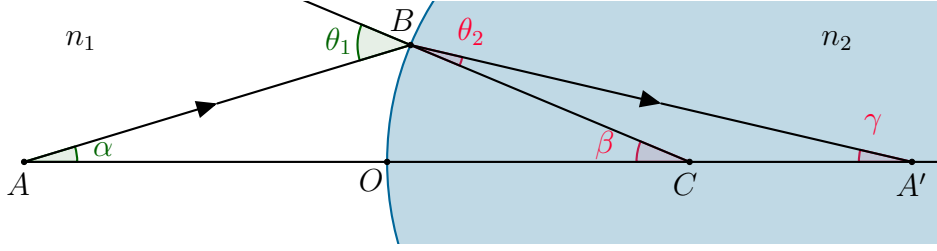


Figura 7: diottro, C è il centro di curvatura.

dove si sono approssimati i triangoli $\triangle AOB$ e $\triangle A'OB$ come rettangoli in O , con altezza $h \approx OB$, e si è infine sviluppato al prim'ordine in h .¹ Semplicemente riscrivendo l'equazione si ottiene

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R},$$

cioè la nota legge dei punti coniugati (spesso scritta introducendo $f = R/2$). Tutto ciò vuol dire che, al prim'ordine, i raggi che partono da A e che si riflettono sullo specchio, passano poi tutti per A' , indipendentemente dal particolare punto B . Ecco perché A' è la posizione dell'immagine prodotta dallo specchio. La deviazione del comportamento reale da questa approssimazione al prim'ordine dà luogo alla cosiddetta aberrazione sferica. Vale la pena notare che, se si ha a che fare con raggi paralleli all'asse ottico, è possibile eliminare l'aberrazione ricorrendo ad uno specchio a forma di paraboloide.

Passiamo ora al diottro, cioè un materiale trasparente con superficie sferica (Figura 7). Come prima, consideriamo un raggio che parte da A , incontra il diottro in B e torna sull'asse ottico in A' . Lavorando ancora in approssimazione parassiale, tutti gli angoli considerati sono piccoli (tendono a 0 al tendere di B a O), per cui, usando $\sin x \approx x$, la legge di Snell si scrive $n_1\theta_1 = n_2\theta_2$. Dal teorema dell'angolo esterno, $\theta_1 = \alpha + \beta$ e $\theta_2 = \beta - \gamma$; sostituendo queste espressioni nella legge di Snell si ha

$$n_1\alpha + n_2\gamma = (n_2 - n_1)\beta.$$

Grazie all'approssimazione parassiale possiamo scrivere, analogamente al caso precedente, $OB = \alpha AO = \beta OC = \gamma OA'$. Ponendo $AO = p$, $OA' = q$ e

¹Si tratta di usare l'approssimazione di Bernoulli $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ e l'approssimazione $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$, valide quando $x \ll 1$. Ciò mette in luce che, per essere precisi, il procedimento è corretto quando $h/p \leq r/p \ll 1$, cioè l'oggetto non deve trovarsi troppo vicino allo specchio, il che farebbe evidentemente saltare l'approssimazione parassiale. Per quanto riguarda h/q , invece, se l'oggetto è a sinistra dello specchio, allora sicuramente $h/q \leq r/q < 2r/R \ll 1$.

ricordando che $OC = R$, basta sostituire gli angoli nell'espressione precedente per ottenere la legge dei punti coniugati per un diottro²:

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}.$$

Da qui, è un attimo passare alla legge dei punti coniugati per una lente fatta da un materiale con due superfici sferiche. Bisogna applicare la legge del diottro ad entrambe le facce: l'immagine formata dal primo diottro funge da sorgente per il secondo, ma la sua coordinata entra nell'equazione con segno opposto (stiamo qui considerando una lente sottile, quindi trascuriamo la distanza tra i vertici delle due superfici). Sommando le due leggi del diottro, otteniamo quindi ($n_1 = 1$ e $n_2 = n$ per semplicità)

$$\frac{1}{p} + \frac{n}{q'} - \frac{n}{q'} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Ecco quindi che la relazione tra distanza focale e parametri geometrici di una lente è $\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$, in cui bisogna ovviamente porre attenzione ai segni dei raggi. Data la presenza dell'indice di rifrazione, in lenti e diottri è presente anche un altro tipo di aberrazione, dovuta alla dispersione: l'aberrazione cromatica, causa di fuochi diversi per lunghezze d'onda diverse.

7 Alcuni problemi olimpici

I problemi 1, 2, 3 e 4 riguardano l'applicazione delle leggi dell'ottica a superfici sferiche. Il problema 4 richiede anche l'uso del concetto di pressione di radiazione (equivalentemente, impulso trasportato dalla luce). I problemi 5 e 6 riguardano la traiettoria di raggi in mezzi con indice di rifrazione che varia con continuità. I problemi 7 e 8 sono sull'aberrazione sferica e cromatica rispettivamente. Agli studenti presenti allo stage, si consiglia di affrontare per primi i problemi 2, 6 e 7, in quest'ordine, in seguito alla lezione.

1. IPhO 1968/3

Un fascio di raggi paralleli incide sulla faccia piatta di un semicilindro trasparente, in modo che i raggi si muovano su un piano perpendicolare all'asse del cilindro e l'angolo di incidenza sia 45° . Se l'indice di rifrazione del semicilindro è $n = \sqrt{2}$, da quale zona della superficie cilindrica emergono i raggi?

²Se $n_1 = 1$ e $n_2 = -1$ (qualunque cosa voglia dire fisicamente), si riottiene la legge dei punti coniugati per lo specchio sferico, ricordando che abbiamo scelto una convenzione opposta sui segni di q e R .

2. IPhO 1971/4

Un acquario sferico, dalle pareti di vetro molto sottile, è riempito d'acqua (di indice di rifrazione $n = 4/3$) e posizionato davanti ad uno specchio piano verticale. Il raggio dell'acquario è R e la distanza tra il suo centro e lo specchio è $3R$. Un piccolo pesce rosso, che inizialmente è nel punto dell'acquario più vicino allo specchio, inizia a muoversi con velocità v lungo la parete dell'acquario. Un osservatore guarda il pesce rosso da una distanza molto grande e lungo una linea di vista passante per il centro dell'acquario. L'osservatore vede due immagini del pesce: qual è la loro velocità relativa v_{rel} all'istante iniziale?

3. Un cilindro di altezza h e raggio R e indice di rifrazione n viene tagliato in quattro parti uguali, con due tagli perpendicolari alle basi. Una di queste quattro parti viene poggiata, su un piano, in modo che la superficie di contatto col piano sia un rettangolo di lati h e R . Un fascio luminoso, uniforme e parallelo al piano, incide sulla superficie piatta ortogonale al piano e alle due basi. Quali zone del piano risultano illuminate?

4. IPhO 2003/3B

Una semisfera di vetro trasparente, di raggio R , massa m e indice di rifrazione n , è posta nel vuoto, in presenza dell'accelerazione di gravità $\vec{g}$ e con la faccia piana rivolta verso il basso. Un laser emette verso l'alto un fascio di raggi paralleli e monocromatici, che incidono uniformemente e ortogonalmente al centro della faccia piana della semisfera. Il fascio di raggi è cilindrico, con raggio $\delta \ll R$.

La semisfera di vetro non assorbe la luce del laser e la sua superficie è ricoperta da un sottilissimo strato di materiale trasparente che rende trascurabile la riflessione della luce quando essa entra ed esce dalla semisfera.

Trascurando termini di ordine $(\delta/R)^3$ o superiore, trovare la potenza P del laser che bilanci il peso della semisfera e le permetta di levitare.

Nota: $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$ quando $\theta \ll 1$.

5. IPhO 1995/2

La velocità di propagazione del suono nell'oceano varia con profondità, temperatura e salinità. Se z è l'asse verticale, in un modello in cui la velocità ha un minimo ad una certa profondità, la velocità del suono è $c = c_0 + b|z|$ (c_0 e b costanti), in cui si è fissato $z = 0$ in corrispondenza del minimo di c . La superficie dell'oceano è a $z = z_s$ e il fondale (assunto orizzontale) è a $z = -z_b$. Una sorgente è posta a $(x, z) = (0, 0)$ ed

emette un “raggio sonoro” nel piano x - z che forma un angolo θ_0 con l’asse z . A causa della variazione di c , il raggio verrà rifratto.

- (a) Mostrare che la traiettoria del raggio forma un arco di circonferenza di raggio $R = \frac{c_0}{b \sin \theta_0}$, con $0 < \theta_0 < \pi/2$.
- (b) Trovare il più piccolo valore di θ_0 , per raggi diretti verso l’alto, per cui il raggio si trasmetta senza riflettersi sulla superficie dell’oceano, in funzione di z_s , c_0 e b .
- (c) Un ricevitore sonoro è posizionato a $(x, z) = (X, 0)$. Trovare i valori di θ_0 per cui il raggio emesso dalla sorgente arrivi al ricevitore. Si assuma che z_s e z_b siano sufficientemente grandi da rimuovere la possibilità che il raggio si rifletta sulla superficie o sul fondale dell’oceano.
- (d) Calcolare i quattro più piccoli valori di θ_0 che permettono al raggio di raggiungere il ricevitore nel caso in cui
 - $X = 10\,000\text{ m}$;
 - $c_0 = 1500\text{ m s}^{-1}$;
 - $b = 0.020\,00\text{ s}^{-1}$.
- (e) Per il più piccolo valore di θ_0 trovato al punto (c), trovare il tempo impiegato dal raggio per andare dalla sorgente al ricevitore. Calcolarne il valore numerico usando i valori dati al punto (d). Può essere utile il seguente risultato:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log \tan \frac{x}{2} + \text{cost.}$$

Calcolare il tempo impiegato da un raggio che raggiunga il ricevitore muovendosi lungo $z = 0$. Se vengono emessi insieme, quale dei due raggi arriverà prima?

6. IPhO 2015/2/B3

Un raggio laser incide orizzontalmente su una soluzione di zucchero, in cui la concentrazione dello zucchero decresce con l’altezza. Di conseguenza, anche l’indice di rifrazione decresce con l’altezza, secondo la legge $n(y) = n_0 - ky$. Se il raggio entra nella soluzione a $(x_0, y_0) = (0, 0)$, trovare la traiettoria seguita dal raggio, scrivendo un’espressione per x in funzione di y e delle altre grandezze.

Nota: può essere utile usare uno dei seguenti integrali:

$$\int \frac{1}{\cos \theta} d\theta = \log \left(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta \right) + \text{cost.},$$

oppure

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \text{cost.}$$

Attenzione: il testo originale chiede $x(y)$, ma in realtà l'espressione $y(x)$ è più pulita: provare a ricavarla ricordando i seguenti fatti

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

7. IPhO 1970/4

Uno specchio sferico è installato in un telescopio. Il diametro del suo bordo è $D = 0.5$ m e il suo raggio di curvatura è $R = 2$ m. In corrispondenza del fuoco dello specchio è posizionato un ricevitore a forma di disco circolare, con l'asse coincidente con l'asse ottico. Quanto deve valere il raggio r del ricevitore affinché esso possa ricevere interamente il flusso luminoso riflesso dallo specchio? Di quanto si ridurrebbe il flusso ricevuto se il raggio del ricevitore venisse ridotto di 8 volte?

Nota: può essere usata la seguente approssimazione, valida quando $x \ll 1$: $\sqrt{1 - x} \approx 1 - \frac{x}{2}$.

Nello svolgimento del problema, trascurare la diffrazione.

8. Senigallia 1999/3

L'indice di rifrazione di un materiale trasparente dipende dalla lunghezza d'onda della luce, per cui l'immagine di una sorgente puntiforme di luce bianca – ad esempio una stella – prodotta da una lente non può essere puntiforme perché la lente presenta lunghezze focali diverse per ogni colore (aberrazione cromatica). In questo problema ci si propone di progettare un sistema ottico che presenti una ridotta aberrazione cromatica.

Nella regione del visibile si può considerare, con buona approssimazione, che l'indice di rifrazione di un dato materiale trasparente vari linearmente con la lunghezza d'onda della radiazione; la variazione può essere descritta dal parametro $k = \Delta n / \Delta \lambda$.

Si considerino tre radiazioni, C, D ed F rispettivamente di lunghezza d'onda:

$$\lambda_C = 656 \text{ nm}, \quad \lambda_D = 589 \text{ nm}, \quad \lambda_F = 486 \text{ nm}.$$

Sono disponibili due vetri ottici, di tipo crown e di tipo flint, caratterizzati da:

- Vetro crown $n_D = 1.5080$, $k = -5.98 \times 10^4 \text{ m}^{-1}$

- Vetro flint $n'_D = 1.6200$, $k' = -1.46 \times 10^5 \text{ m}^{-1}$

dove n_D , n'_D sono gli indici di rifrazione relativi alla radiazione D.

1. Calcolare gli indici di rifrazione n_C , n_F del vetro crown ed n'_C , n'_F del vetro flint, relativi alle radiazioni di lunghezza d'onda λ_C e λ_F .

Una lente con distanza focale $f = 20 \text{ cm}$ relativa alla radiazione D e un diametro $\overline{AB} = 5 \text{ cm}$ viene costruita con uno dei vetri precedenti per ottenere l'immagine di una stella su uno schermo.

2. Considerando solo l'effetto dell'aberrazione cromatica, mostrare che la migliore immagine ottenibile è un dischetto. Decidere con quale vetro si avrà la minore aberrazione e stimare il diametro del dischetto.

Per ridurre fortemente l'aberrazione cromatica si può ricorrere a due lenti incollate fra loro, fatte con i due diversi vetri e calcolate in modo che l'aberrazione di una compensi l'aberrazione dell'altra (*doppietto acromatico*). La riduzione dell'aberrazione si ottiene facendo in modo che i fuochi del sistema, relativi alle radiazioni C ed F, coincidano. La distanza focale del doppietto è definita come quella relativa alla radiazione di lunghezza d'onda D.

3. Tenendo conto che due lenti sottili molto vicine fra loro si comportano come un'unica lente sottile, considerando radiazione monocromatica e studiando il percorso di opportuni raggi limitatamente al caso di due lenti convergenti (ma il risultato è generale), giustificare che le focali f_1 , f_2 ed f delle due lenti e di quella equivalente, sono legate dalla relazione

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}.$$

Si vuole calcolare un doppietto acromatico che prevede una lente crown simmetrica e una lente flint, incollate insieme.

4. Determinare i raggi di curvatura delle superfici delle lenti del doppietto in modo che la sua distanza focale sia $F = 20 \text{ cm}$.

Suggerimento: risolvere il problema usando come incognite i reciproci dei raggi di curvatura richiesti; nei calcoli intermedi tenere un numero di cifre superiore a quelle strettamente significative.

Nota: la distanza focale f di una lente posta in un mezzo omogeneo, quando si conoscono i raggi R_1 ed R_2 di curvatura delle facce e l'indice

di rifrazione n del vetro relativo al mezzo in cui la lente è immersa, può essere ricavata dalla relazione (detta dell'ottico)

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

R_1 ed R_2 devono essere considerati positivi se la luce che attraversa la faccia considerata incontra prima il vertice della calotta e poi il centro di curvatura, negativi se la luce incontra prima il centro di curvatura e poi il vertice.

8 Soluzioni dei problemi

8.1 IPhO 1968/3

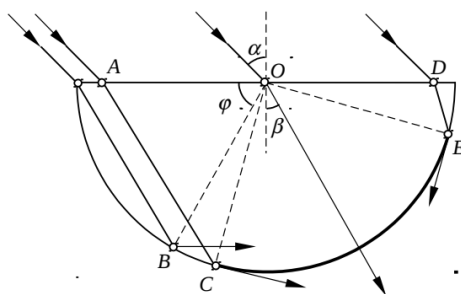


Figura 8

Con riferimento alla Figura 8, usiamo l'angolo φ per descrivere la posizione dei raggi nel vetro. Per la legge della rifrazione, $\sin 45^\circ = \sqrt{2} \sin \beta$, da cui $\sin \beta = 1/2$, cioè $\beta = 30^\circ$, uguale per tutti i raggi incidenti. Dobbiamo capire cosa accade quando φ varia tra 0° e 180° .

È facile notare che φ non può essere minore di 60° . L'angolo limite è dato da $\sin \beta_0 = 1/n = 1/\sqrt{2}$, da cui $\beta_0 = 45^\circ$. Nel caso al limite della riflessione totale interna, $\angle ACO = 45^\circ$, quindi $\varphi = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$. Se φ vale più di 75° , i raggi possono emergere dal cilindro. Aumentando φ raggiungiamo nuovamente l'angolo limite $\angle OED = 45^\circ$. Dunque i raggi emergono dal cilindro di vetro quando

$$75^\circ < \varphi < 165^\circ$$

e CE , l'arco da cui emergono i raggi, sottende un angolo al centro di 90° .

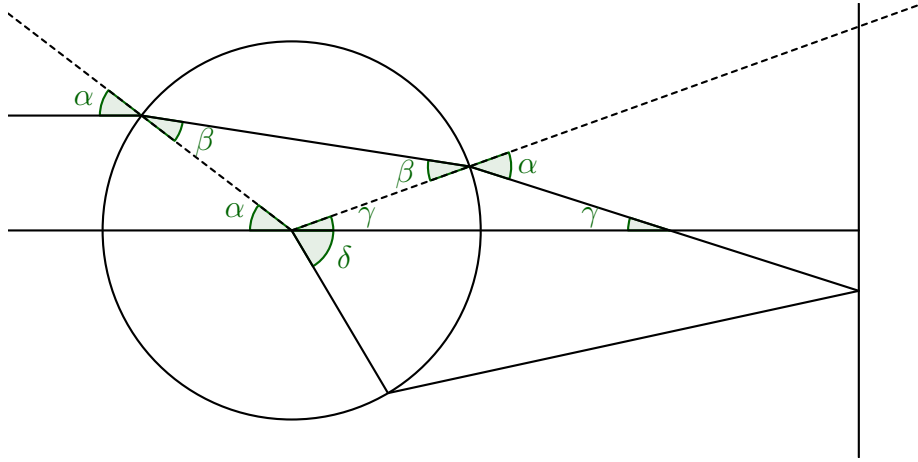


Figura 9

8.2 IPhO 1971/4

In un breve tempo Δt il pesce si sposta di $d = v\Delta t$, quindi possiamo passare dalla richiesta sulla velocità a quella sulla (breve) distanza delle immagini del pesce dal punto di partenza, che scriveremo direttamente in termini di angoli, che approssimano il loro seno. La prima immagine è data dai raggi che partono dal pesce, attraversano l'acquario, ed escono paralleli all'asse ottico; la seconda è data dai raggi che partono dal pesce, si riflettono sullo specchio, attraversano l'acquario ed escono paralleli all'asse ottico. Con riferimento alla Figura 9, dobbiamo trovare la relazione tra α e γ per la prima immagine e tra α e δ per la seconda. Per semplicità stiamo qui vedendo la situazione al contrario, con i raggi che arrivano paralleli da sinistra e attraversano l'acquario per finire dov'è il pesce, ma in punti diversi per le due immagini. Solo alla fine capovolgeremo il punto di vista, imponendo effettivamente uguali i punti in cui si trova il pesce. Dalla legge di Snell e da condizioni geometriche,

$$\alpha = \frac{4}{3}\beta, \quad \alpha + (\pi - 2\beta) + \gamma = \pi,$$

che danno $\alpha = 2\gamma$. Proseguendo il percorso del raggio, notiamo che l'angolo di uscita è nuovamente pari ad α , quindi l'angolo con l'orizzontale del raggio uscente dall'acquario è γ ; perciò, nel tratto di andata e ritorno dallo specchio, il raggio scenderà verticalmente di un tratto $4R\gamma$, dunque, poiché partiva già da un'altezza $R\gamma$, si ha $\delta = 3\gamma = 3\alpha/2$. Ora capovolgiamo il punto di vista: se l'angolo che individua il pesce è θ , quello che individua la prima immagine è $\alpha_1 = 2\theta$ e quello che individua la seconda è $\alpha_2 = 2\theta/3$, ma capovolto. Quindi

le due immagini si muovono in direzioni opposte con la velocità relativa

$$v_{\text{rel}} = \left(2 + \frac{2}{3}\right)v = \frac{8}{3}v.$$

8.3

Il problema è invariante sotto traslazione nella direzione parallela al piano e perpendicolare ai raggi, quindi poniamo l'asse x sul piano e con l'origine coincidente col centro del cilindro e studiamo per quali valori di $y = x/R$ il piano riceve raggi.

I raggi riflessi dalla faccia verticale sono paralleli al piano, quindi possiamo trascurarli. I raggi che entrano nel cilindro possono essere soggetti a riflessione totale interna, oppure dividersi in un raggio uscente e uno riflesso. Considerando i raggi riflessi, è facile vedere al diminuire della distanza del raggio originario dal piano, diminuisce il valore y dell'intersezione tra il raggio riflesso e il piano. Quindi il minimo si avrà per raggi parassiali, i quali vanno soggetti a riflessione come in uno specchio sferico, quindi vanno nel fuoco, $y = 1/2$. Inoltre, tutte le zone fino a $y = 1$ possono essere illuminate dalla riflessione.

I raggi rifratti parassiali finiscono in $y = \frac{n}{n-1}$ (dalla formula del diotetro con $q \rightarrow \infty$), mentre quelli che escono tangenti alla superficie finiscono in $y = \frac{n}{\sqrt{n^2-1}} < \frac{n}{n-1}$ (basta un po' di geometria). Non è difficile rendersi conto che tutti gli altri raggi rifratti finiscono tra questi due punti.

8.4 IPhO 2003/3B

L'origine della forza verso l'alto subita dalla semisfera risiede nella deviazione raggi: poiché la luce trasporta quantità di moto, viene deviata anche quest'ultima, il che genera una forza. L'energia di un fotone di frequenza ν è $E = h\nu$ e la sua quantità di moto è $p = E/c$ (lo si pensi come una particella relativistica di massa nulla e si applichi $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$). Quindi, se il laser ha potenza P , in un tempo Δt emette una quantità di moto $p = \Delta E/c = P\Delta t/c$. Essendo i raggi parassiali ($\delta \ll R$), essi, una volta usciti, verranno deviati nel fuoco del diotetro, che dista $\frac{R}{n-1}$ dal vertice. Quindi un raggio che dista x dall'asse z verrà deviato di un angolo $\beta = (n-1)x/R$, perciò la nuova componente verticale della quantità di moto sarà una frazione pari a $\cos \beta \approx 1 - \frac{(n-1)^2 x^2}{2R^2}$ di quella originale. A questo punto, ignorando le componenti orizzontale delle quantità di moto finali grazie alla simmetria cilindrica, troviamo che la quantità di moto verticale uscente è pari a una

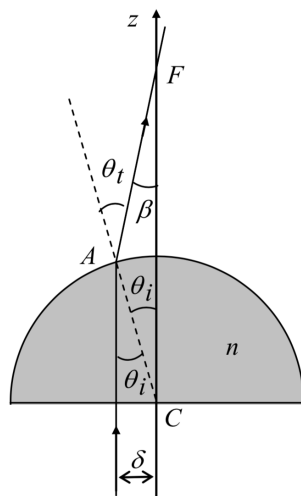


Figura 10

frazione

$$\int_0^\delta \left(1 - \frac{(n-1)^2 x^2}{2R^2}\right) \frac{2\pi x dx}{\pi \delta^2} = 1 - \frac{(n-1)^2}{4} \left(\frac{\delta}{R}\right)^2$$

di quella originale. Ciò produce una forza $F = (p_{\text{entrante}} - p_{\text{uscente}})/\Delta t = \frac{P}{c} \frac{(n-1)^2}{4} \left(\frac{\delta}{R}\right)^2$ verso l'alto, che, eguagliata a mg , dà infine

$$P = \frac{4mgc}{(n-1)^2} \left(\frac{R}{\delta}\right)^2.$$

8.5 IPhO 1995/2

- (a) Per $z > 0$ la velocità è $c = c_0 + bz$, quindi l'indice di rifrazione (normalizzato, ad esempio, con la velocità c_0) è $n(z) = \frac{c_0}{c} = \frac{1}{1+bz/c_0}$. Come ricavato nella sezione 4 della teoria, la quantità $\frac{n(h(x))}{\sqrt{1+h'(x)^2}}$ è una costante.

Sostituiamo ad $h(x)$ l'equazione di una circonferenza di raggio R e centro in $(0, -y_0)$, con $y_0 > 0$ (possiamo porre il centro in $x = 0$ grazie al fatto che il problema è invariante sotto traslazione lungo x), cioè $h(x) = \sqrt{R^2 - x^2} - y_0$. Allora

$$n(h(x)) = \frac{1}{1 + \frac{b}{c_0} (\sqrt{R^2 - x^2} - y_0)}$$

e

$$\sqrt{1 + h'(x)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Il loro rapporto è quindi costante se scegliamo $y_0 = \frac{c_0}{b}$. Tramutando questa relazione geometrica in termini di R e θ_0 si trova $y_0 = R \sin \theta_0$, cioè $R = \frac{c_0}{b \sin \theta_0}$. Confrontare con la soluzione ufficiale.

- (b) È sufficiente imporre che l'altezza massima del raggio sia uguale all'altezza della superficie, quindi

$$R - y_0 = z_s \implies \sin \theta_0 = \frac{1}{1 + bz_s/c_0}.$$

- (c) Il raggio deve percorrere un numero intero n di archi di circonferenza (sopra e sotto $z = 0$), da cui

$$X = n 2R \cos \theta_0 \implies \tan \theta_0 = \frac{2c_0 n}{bX}.$$

- (d) $n = 1, \theta_0 = 86.19^\circ$.
 $n = 2, \theta_0 = 88.09^\circ$.
 $n = 3, \theta_0 = 88.73^\circ$.
 $n = 4, \theta_0 = 89.04^\circ$.

- (e) Il raggio percorre un solo arco di circonferenza. Parametrizzando la seconda metà dell'arco con l'angolo al centro $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} - \theta_0$, il tempo impiegato è

$$T = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2} - \theta_0} \frac{R d\varphi}{c}.$$

La relazione tra raggio e angolo può essere usata punto per punto nella traiettoria, infatti nel punto (a) si è mostrato il legame tra il raggio della traiettoria e l'angolo iniziale, ma si può ripetere il ragionamento per l'angolo in un punto qualunque. Sostituendo $R = \frac{c}{b \sin \theta}$ e $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$ si ottiene

$$T = \frac{2}{b} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin \theta} = -\frac{2}{b} \log \tan \frac{\theta_0}{2} = 6.6546 \text{ s}.$$

Il raggio orizzontale impiega invece

$$t = \frac{X}{c_0} = 6.6666 \text{ s}$$

e arriva dunque più tardi.

8.6 IPhO 2015/2/B3

Dall'equazione ricavata nella sezione 4 della teoria, abbiamo che la quantità $\frac{n(y(x))}{\sqrt{1+y'(x)^2}}$ è una costante. Valutandola in $x = 0$ troviamo che il valore di tale costante è n_0 (infatti $y'(0) = 0$ perché il raggio arriva orizzontalmente). Dunque l'equazione differenziale è

$$\frac{1 - \frac{k}{n_0}y(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} = 1.$$

Dato che $\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$ e che $1 + \sinh^2 x = \cosh^2 x$, proviamo una soluzione del tipo $y'(x) = \sinh(Ax) \implies y(x) = B + \frac{1}{A} \cosh(Ax)$. Sostituendo,

$$1 - \frac{k}{n_0}B - \frac{k}{n_0A} \cosh(Ax) = \cosh(Ax),$$

da cui notiamo che scegliendo $A = -\frac{k}{n_0}$ e $B = \frac{n_0}{k}$ l'equazione è soddisfatta. Quindi, la traiettoria è

$$y(x) = \frac{n_0}{k} \left(1 - \cosh\left(\frac{k}{n_0}x\right) \right),$$

che soddisfa anche le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$. Invertendo il coseno iperbolico, si trova $x(y)$ (la funzione inversa del coseno iperbolico è $\log(x + \sqrt{x^2 - 1})$). Confrontare con la soluzione ufficiale.

8.7 IPhO 1970/4

Consideriamo il raggio che colpisce lo specchio esattamente sul bordo. Se α è l'angolo che la congiungente centro-bordo forma con l'asse ottico ($\sin \alpha = \frac{D}{2R}$), allora, ricordando che il fuoco si trova a distanza $R/2$ dal centro e guardando dove va a finire il raggio sul piano focale dopo la riflessione, il raggio del rivelatore sarà dato da

$$r = \left(R \cos \alpha - \frac{R}{2} \right) \tan(2\alpha) - D/2 = R \left[\left(\cos \alpha - \frac{1}{2} \right) \tan(2\alpha) - \sin \alpha \right].$$

Ora espandiamo questa espressione fino al terzo ordine. Si potrebbe fare immediatamente conoscendo gli sviluppi in serie di Taylor di seno e tangente, ma qui usiamo una via alternativa, che sfrutta il suggerimento fornito nel testo. Ricordando che $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, si può riscrivere r come

$$\frac{r}{R} = \sin(2\alpha) \left(\frac{\cos \alpha}{\cos(2\alpha)} - \frac{1}{2 \cos(2\alpha)} - \frac{1}{2 \cos \alpha} \right).$$

Usando l'approssimazione fornita nel testo, $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \approx 1 - \frac{\sin^2 \alpha}{2} \approx 1 - \alpha^2/2$, da cui anche $\frac{1}{\cos \alpha} \approx 1 + \alpha^2/2$. Sostituendo tutto nell'espressione precedente, otteniamo

$$\begin{aligned} r &\approx R 2\alpha \left(\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)(1 + 2\alpha^2) - \frac{1}{2}(1 + 2\alpha^2) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right) \right) \approx \\ &\approx R \frac{\alpha^3}{2} \approx \frac{D^3}{16R^2} \approx 2 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Il flusso ricevuto è proporzionale a D^2 , che è proporzionale a $r^{2/3}$, quindi se r si riducesse di 8 volte il flusso si ridurrebbe di 4 volte.

8.8 Senigallia 1999/3

Quesito 1. Le radiazioni C ed F sono due radiazioni emesse dall'idrogeno, della serie di Balmer. La radiazione D è quella della riga gialla del sodio.

Se $\Delta n = k\Delta\lambda$, sarà $n_D - n_C = k(\lambda_D - \lambda_C) \implies n_C = n_D - k(\lambda_D - \lambda_C)$. Analogamente, $n_F = n_D - k(\lambda_D - \lambda_F)$, $n'_C = n'_D - k'(\lambda_D - \lambda_C)$, $n'_F = n'_D - k'(\lambda_D - \lambda_F)$. Sostituendo i valori numerici:

$$n_C = 1.50399, \quad n_F = 1.51416, \quad n'_C = 1.61022, \quad n'_F = 1.63504.$$

Quesito 2. La distanza focale della lente sarà diversa – e decrescente – per le tre radiazioni C, D, F. La situazione, rappresentata (non in scala) in Figura 11, indica che l'immagine migliore è un dischetto di diametro PQ . Infatti dovendo considerare contemporaneamente tutti i fasci luminosi compresi tra quello focalizzato nel punto più vicino F_F e quello focalizzato nel punto più lontano F_C , il piano PQ è quello di minima sezione. Da un semplice esame degli indici di rifrazione dei due vetri si nota che gli indici del vetro crown sono più vicini fra loro di quelli del vetro flint; se la distanza focale per la radiazione D è fissata, si ottiene che nel caso della lente crown il segmento $F_F F_C$ ha minore lunghezza di quello relativo alla lente flint. Il diametro della lente è fissato, perciò il diametro del dischetto sarà minore nel caso della lente crown. Per la lente conviene usare, quindi, questo tipo di vetro.

Per valutare la larghezza del dischetto, calcoliamo $F_F F_C = f_C - f_F$. Dalla formula dell'ottico abbiamo, se R_1 e R_2 sono i raggi di curvatura delle facce della lente:

$$\frac{1}{f_D} = (n_D - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right),$$

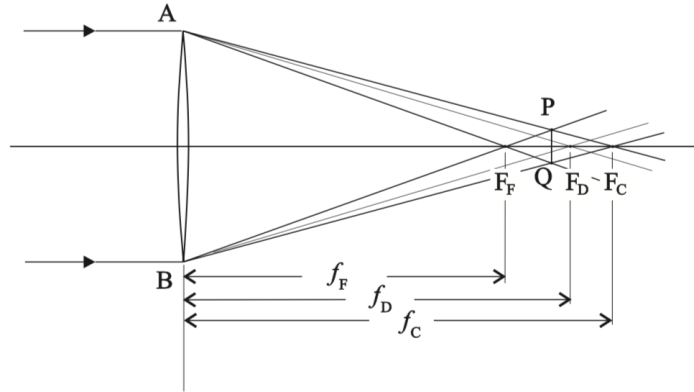


Figura 11

$$\frac{1}{f_F} = (n_F - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right),$$

$$\frac{1}{f_C} = (n_C - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Dividendo membro a membro la prima per la seconda, e poi per la terza, otteniamo

$$f_F = \frac{n_D - 1}{n_F - 1} f_D, \quad f_C = \frac{n_D - 1}{n_C - 1} f_D.$$

Tenendo conto che $f_D = 20$ cm e sostituendo i valori degli indici del vetro crown:

$$f_F = 19.76 \text{ cm}, \quad f_C = 20.16 \text{ cm} \implies F_F F_C = 0.40 \text{ cm}.$$

Il fatto che il segmento $F_F F_C$ sia molto piccolo rispetto alle due distanze focali calcolate assicura che le rette AF_F e AF_C così come BF_F e BF_C possono essere considerate parallele. Il quadrilatero $F_F P F_C Q$ potrà allora essere considerato un rombo, per cui il diametro dell'immagine sarà

$$PQ = \frac{AB}{f_C} \frac{f_C - f_F}{2} = 0.50 \text{ mm}.$$

Per curiosità e confronto: nel caso del vetro flint si avrebbe

$$f_F = 19.53 \text{ cm}, \quad f_C = 20.32 \text{ cm} \implies F_F F_C = 0.80 \text{ cm}$$

e $PQ = 0.99$ mm.

Quesito 3. Se le lenti sono convergenti e a contatto, immaginiamo di porre una sorgente puntiforme (monocromatica nel fuoco F_1 della prima lente.

I raggi usciranno paralleli dalla prima lente e saranno fatti convergere dalla seconda nel suo fuoco F_2 . Siccome il sistema delle due lenti si comporta come una lente sottile, i due punti F_1 e F_2 sono punti coniugati. Vale allora la relazione indicata.

Quesito 4. La determinazione del doppietto consiste nel calcolo dei raggi di curvatura delle due lenti. Sono in totale 4 raggi che, con le condizioni poste, si riducono a 2; infatti le due lenti sono incollate e la lente crown è simmetrica. Pertanto indicando con R_1 il raggio di curvatura della prima faccia della lente crown, sarà $-R_1$ sia il raggio della seconda faccia sia quello della prima faccia della lente flint (che è incollata). Rimane poi da determinare il raggio R_2 della seconda faccia della lente flint.

Usando la formula dell'ottico per una radiazione generica si avrà allora, rispettivamente per la lente crown e per la lente flint:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \frac{2}{R_1}, \quad \frac{1}{f'} = (n' - 1) \left(-\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

E, per il doppietto:

$$\frac{1}{f^*} = (2n - n' - 1) \frac{1}{R_1} - (n' - 1) \frac{1}{R_2}.$$

Per avere la distanza focale richiesta e la correzione acromatica dovrà essere, per le distanze focali relative alle radiazioni D, C, F:

$$\begin{cases} f_D^* = F = 20 \text{ cm} \\ f_C^* = f_F^*. \end{cases}$$

Perciò

$$\begin{cases} (2n_D - n'_D - 1) \frac{1}{R_1} - (n'_D - 1) \frac{1}{R_2} = \frac{1}{F} \\ (2n_F - n'_F - 1) \frac{1}{R_1} - (n'_F - 1) \frac{1}{R_2} = (2n_C - n'_C - 1) \frac{1}{R_1} - (n'_C - 1) \frac{1}{R_2} \\ (2n_D - n'_D - 1) \frac{1}{R_1} - (n'_D - 1) \frac{1}{R_2} = \frac{1}{F} \\ [2(n_F - n_C) - (n'_F - n'_C)] \frac{1}{R_1} - (n'_F - n'_C) \frac{1}{R_2} = 0. \end{cases}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene il sistema, lineare nelle variabili $1/R_1$, $1/R_2$:

$$\begin{cases} 0.3696 \frac{1}{R_1} - 0.620 \frac{1}{R_2} = 5 \\ -0.00448 \frac{1}{R_1} - 0.02482 \frac{1}{R_2} = 0 \end{cases}$$

che risolto fornisce $R_1 = 10.2 \text{ cm}$ e $R_2 = -56.3 \text{ cm}$.

Visti i raggi, si osserva immediatamente che la lente crown è convergente e la lente flint è divergente. La sezione è rappresentata in Figura 12.

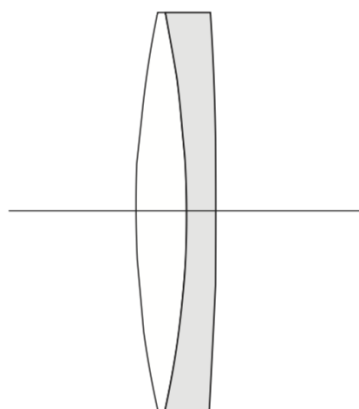


Figura 12