

Circuiti

Bruno Bucciotti (lezione)*, Francesco Hoch (esercizi)[†]

5 febbraio 2019

Sommario

Lo scopo della lezione è introdurre gli elementi circuitali principali, trattare sia correnti continue che alternate (fasori), retta di carico e punto di lavoro, applicazioni del principio di linearità, teoremi di Tellegen, Norton e Thevenin, cenni di elementi non lineari, problemi vari. Si assume familiarità con le basi dei circuiti (formulette per resistenze e condensatori, potenza= $I \cdot V$), risoluzione di circuiti semplici in corrente continua.

1 Introduzione

1.1 Leggi di Kirchhoff

I) In un circuito non vi sono accumuli di carica (caveat sui condensatori, ma funzionerà ugualmente), dunque in un nodo (punto di incontro fra più fili) la somma delle correnti entranti nel nodo è uguale alla somma delle correnti uscenti dallo stesso. Se si attribuisce segno opposto alle correnti entranti e uscenti si può dire che la somma algebrica delle correnti in un nodo è nulla. Nel caso di correnti alternate si farà la somma vettoriale dei fasori.

II) Se non vi sono campi magnetici variabili in giro per il circuito (sono tuttavia accettati i campi magnetici all'interno delle induttanze) è possibile definire un potenziale V , il cui 0 è deciso in modo arbitrario (contano solo le differenze di potenziale). Come corollario, la somma delle differenze di potenziale in una maglia (un loop chiuso) è 0. Il potenziale V ha il seguente significato fisico: data una carica di prova q , se la si inserisce nel circuito in un punto a potenziale V questa avrà energia qV .

*bruno.bucciotti@sns.it

[†]francesco.hoch@sns.it

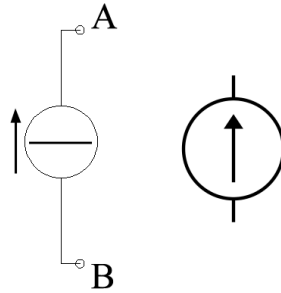


Figura 1: generatore di corrente.

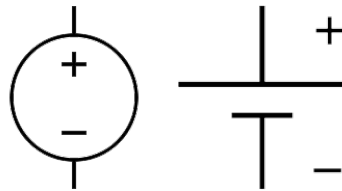


Figura 2: generatore di tensione.

1.2 Generatori di tensione e corrente

Se si parla dei generatori ideali, questi vanno intesi come elementi circuitali che fissano rispettivamente la tensione ai loro capi o la corrente al loro interno. Naturalmente hanno una polarizzazione (fa differenza metterli al contrario) e i loro simboli sono riportati in figura 1 e 2. Anticipiamo un risultato che ricaveremo successivamente sui generatori reali: un generatore di tensione reale è schematizzabile come un generatore ideale con una resistenza interna messa in serie, un generatore di corrente reale con un generatore ideale e una resistenza interna messa in parallelo.

1.3 Segno della potenza

Questo punto può sembrare banale ma in realtà non lo è del tutto. Prendiamo in considerazione il circuito in Figura 3. Ci si può trovare spaesati di fronte a due generatori di tensione che “si contrastano”, ma in realtà non vi è nulla di sbagliato.

Per affrontare il problema partiamo col fissare lo 0 del potenziale sul ramo in basso. Ricaviamo che in alto a sinistra il potenziale è 5V, mentre in alto a destra è 15V. Da qui il fatto che scorra una corrente di 2mA da in senso antiorario nel circuito.

Ora vogliamo verificare la conservazione dell'energia. Banalmente la resistenza

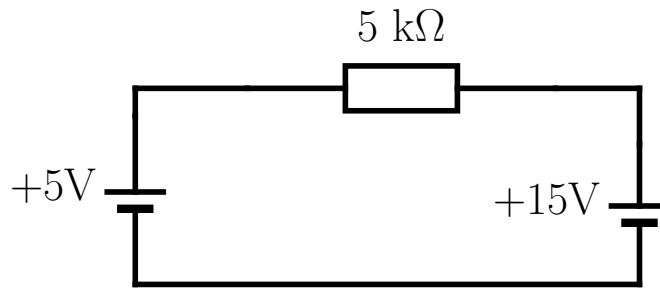


Figura 3: un circuito “strano”.

dissipa $P = I\Delta V = 2\text{ mA} \cdot 10\text{ V} = 20\text{ mW}$, ma esattamente come facciamo a sapere che viene *dissipata*? La risposta più corretta è osservare che la corrente sta passando da una zona a potenziale alto in una a potenziale basso, dunque si ha cessione di energia (sotto forma di calore, luce, ...).

Con questo tipo di ragionamento possiamo stabilire che passando per il generatore di destra le cariche ricevono energia dall'esterno, dunque il generatore di destra genera energia, la immette nel circuito ($2\text{ mA} \cdot 15\text{ V} = 30\text{ mW}$). Al contrario quello di sinistra, pur chiamandosi generatore, *dissipa* energia ($2\text{ mA} \cdot 5\text{ V} = 10\text{ mW}$).

1.4 Classificazione degli elementi circuitali

Attivi e passivi Questa definizione non è facile da dare poichè vi sono varie sottigliezze che non saranno centrali per noi. Per i nostri scopi ci accontentiamo di dire che se un dispositivo genera energia allora è attivo, altrimenti è passivo. Si noti però che un condensatore, per esempio, può sia generare che consumare: una definizione più corretta porterebbe a concludere che il condensatore è passivo. Sono passive anche resistenze e induttanze, mentre sono attivi i generatori.¹

Lineari e non lineari Un componente si dice lineare se la sua relazione costitutiva (ad esempio $\Delta V = IR$ per le resistenze) è lineare. Notare che una proporzionalità diretta fra tensione e derivata della corrente (tipica induttanze) o viceversa (condensatori) è anch'essa lineare.

1.5 Ripasso delle induttanze

Poichè alcuni potrebbero non avere grande familiarità con le induttanze faccio qui un breve ripasso. Il materiale in questa sottosezione è parzialmente

¹Si veda ad esempio [https://en.wikipedia.org/wiki/Passivity_\(engineering\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Passivity_(engineering)) per una definizione formale

tratto dalla lezione di elettromagnetismo di questo stage dell'anno scorso. Un'induttanza (o induttore) è un elemento circuitale tipicamente realizzato mediante un solenoide e la legge che lo governa è $\Phi(B) = LI$, dove $\Phi(B)$ è il flusso del campo magnetico attraverso il solenoide e L è una costante detta induttanza, che dipende dalla geometria dell'elemento. Calcoliamo L nel caso semplice di un solenoide di lunghezza l , numero di spire N , raggio delle spire a e corrente circolante I (nell'approssimazione di spire fitte). Abbiamo che il campo all'interno del solenoide è $\mu_0 \frac{N}{l} I$, ci sono N spire di area $a^2 \pi$ perciò $\Phi(B) = a^2 \pi N \mu_0 \frac{N}{l} I$, da cui ricaviamo la costante di proporzionalità fra $\Phi(B)$ e I , cioè $L = a^2 \pi \mu_0 \frac{N^2}{l}$.

Per via della terza equazione di Maxwell $ddp = -\frac{d\Phi(B)}{dt}$ la caduta di potenziale ai capi di un'induttanza è $\frac{d(LI)}{dt} = L\dot{I}$. Un'induttanza ostacola una variazione della corrente nel tempo, e per questo motivo è assimilabile all'inerzia, che tende a mantenere un corpo in uno stato di moto a velocità costante.

2 Principio di sovrapposizione e sue conseguenze

Tutta questa sezione è valida anche per correnti alternate.

2.1 Esempio

Riferendosi alla Figura 4 consideriamo un circuito che ha 2 tensioni in input (V_1 e V_2) e, a seconda dei due valori, reagirà restituendo una tensione in output V_{out} . La scatola nera ("black box") che unisce i tre capi rappresenta il circuito vero e proprio che non conosciamo ma di cui vorremmo capire il funzionamento. A priori la funzione $(V_1, V_2) \rightarrow V_{\text{out}}$ è arbitraria, tuttavia sotto l'ipotesi di *linearità* del circuito essa è completamente determinata da 2 soli parametri.

2.2 Enunciato

Dato un sistema fisico *lineare* caratterizzato da alcune condizioni al bordo stabilite (V_1 e V_2 nel caso precedente), la soluzione del problema con condizioni al bordo $C=A+B$ è la somma delle soluzioni dei due problemi con condizioni al bordo A e B . Inoltre se le condizioni al bordo sono moltiplicate per un

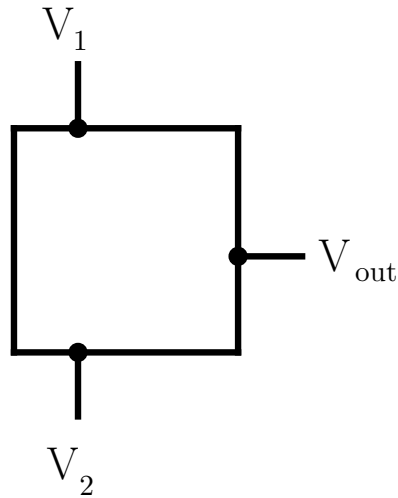


Figura 4: esempio di sovrapposizione lineare.

fattore λ , anche la soluzione verrà moltiplicata dello stesso fattore λ . In pratica, ad esempio, si può risolvere il problema seguendo questi passaggi:

- Si scompongono le condizioni al bordo in somma di casi più semplici, ad esempio $(V_1 = 1, V_2 = 0)$ e $(V_1 = 0, V_2 = 1)$.
- Si risolvono i 2 problemi più semplici, o per via sperimentale fissando le tensioni $V_{1,2}$ come sopra e misurando nei due casi V_{out} , oppure per via teorica nel caso sia noto il contenuto della black box (si noti che in tal caso comunque il problema è più semplice, poichè vi è “una sola sorgente alla volta”). Diciamo $W_{1,2}$ il V_{out} nei due casi.
- Si ricostruiscono le condizioni al bordo volute (per concretezza $V_1 = 3\text{ V}$, $V_2 = 5\text{ V}$) e la soluzione V_{out} è la somma pesata delle due: $V_{\text{out}} = 3 \cdot W_1 + 5 \cdot W_2$. Abbiamo quindi ricostruito il comportamento del circuito per tensioni assegnate qualsiasi riducendolo ai soli 2 parametri $W_{1,2}$.

Osserviamo che in un circuito siamo noi a decidere cosa sia “bordo” in base a ciò che poi andiamo a variare (tensioni o correnti, generalmente mediante generatori). D'altra parte l'esempio fatto con V_{out} si generalizza nel dire che in ogni punto del circuito la tensione è la somma delle tensioni e la corrente è la somma delle correnti, una grande generalità!

Il lato “negativo” è che poche cose sono lineari, dunque le affermazioni fatte valgono non in generale. In particolare sperimentalmente è possibile parlare solo di comportamento lineare per un circuito entro certi limiti di

tensioni e correnti. D'altra parte dal punto di vista teorico possiamo ad esempio affermare che, se il circuito è composto esclusivamente di resistenze, induttanze e condensatori, allora è lineare. Un punto importante è che i generatori non sono elementi lineari: raddoppiare la tensione ai capi di un generatore di corrente (ideale) lascia invariata la corrente che eroga (per definizione!) e non la raddoppia. I generatori andranno dunque sempre trattati come “bordo”.

2.3 Curve caratteristiche, retta di carico e punto di lavoro

La retta di carico è un utile strumento grafico per studiare un componente *anche non lineare* all'interno di un circuito per il resto *lineare* più ampio. Consideriamo ad esempio una resistenza o un generatore (Figura 5 mostra le cosiddette “curve caratteristiche” per questi elementi).

Quando si inserisce un componente all'interno del circuito viene selezionato un singolo punto del grafico, detto punto di lavoro, che specifica sia la tensione ai capi del componente sia la corrente che lo attraversa. Tale punto è vincolato a giacere all'intersezione della curva caratteristica del componente e della cosiddetta retta di carico, che invece non dipende dal componente inserito.

Esempio Consideriamo ad esempio il circuito in Figura 6, dove $V_0 = 10\text{ V}$ e $R = 5\text{ k}\Omega$. La retta di carico per A,B è presentata in Figura 7. E' stata tracciata considerando che per una tensione V_0 fra A e B (come nel caso di circuito aperto) non vi è passaggio di corrente (intersezione con l'asse x). Al contrario chiudendo il circuito, cioè collegando direttamente A e B senza alcun componente, la ddp è 0 e sto considerando l'intersezione della retta di carico con l'asse y : la corrente in tal caso è $\frac{V_0}{R}$. Sovrapponendo Figura 7 e 5 si ottiene il punto di lavoro come intersezione dei due grafici.

Spazzata in tensione Riferendoci all'esempio precedente possiamo discutere la spazzata in tensione (la spazzata in corrente è analoga). Supponiamo di inserire fra A e B un componente di cui non conosciamo la curva caratteristica e di volerlo studiare. Si misurano tensione e corrente fra A e B per molti valori di V_0 e li si riporta nel grafico. Tali punti ricostruiscono la curva caratteristica del componente (non sempre è possibile “vedere” tutta la curva, vedi esercizi). In particolare in una spazzata in tensione ideale la resistenza R è assente, mentre in realtà è la resistenza interna al generatore.

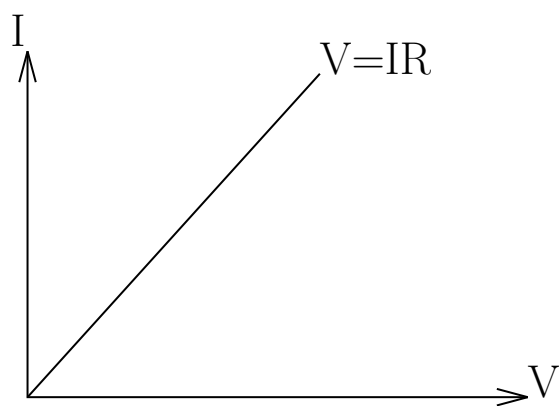
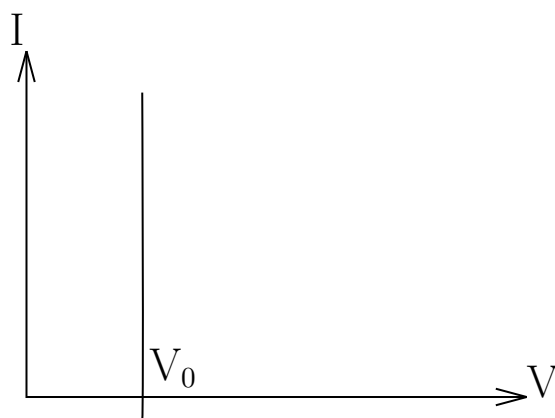
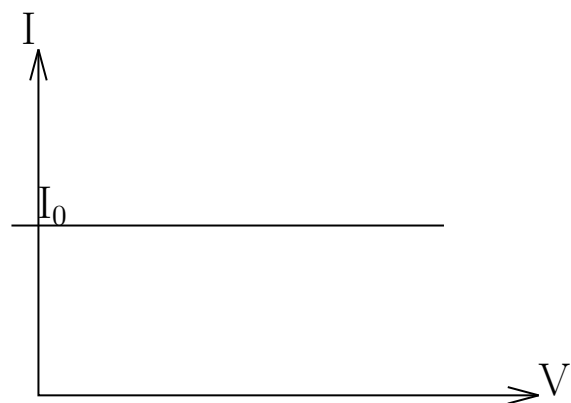


Figura 5: curve caratteristiche per un generatore di corrente, di tensione, una resistenza.

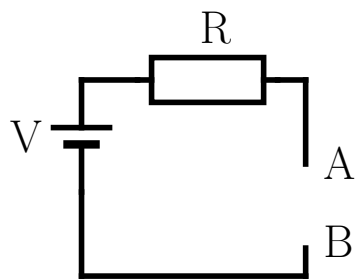


Figura 6: generatore a cui collegare un carico.

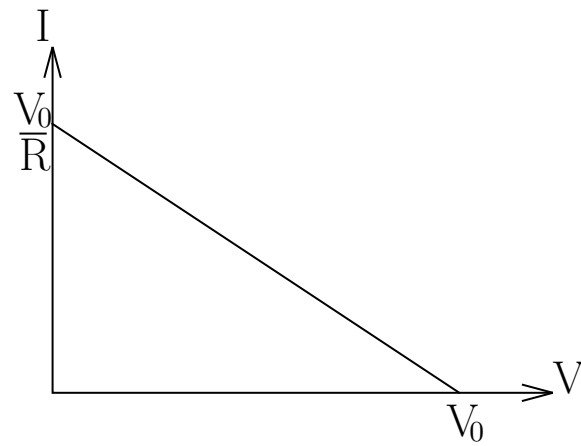


Figura 7: retta di carico per il circuito in figura 6.

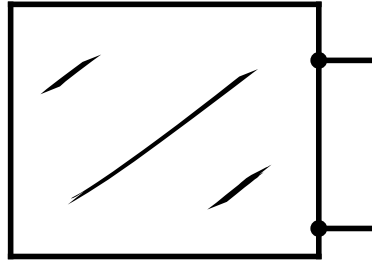


Figura 8: black box a cui applicare thévenin.

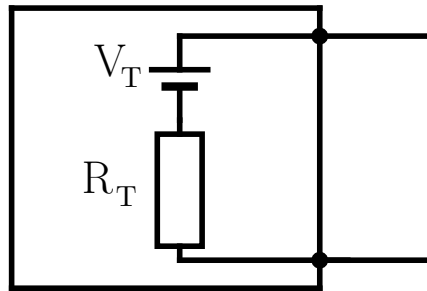


Figura 9: il circuito in figura 8 a cui è stato applicato il teorema di Thévenin.

Spazzata in corrente Se si utilizza un generatore di corrente (con resistenza interna in parallelo piccola) al posto del generatore di tensione, allora si parla di spazzata in corrente.

2.4 Teorema di Thévenin

Dato un circuito *lineare* comunque complesso da cui escono due estremi a cui si può collegare un carico (Figura 8), il teorema di Thévenin mira a ricostruire la retta di carico, cioè la tensione fissata la corrente. Di più (apparentemente): dal punto di vista dei due capi possiamo sostituire il circuito complesso con una serie di un generatore di tensione ideale V_T e una resistenza R_T , dove V_T e R_T sono da determinare (vedi Figura 9). Per convenzione prendiamo come positive la corrente circolante in senso orario e la tensione bassa sull'estremo in basso. Inseriamo fra i due capi un generatore di corrente che eroghi una corrente I_0 in senso orario e studiamo la tensione. Per farlo applichiamo il principio di sovrapposizione considerando come “bordo” tutti i generatori presenti nel circuito, e risolviamo separatamente per il solo I_0 e per tutti gli altri generatori.

Se “passiviamo” I_0 impedendo il passaggio di corrente (è come tenere staccati i due capi), possiamo calcolare la tensione fra i due capi e questa sarà V_T . Viceversa se abbiamo il solo I_0 e tutti gli altri generatori sono passivati, cioè

i generatori di corrente sono aperti (si impedisce il passaggio di corrente) e quelli di tensione sono cortocircuitati (non vi è ddp ai loro capi), possiamo calcolare la tensione fra i due capi che chiameremo $-I_0 \cdot R_T$ (dove questa formula definisce R_T). Il meno viene considerando che $I_0 \cdot R_T$ è la caduta di tensione sul circuito complesso, che è opposta alla caduta di tensione fra i 2 capi. Concretamente questo corrisponde a calcolare la resistenza equivalente R_T fra i 2 capi del circuito complesso dopo aver passivato tutti i generatori. Invocando il principio di sovrapposizione sommiamo le condizioni al bordo e ci troviamo a studiare il circuito complesso a cui è collegato il generatore I_0 , che è ciò che volevamo. La tensione ai 2 capi è la somma delle tensioni, cioè è $V(I_0) = V_T - I_0 \cdot R_T$.

Possiamo osservare che tale funzione è la retta di carico nel piano V-I, in particolare corrisponde alla retta di carico che si avrebbe se al posto del circuito complesso sostituiamo il circuito in figura 9, dove R_T e V_T sono quelli trovati in precedenza.

2.5 Teorema di Norton

Il teorema di Norton, del tutto analogo, sostituisce al circuito complesso un parallelo fra un generatore di corrente I_N e una resistenza R_N . Come esercizio trovate per un tale circuito la retta di carico fissati I_N e R_N e trovate come devono essere questi parametri per avere una retta di carico uguale a quella del circuito in figura 9. Poichè sapete come calcolare V_T e R_T , troverete come dipendono I_N e R_N dal circuito complesso.

3 Correnti alternate

I metodi qui presentati, applicati ai soli segnali sinusoidali, possono essere estesi all'analisi di segnali qualsiasi mediante la trasformata di Fourier. Tuttavia la cosa richiede una certa familiarità con i metodi del calcolo integrale, dunque non la tratteremo. Ricordo che un generatore di forme d'onda e i generatori in alternata emettono segnali periodici caratterizzati da una certa ampiezza. Tipicamente sono onde sinusoidali, triangolari o quadre.

3.1 Aspetti sperimentali

Multimetro digitale Un esempio di multimetro digitale si trova in figura 10. Per i nostri scopi è sufficiente osservare che il selettore centrale può scegliere fra tensioni V o correnti A con varie portate possibili. Per entrambi però sono disponibili due possibilità, contraddistinte da scritte in bianco o



Figura 10: multimetro digitale.

arancione: il bianco, con una linea continua e una tratteggiata, indica che il segnale è atteso continuo (DC); l'arancione con la tilde indica che il segnale è atteso sinusoidale. Se un segnale ha media nulla (ad esempio le sinusoidi, ma non solo) si dice alternato (AC).

Se consideriamo un segnale con una componente continua e delle perturbazioni ondulatorie il multimetro in continua sarà sensibile solo alla componente continua, e non alle (rapidissime) oscillazioni. Se invece consideriamo un segnale sinusoidale con un offset ($V = V_0 + A \sin(\omega t)$ ad esempio) l'accoppiamento in AC misurerà solo la componente alternata. Questo torna utile nel caso vi sia un segnale piccolo e alternato sovrapposto a uno grande e continuo (un analogo potrebbe essere la pressione per l'orecchio: le onde sonore sono piccole perturbazioni nella pressione sovrapposte a una pressione media, quella atmosferica, molto più grande).

Misura in alternata Il multimetro, a seconda del modello, fa cose diverse quando accoppiato in AC. Una possibilità è che il segnale, eliminata la componente continua con un condensatore, venga raddrizzato (la componente negativa viene azzerata oppure si prende il modulo del segnale: ci sono circuiti

con elementi non lineari in grado di farlo). A questo punto il multimetro può misurare o il valore massimo del segnale oppure una sua media (ora non più nulla) e in base a questa misura fornire un output.

Root mean square (RMS) Ciò che viene fornito dal multimetro in AC è la radice quadratica media del segnale. Matematicamente se il segnale è una sinusoide si ha

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V_0^2 \sin^2 \left(\frac{2\pi}{T} t \right) dt} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$$

Notiamo dunque che l'ampiezza del segnale V_0 (o l'ampiezza picco-picco $2V_0$) non è il valore che viene letto sul multimetro. Inoltre se l'onda in ingresso è triangolare o quadrata il fattore che lega l'ampiezza dell'onda al valore RMS è diverso (verificabile con analoghi integrali trovabili in appendice).

Tipo di onda	RMS
Onda sinusoidale	$V_0/\sqrt{2}$
Onda triangolare	$V_0/\sqrt{3}$
Onda quadra	V_0

Tabella 1: valori RMS per diverse forme d'onda.

Anche per la corrente vale lo stesso discorso: il valore ritornato della corrente è il valore RMS.

Potenza Consideriamo una resistenza. Anche in corrente alternata ci aspettiamo che dissipi. In effetti possiamo calcolare quanto vale la potenza media dissipata su un periodo nel caso di un'onda sinusoidale. Ricordo che la media di una grandezza $P(t)$ periodica con periodo T è definita in generale come

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt$$

dove nel nostro caso $P(t) = I(t)V(t)$. Lasciatemi assumere che la fase relativa fra corrente e tensione per una resistenza sia nulla: approfondiremo il perchè fra poco. Allora abbiamo

$$I = I_0 \sin(\omega t)$$

$$V = V_0 \sin(\omega t)$$

dove in generale per $\sin(\omega t + \phi)$ chiamo ϕ la fase. A seconda di dove metto lo zero dei tempi posso fissare una fase a zero (ad esempio quella di I) e non perdo di generalità poichè il fenomeno è periodico. Il fatto che *anche* la fase per la tensione sia zero è l'assunto di cui sopra. Allora il calcolo di $\langle P \rangle$ è

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T V_0 I_0 \sin^2(\omega t) dt = \frac{V_0 I_0}{2} = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}$$

Notiamo dunque che i valori riportati dal multimetro, cioè V_{rms} , I_{rms} , se moltiplicati, restituiscono correttamente la potenza dissipata. Il fatto che l'onda sia sinusoidale non è in realtà necessario. In generale

$$\begin{aligned} V_{\text{rms}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V_0^2 f^2(t) dt} \\ I_{\text{rms}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 f^2(t) dt} \\ \langle P \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T V_0 I_0 f^2(t) dt = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \end{aligned}$$

Anticipiamo un risultato che ricaveremo più avanti: condensatori e induttanze non dissipano.

3.2 Fasori

Da qui tratteremo solo segnali sinusoidali. Notiamo che per circuiti lineari se un generatore emette un segnale a frequenza ω (e non ci sono altri generatori, ma nel caso ci siano li si tratta uno alla volta con la sovrapposizione lineare) tutti i segnali nel circuito saranno sinusoidali a frequenza ω (possono comunque essere sfasati fra loro). Questo deriva dal fatto che elementi lineari non mescolano frequenze diverse.

Questo motiva l'introduzione dei cosiddetti fasori, cioè vettori nel piano complesso scritti con la notazione esponenziale, che con il modulo indicano l'ampiezza del segnale, con la fase indicano lo sfasamento del segnale.

Questo modo di rappresentare i segnali è comodo perchè varie operazioni di routine (es: calcolo della potenza dissipata, somma di due segnali sfasati, ..) si eseguono in modo più semplice in questa rappresentazione piuttosto che nella rappresentazione con seni e coseni. Partiamo con un esempio.

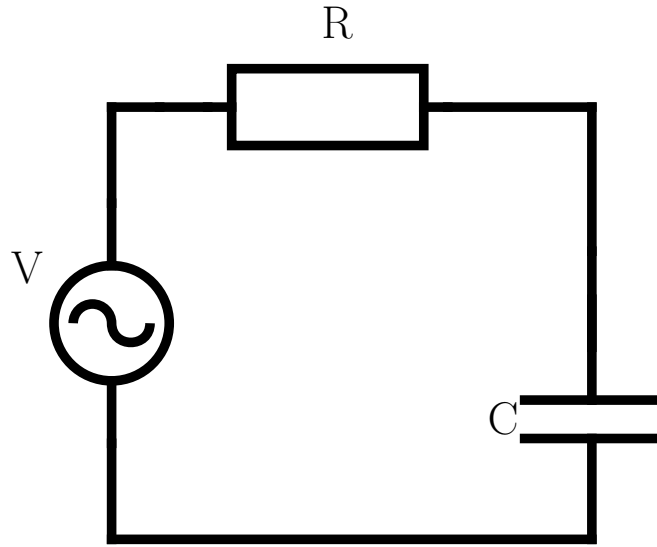


Figura 11: circuito RC oscillante.

circuito RC oscillante Proviamo a risolvere il circuito in Figura 11 dove $V = V_0 \cos(\omega t)$. Utilizzeremo $\Delta V = RI$ per la resistenza e $Q = C\Delta V$ per il condensatore. Osservando che $\dot{Q} = I$, abbiamo per il circuito l'equazione

$$V_0 \cos(\omega t) = \dot{Q}R + \frac{Q}{C}$$

Assumendo che il condensatore sia mediamente scarico (cosa che assumeremo sempre, se non specificato) possiamo provare la soluzione $I = I_0 \cos(\omega t + \phi)$, $Q = \frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t + \phi)$. Si può verificare che effettivamente una soluzione in questa forma può essere trovata sostituendo nell'equazione del circuito e cercando I_0 , ϕ tali da avere una uguaglianza per ogni t .

Noi qui seguiremo una strada più istruttiva. Per risolvere le equazioni differenziali lineari in cui tutto è reale possiamo scrivere le grandezze oscillanti come esponenziali complessi la cui parte reale è la grandezza fisica vera e propria.

Ad esempio scriveremo $V = V_0 e^{j\omega t}$ per la tensione del generatore, poichè la parte reale è appunto il coseno desiderato. Possiamo provare inoltre $Q = Q_0 e^{j\omega t}$ con Q_0 complesso, così la parte reale diventa un coseno con ampiezza e sfasamento arbitrari (la stessa cosa provata sopra) ma i calcoli saranno molto semplificati.

Sostituendo nell'equazione del circuito si ha

$$V_0 e^{j\omega t} = j\omega R Q_0 e^{j\omega t} + \frac{Q_0}{C} e^{j\omega t}$$

da cui

$$Q_0 = \frac{V_0}{j\omega R + \frac{1}{C}}$$

e facendo la derivata di Q

$$I = \frac{V_0 j\omega}{j\omega R + \frac{1}{C}} e^{j\omega t}$$

da cui infine

$$I = \frac{\frac{V_0}{R}}{1 + \frac{1}{j\omega RC}} e^{j\omega t}$$

E' utile rappresentare il risultato ottenuto graficamente in termini di fasori. Questi sono rappresentati come numeri complessi nel piano il cui modulo è il modulo della grandezza (ovvero il valore di picco) e l'angolo è dato dalla fase a $t = 0$. Notare che per tempi successivi i fasori evolvono ruotando rigidamente nel piano complesso con frequenza ω , da cui la scelta di limitarsi convenzionalmente a $t = 0$.

Da questa espressione ricaviamo che la corrente oscilla fra $-I_0$ e I_0 con I_0 il modulo del numero complesso I , e che oscilla sfasata rispetto alla tensione di una fase ϕ . Questa è ricavabile prendendo la fase di I e comparandola con quella di V (che è zero). Sto ignorando $e^{j\omega t}$ poichè quella fase è comune a tutti e si cancella nella differenza di fase (cioè sto fissando la fase di V a 0). Si può anche scrivere l'esponenziale come $I_0\{\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\}$ e prendere la parte reale di I renderà il segnale I fisico, in particolare sarà la somma di un seno e di un coseno (I_0 è complesso! Non sarà semplicemente $I_0 \cos(\omega t)$), che è un altro modo di scrivere una sinusoide sfasata.

Per completezza riportiamo I_0 e ϕ :

$$\phi = \arctan \frac{1}{\omega RC}$$
$$I_0 = \frac{V_0}{R} \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

Regole generali Sperando di avere dimostrato che l'uso di seni e coseni è sconveniente per l'analisi di circuiti oscillanti, diamo ora delle regole generali per fare come abbiamo fatto nell'esempio RC , ma in modo più immediato. Per farlo introdurremo il concetto di impedenza. Mostriamo inoltre che per calcolare varie grandezze di interesse non è mai necessario scrivere il segnale nella notazione di seni e coseni.

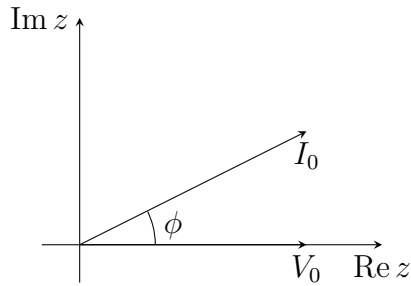


Figura 12: i fasori per il circuito RC.

$V = ZI$ La legge di Ohm si estende anche ai segnali oscillanti, posto di introdurre il concetto di impedenza. L'impedenza è una quantità complessa associata a ciascun elemento circuitale e in generale può dipendere dalla frequenza del segnale.

$Z = R$ Per una resistenza l'impedenza è reale e coincide con la solita R . Questo perchè per la legge di Ohm $V(t) = RI(t)$; in particolare V e I hanno la stessa fase.

$Z = \frac{1}{j\omega C}$ Per un condensatore vale $Q = C\Delta V$, ma $\dot{Q} = I$, da cui $I = \dot{Q} = C(j\omega V)$ e perciò $V = \frac{1}{j\omega C}I$.

$Z = j\omega L$ Il calcolo per una induttanza è lasciato come esercizio, ma questa è la risposta.

Potenza Supponiamo di sapere V, I per un dato componente circuitale (entrambi fasori complessi) e di voler calcolare la potenza dissipata da tale componente. Se ci accontentiamo di conoscerla in media la risposta è facile

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \Re\{VI^*\}$$

cioè metà della parte reale del prodotto fra una grandezza e il complesso coniugato dell'altra. Non è dunque necessario uscire dalla notazione complessa prendendo parti reali e calcolando integrali. La dimostrazione è in appendice, ma si consiglia di provarla prima di andare a leggere. Partire dalla definizione di potenza media.

4 Appendici

4.1 Convenzione utilizzatore e generatore

Si tratta di due convenzioni possibili per assegnare i segni a correnti e tensioni ai capi dei componenti. Il vantaggio di utilizzare una convenzione è che tutti i problemi di “segni” sono risolti dall’algebra. Lo svantaggio è che un errore di algebra porta a sbagliare il verso della corrente, cioè a errori fisici.

C’è anche il problema dell’essere consistenti nell’applicare la convenzione scelta. Per questi motivi suggeriamo di cercare sempre di avere un’intuizione fisica del comportamento generale del circuito, in modo da non fidarsi ciecamente dei conti.

Convenzione utilizzatore La corrente positiva entra nel morsetto positivo ed esce dal negativo. Allora la potenza ha segno positivo quando è dissipata e negativo quando è generata. Per esempio una resistenza. Se i due suoi capi sono A, B con A a tensione maggiore la corrente scorre da A a B; la convenzione utilizzatore prescrive che una tale corrente sia positiva, poichè entrante nel morsetto a potenziale più alto. Dunque La potenza, calcolata come $P = IV$ viene positiva e va interpretata come dissipata.

Viceversa per un generatore di tensione in un circuito generatore-resistenza la corrente scorre dal polo negativo a quello positivo, uscendo quindi dal morsetto positivo. Dunque la convenzione prescrive di assegnare un segno meno a questa corrente e perciò $P = IV$ risulta negativa: la potenza è generata.

Convenzione generatore Si tratta della convenzione opposta per il segno della corrente.

Grafici I grafici presentati in questa lezione seguono la convenzione dell’utilizzatore. Secondo questa convenzione se il punto di lavoro appartiene al primo o al terzo quadrante allora la potenza è positiva, cioè è dissipata, mentre se appartiene al secondo o quarto quadrante è generata. Viceversa per la convenzione generatore.

4.2 Calcolo RMS per i tre tipi di onde

Si tratta di calcolare gli integrali 3 integrali.

Il primo, per l’onda sinusoidale, si esegue facilmente con un paio di trucchi. Anzitutto è chiaro che il problema si riduce a calcolare la media di $\sin^2(x)$

su un periodo 2π . L'integrale $\int_{x_0}^{x_0+T} f(x) dx$ con $f(x)$ periodica di periodo T è indipendente da x_0 (convincersene!), perciò la media di $\sin^2$ e $\cos^2$ deve essere uguale (sono la stessa funzione, solo è diversa la fase). La media di $\sin^2(x) + \cos^2(x)$ è banalmente 1, dunque la media delle sinusoidi al quadrato è $\frac{1}{2}$. Naturalmente lo stesso risultato lo si può ottenere direttamente, ad esempio

$$\int_0^\pi \cos^2(x) dx = \int_0^\pi \left(\frac{2\cos^2(x) - 1}{2} + \frac{1}{2} \right) dx = \int_0^\pi \frac{\cos(2x) + 1}{2} dx = \frac{\pi}{2}$$

Il secondo, l'onda triangolare, è l'integrale di una funzione lineare a tratti. Vi sono 4 contributi uguali, dunque nel secondo passaggio calcoliamo il primo e lo quadruplichiamo.

$$V_0 \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{triang}^2(x) dx} = V_0 \sqrt{\frac{4}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{2}{\pi} x \right)^2 dx} = V_0 \sqrt{\frac{1}{3}}$$

Il terzo è l'integrale di una funzione che può valere $-V_0$ o V_0 , ma che viene presa al quadrato, dunque la sua radice quadratica media è V_0 .

4.3 Potenza media con i fasori

Abbiamo $V = V_0 e^{j\omega t}$, $I = I_0 e^{j\omega t}$, le cui parti reali sono rispettivamente

$$\Re V_0 \cos(\omega t) - \Im V_0 \sin(\omega t) \quad \Re I_0 \cos(\omega t) - \Im I_0 \sin(\omega t)$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T [\Re V_0 \cos(\omega t) - \Im V_0 \sin(\omega t)] [\Re I_0 \cos(\omega t) - \Im I_0 \sin(\omega t)] dt$$

Si verifica facilmente che i termini $\sin \cdot \cos$ mediano a zero, mentre $\cos^2$, $\sin^2$ hanno media $\frac{1}{2}$, da cui

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} [\Re V_0 \Re I_0 + \Im V_0 \Im I_0]$$

Vogliamo arrivare a $\langle P \rangle = \frac{1}{2} \Re[V I^*]$. Partiamo scrivendo

$$V_0 = V_r + jV_i \quad I_0 = I_r + jI_i$$

Calcolando $\langle P \rangle$ con la formula proposta si ha

$$\Re[(V_r + jV_i)(I_r - jI_i)]$$

che proseguendo con l'algebra conclude la dimostrazione.

5 Teoremi ed esercizi dimostrativi

5.1 Teorema di Tellegen

Presi due circuiti diversi ma con stesso grafo orientato (cioè i lati sui due circuiti sono disposti allo stesso modo indipendentemente dal componente che ci può essere sul ramo e le correnti sono orientate nello stesso verso) e stessa convenzione sulle potenze per ogni ramo, allora le potenze virtuali sono bilanciate, in formule:

$$\sum_{l \in L} \Delta V_l I'_l = 0$$

dove ΔV_l è la differenza di potenziale che cade sul ramo l del primo circuito e I'_l è la corrente che scorre nel ramo l del secondo circuito; L è l'insieme dei lati del circuito.

5.2 Teorema di Reciprocità

Consideriamo una rete passiva composta di resistenze e individuiamo due situazioni di alimentazione (si veda la Figura 13):

- alimentiamo con un generatore E_a nel ramo a e sia I_b la corrente che circola nel ramo b ;
- alimentiamo con un generatore E'_b nel ramo b e sia I'_a la corrente che circola nel ramo a ;

Dimostrare che:

$$\frac{E_a}{I_b} = \frac{E'_b}{I'_a}$$

5.3 Teorema di Cohn

Si consideri una rete di resistori. Definiamo R_{eq} la resistenza equivalente tra due nodi A e B essa in genere dipenderà da tutte le resistenze della rete.

Si mostri che al variare della resistenza R_i del ramo i si avrà una variazione della resistenza equivalente R_{eq} tale che

$$\frac{\partial R_{\text{eq}}}{\partial R_i} \geq 0$$

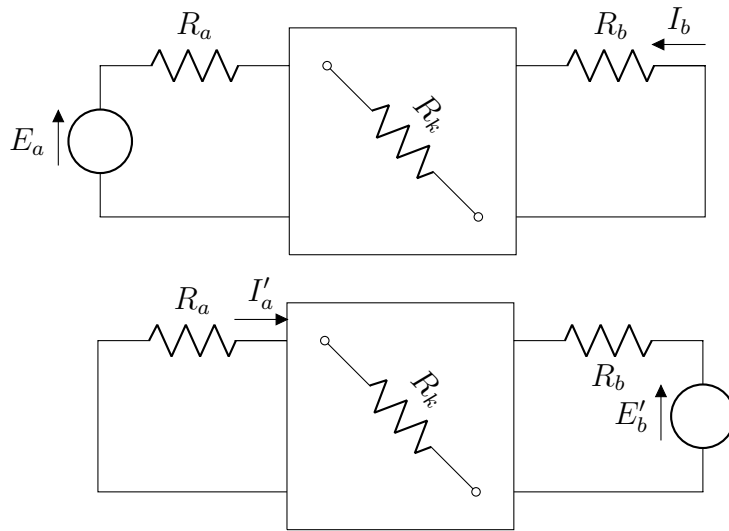


Figura 13: teorema di reciprocità

5.4 Teoremi di non amplificazione

Dato un circuito composto da resistenze e solo un generatore (può essere sia di tensione che di corrente); dimostrare che in modulo la differenza di potenziale è massime sul generatore, riformulato in modo più stringente mostrare che il potenziale ha il massimo e il minimo sul generatore; stessa cosa per le correnti mostrare che in modulo la corrente massima del circuito scorre nel generatore.

Più in generale il teorema vale ancora se nel circuito ci sono componenti non lineari passivi ($VI \geq 0$ istante per istante).

5.5 Teorema di Millman

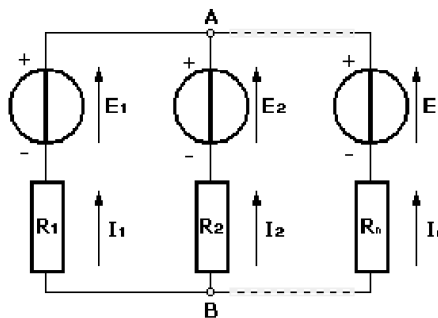


Figura 14: circuito su cui si applica il teorema di millmann

Preso un circuito binodale composto da N generatori reali messi in parallelo (si veda Figura 14) mostrare che la differenza di potenziale tra i due nodi è data dalla formula

$$\Delta V_{AB} = \frac{\sum_{n=0}^N \frac{E_n}{R_n}}{\sum_{n=0}^N \frac{1}{R_n}}$$

5.6 Trasformazione Y- Δ

Date tre resistenze R_A , R_B e R_C poste in configurazione a stella e altre tre resistenze R_{AB} , R_{BC} e R_{AC} poste in configurazione a triangolo (si veda la figura 15), mostrare che i due circuiti sono equivalenti se:

$$\begin{cases} R_{AB} = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_C} \\ R_{AC} = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_B} \\ R_{BC} = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_A} \end{cases}$$

o viceversa

$$\begin{cases} R_A = \frac{R_{AB} R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}} \\ R_B = \frac{R_{AB} R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}} \\ R_C = \frac{R_{AC} R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}} \end{cases}$$

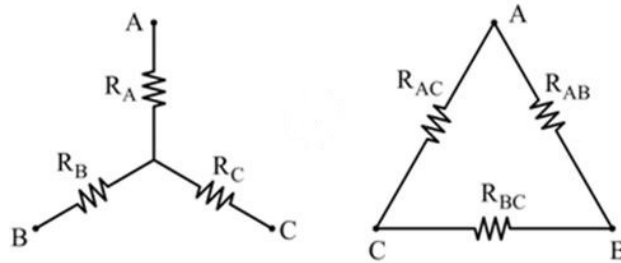


Figura 15: configurazioni a stella e a triangolo

5.7 Teoremi di minima dissipazione

Preso un circuito composto da resistenze e alimentato da un generatore (tensione o corrente è uguale); mostrare che, tra tutte le configurazioni di differenze di potenziale che rispettano la legge di Kirchhoff alle maglie, quella che dissipa meno potenza nelle resistenze è quella che rispetta la legge di Kirchhoff delle correnti.

Similmente preso un circuito di resistenze alimentato da un generatore, se vale la legge di Kirchhoff delle correnti quella che minimizza la dissipazione nelle resistenze è quella che rispetta anche la legge di Kirchhoff alle maglie.

Si assuma che vale il principio di conservazione dell'energia.

5.8 Disuguaglianza triangolare per la resistenza equivalente

Preso un circuito composto da resistenze e presi tre nodi A , B e C del circuito; definiamo R_{AB} la resistenza equivalente tra i nodi A e B e similmente per le altre due coppie, mostrare che vale:

$$R_{AC} \leq R_{AB} + R_{BC}$$

Cioè vale la disuguaglianza triangolare per la resistenza equivalente di un circuito, quindi può essere usata per definire una distanza tra i nodi di un circuito.

5.9 Proprietà topologica di una rete di resistenze

N nodi nello spazio sono collegati da una serie di resistenze tutte uguali pari a R . La rete di resistenze è arbitraria, eccetto per le caratteristiche che tra due nodi può esserci al più una resistenza ed è un grafo “connesso” (cioè, è possibile spostarsi tra due punti qualsiasi mediante una catena ininterrotta di resistori; questo percorso può non essere unico).

Consideriamo due nodi connessi da una resistenza; la rete produce una resistenza equivalente tra questi due nodi; Trovare la somma delle resistenze equivalenti di tutte le coppie di nodi collegati da una resistenza.

Più in generale se le resistenze che compongono il circuito sono diverse se si sommano le resistenze equivalenti come prima ognuna divisa per la resistenza che c'è tra i due nodi il risultato non cambia.

6 Circuiti lineari in continua

6.1 Partitore di tensione e corrente

Si ha un generatore di tensione V_0 e si vuole alimentare una resistenza R con una tensione $V_1 \leq V_0$, trovare il modo più semplice usando il minimo numero di componenti possibili.

Ripetere l'esercizio con un generatore di corrente I_0 e si vuole alimentare la resistenza R con una corrente $I_1 \leq I_0$.

6.2 Più generatori

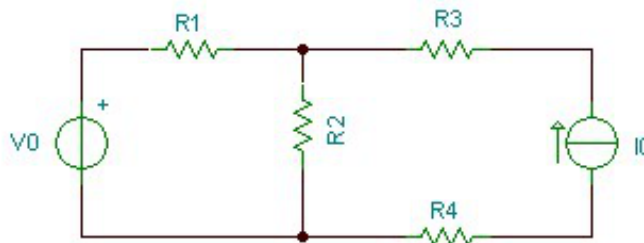


Figura 16: circuito con 2 generatori.

Il circuito in Figura 16 presenta 2 generatori in continua, uno di tensione uno di corrente. Risolvere il circuito sia di forza bruta che con il principio di sovrapposizione.

6.3 Guasto alla linea telefonica (P2004)

In un punto P di una linea telefonica lunga $l = 2\text{ Km}$ si è prodotto un danneggiamento, per conseguenza si viene a creare una resistenza elettrica “di fuga” tra i due fili. Per individuare il punto esatto in cui avviene il danneggiamento, la squadra addetta alla manutenzione misura la resistenza della linea in due situazioni; quando la linea è aperta, cioè quando all'altra estremità i terminali sono liberi, la resistenza misurata è $R_1 = 16\ \Omega$, mentre quando la linea è chiusa, cioè all'altra estremità della linea i terminali sono collegati in corto circuito, la resistenza misurata è $R_2 = 10\ \Omega$. Esaminando le specifiche di progetto si sa che il cavo presenta una resistenza specifica di $r = 4\ \Omega/\text{Km}$ per filo.

Determinare la resistenza elettrica “di fuga” tra i fili del cavo e la posizione P del danneggiamento.

Individuato il guasto viene fatta una riparazione maldestra, infatti permane una resistenza “di fuga” $R_f = 200\ \Omega$; tuttavia una comunicazione telefonica può ancora avvenire se la differenza di potenziale hai capi del telefono non è inferiore al 95% rispetto a quella di progetto.

Schematizzando il telefono come un oggetto che ha una resistenza interna pari a $R_i = 1.8\ \text{K}\Omega$, determinare se dopo la riparazione è possibile ancora effettuare una comunicazione sulla linea.

6.4 Misure elettriche (P2010)

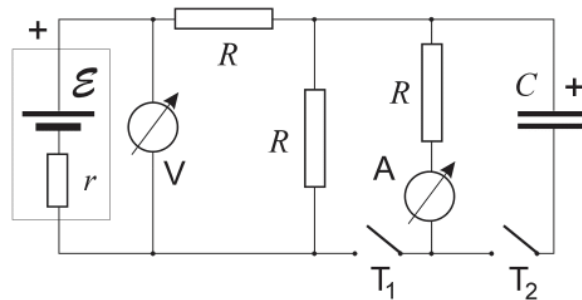


Figura 17: Problema Misure elettriche

Nel circuito di Figura 17 le tre resistenze sono uguali ($R = 10\ \Omega$) e gli strumenti si possono trattare come ideali. L'alimentatore è un generatore di tensione reale avente forza elettromotrice ε e resistenza interna r incognite. Inizialmente entrambi gli interruttori sono aperti e il voltmetro segna $V = 48\ \text{V}$; dopo aver chiuso T_1 l'amperometro misura $I = 1.5\ \text{A}$

Determinare il valore della f.e.m. e della resistenza interna del generatore e di quanto aumenta la corrente erogata dal generatore dopo che viene chiuso T_1

Il condensatore, che fino ad ora è rimasto isolato, è stato precedentemente caricato con il medesimo generatore, indicare quanto indica l'amperometro appena chiuso l'interruttore T_2 .

6.5 4 Resistenze (P2013)

Il circuito in Figura 18 è alimentato da un generatore di corrente costante $I_0 = 360\ \text{mA}$; le resistenze valgono rispettivamente $R_1 = R_3 = R$, $R_2 = 3R$, $R_4 = 2R$, mentre l'amperometro si può considerare ideale.

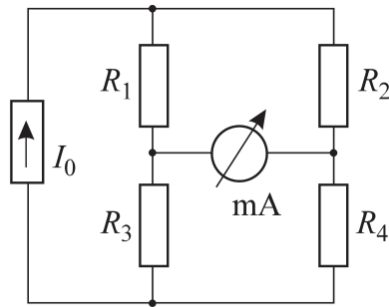


Figura 18: Problema 4 resistenze

Dare un'espressione per le correnti che scorrono nelle quattro resistenze e il valore della corrente letta dall'amperometro.

6.6 Occhio alle induttanze (N2007)

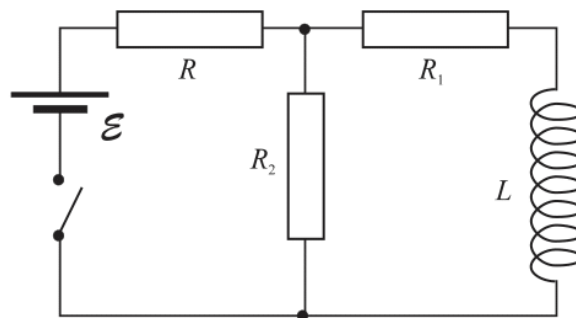


Figura 19: Occhio alle induttanze

Nel circuito in Figura 19 sono noti i valori delle resistenze $R = 2.5 \text{ k}\Omega$ e $R_2 = 2R$, mentre R_1 , la f.e.m. ε e l'induttanza L sono incognite. Finché l'interruttore è aperto la corrente nel circuito è nulla ovunque. Alla chiusura dell'interruttore la corrente erogata dal generatore è $I_0 = 5 \text{ mA}$, mentre a regime la stessa corrente è aumentata a $I_1 = 9 \text{ mA}$. Dopo aver riaperto l'interruttore l'energia dissipata dalla resistenza R_1 è pari a $U = 0.040 \mu\text{J}$.

Dai dati forniti ricavare gli elementi incogniti del circuito. È possibile che alla riapertura dell'interruttore ai capi dell'induttanza si possa avere una d.d.p. maggiore della f.e.m. del generatore inserito?

6.7 Solidi platonici

Calcolare la resistenza equivalente tra due vertici qualsiasi di tutti i solidi platonici (tetraedro, quadrato, ottaedro, dodecaedro e icosaedro) se i lati sono composti da resistenze tutte uguali e pari a R .

6.8 Scala di resistenze

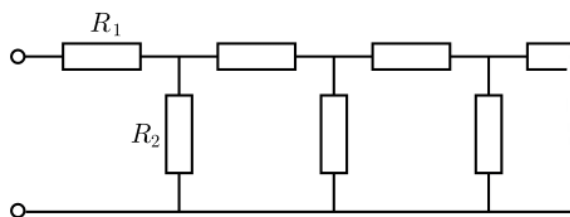


Figura 20: Scala di resistenze

Calcolare la resistenza equivalente del circuito in Figura 20; mostrare che se il circuito è alimentato da un generatore di tensione V_0 le tensioni che cadono sulle resistenze verticali sono in successione geometrica (cioè $V_n = V_0 \lambda^n$) e calcolare il rapporto R_2/R_1 in funzione del parametro di decadimento λ .

6.9 Profusione di scale

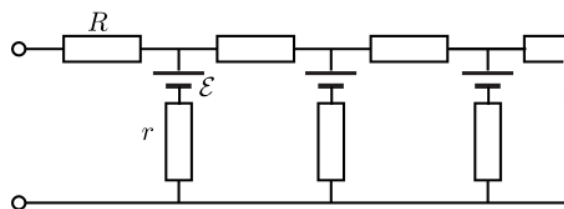


Figura 21: Scala di generatori 1

Calcolare la resistenza o il generatore equivalente dei seguenti circuiti nelle figure 21, 22 e 23.

6.10 Circuito frattale quadrato

Si consideri di costruire il seguente circuito; si parte da un quadrato di lato L , connettere i centri di ogni lato in modo da formare un secondo quadrato;

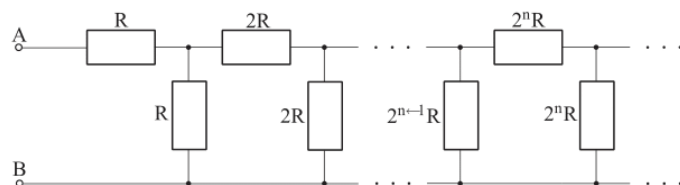


Figura 22: Scala di resistenze geometrica

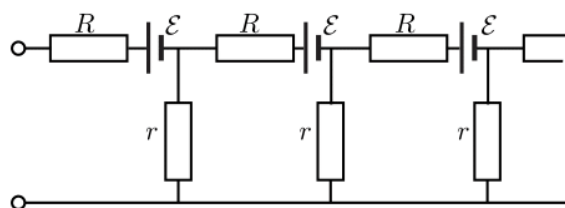


Figura 23: Scala di generatori 2

ripetere la procedura all'infinito (si veda Figura 24). Si dia la resistenza misurata tra due vertici opposti del quadrato originale in funzione della resistenza R di un pezzo di filo di lunghezza L ; si assuma che tutti i fili abbiano la stessa sezione trasversale e stessa resistività.

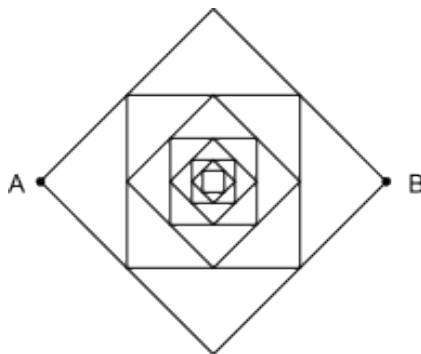


Figura 24: Frattale quadrato

6.11 Quadrati affiancati

Si consideri un circuito composto da N quadrati affiancati come in Figura 25, ogni lato è composto dallo stesso filo (stessa sezione e resistività); Calcolare la resistenza equivalente della rete tra due vertici opposti del circuito (si veda Figura 25) in funzione di N ed R , dove R è la resistenza di un lato dei quadrati che compongono il circuito.

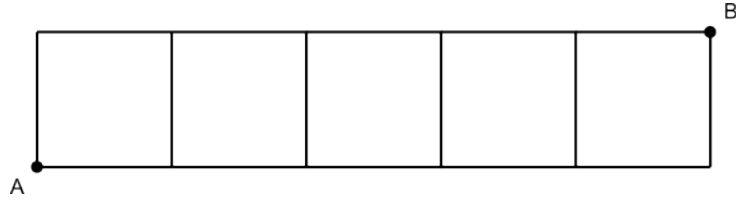


Figura 25: Quadrati affiancati ($N = 5$)

6.12 Griglia quadrata

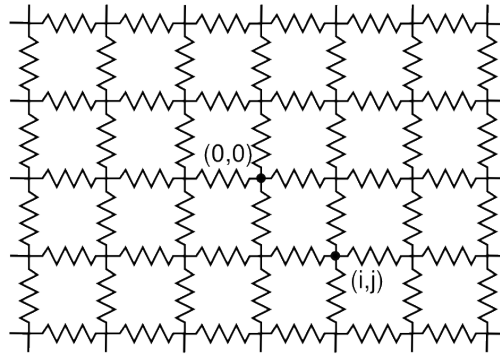


Figura 26: Griglia quadrata di resistenze

Data una griglia quadrata in cui ogni lato è una resistenza R , si definisce $R_{i,j}$ la resistenza equivalente tra i punti $(0,0)$ e (i,j) .

Trovare $R_{0,1}$; per i più arditi mostrare che $R_{1,1} = \frac{2}{\pi}$ e per gli appassionati di xkcd ² trovare il valore di $R_{1,2}$

6.13 Muro di resistenze (PC2018)

Si consideri una griglia infinita di resistenze come in Figura 27. Ogni pezzo di filo orizzontale tra due nodi vicini ha resistenza $R_a = 1\Omega$ e ogni pezzo di filo verticale tra due nodi adiacenti ha resistenza $R_b = 2018\Omega$ (i nodi sono marcati con un pallino nero).

Denotiamo con ρ la resistenza equivalente tra i nodi A e B . Trovare r e R tali che

$$r \leq \rho \leq R \quad \frac{R}{r} \leq 2$$

Si può trovare il valore esatto ma questo è estremamente più difficile.

²il fumetto originale lo trovate all'indirizzo <https://xkcd.com/356/>

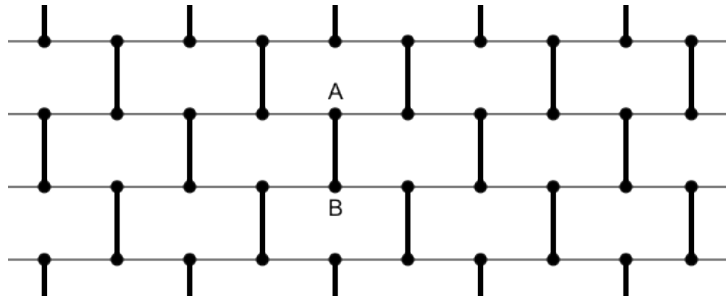


Figura 27: Muro di resistenze

7 Circuiti nel dominio del tempo

7.1 Magneti superconduttori (I1994)

I magneti superconduttori sono largamente usati nei laboratori. La più comune forma di magnete superconduttore è un solenoide fatto di filo superconduttore. La maggiore proprietà è quella di generare campi magnetici intensi senza disperdere energia per effetto Joule. Normalmente, il magnete è munito di uno speciale interruttore superconduttore, come mostrato in Figura 28. La resistenza r dell'interruttore può essere controllata: o $r = 0$ nello stato superconduttore, o nello stato normale. Quando il magnete è nello stato persistente una corrente scorre nel magnete e nell'interruttore indefinitamente. Il modo persistente consente di generare un campo magnetico costante per lunghi periodi con la sorgente esterna distaccata. I dettagli dell'interruttore superconduttore non sono indicate in Figura 28. Normalmente è un pezzo di filo superconduttore avvolto attorno ad un riscaldatore e il tutto è termicamente isolato; quando viene riscaldato, la temperatura aumenta e il filo transisce nello stato normale resistivo. I valori tipici per la resistenza dell'interruttore superconduttore è di alcuni ohm, ai fini del problema assumiamo che sia di $5\ \Omega$. L'induttanza del magnete superconduttore dipende dalle sue dimensioni, in questo problema supponiamo che sia di $10\ \text{H}$; la corrente I può essere controllata dalla resistenza R . Le frecce in Figura 28 indicano la direzione positiva delle varie correnti.

Se la corrente totale I e la resistenza r dell'interruttore superconduttore variano nel tempo come in Figura 29 e assumiamo che inizialmente I_1 e I_2 che scorrono rispettivamente nel magnete e nell'interruttore sono uguali; tracciare un grafico di come variano le due correnti I_1 e I_2 nel tempo tra t_1 e t_4 .

Supporre che l'interruttore di potenza K è chiuso a $t = 0$ quando $r = 0$, $I_1 = 0$, $R = 7.5\ \Omega$ e la corrente totale $I = 0.5\ \text{A}$. Con l'interruttore K tenuto

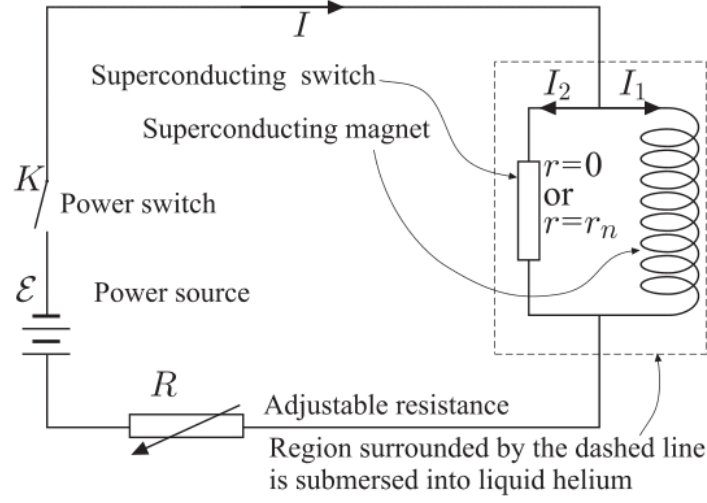


Figura 28: Circuito di alimentazione del circuito superconduttore

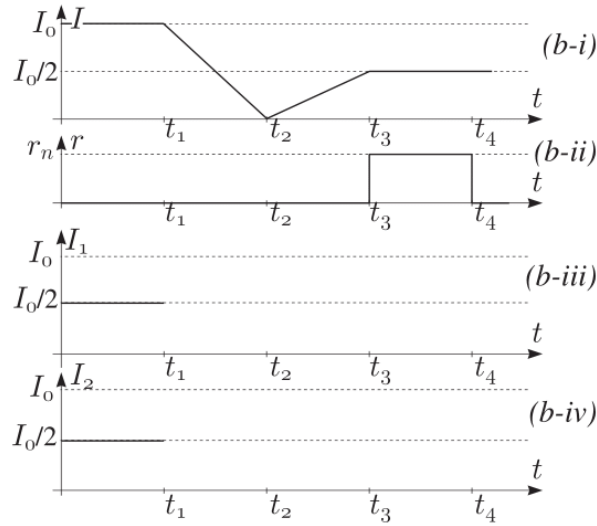


Figura 29

chiuso si fa variare la resistenza r dell'interruttore superconduttore come in Figura 30; fare un grafico di I , I_1 e I_2 .

Solo piccole correnti, minori di 0.5 A, possono scorrere attraverso l'interruttore superconduttore quando si trova nello stato normale, altrimenti esso si rompe e non è più possibile usarlo. Supponiamo che il magnete superconduttore operi in modo persistente, cioè $I = 0$, $I_1 = i_1$ (ex 20 A) e $I_2 = -i_1$, come mostrato in Figura 31, tra $t = 0$ e $t = 3$ min. Se l'esperimento deve essere

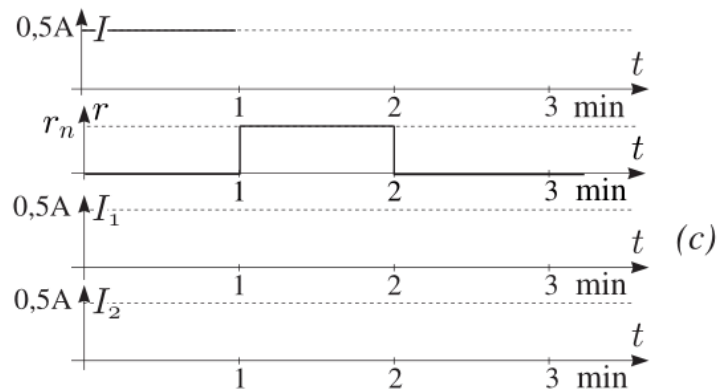


Figura 30

spento riducendo la corrente nel magnete fino a $I_1 = 0$ come dobbiamo farlo? Tracciare i grafici corrispondenti alle variazioni di I , r , I_1 e I_2 .

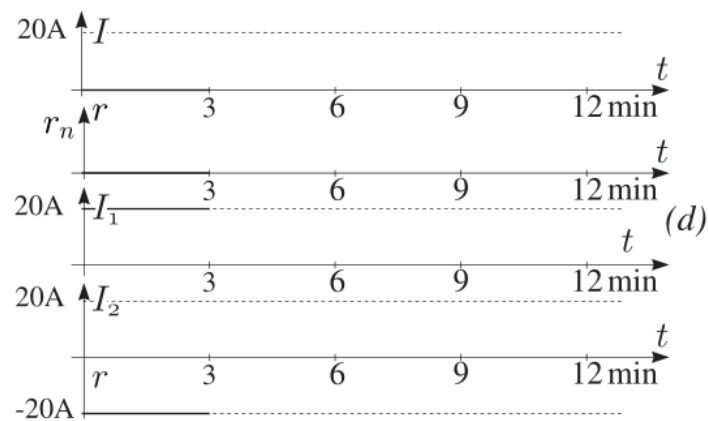


Figura 31

Supponiamo che il magnete sta operando in modo persistente con corrente $I_1 = 20$ A (da $t = 0$ a $t = 3$ min in Figura 32). Quali procedure dobbiamo attuare per portare la corrente da 20 A a 30 A? Tracciare i grafici corrispondenti alle variazioni di I , r , I_1 e I_2 .

7.2 Linea di trasmissione

Si vuole modellizzare una linea di trasmissione elettrica come per esempio un cavo coassiale o un elettrodotto; esso sarà composto da due fili conduttori separati da un materiale dielettrico che di principio può non essere isolante.

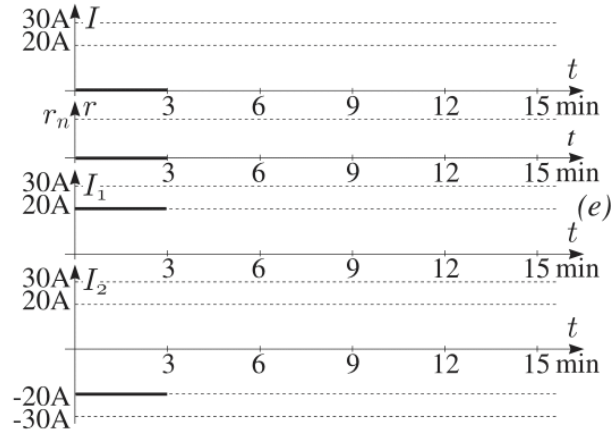


Figura 32

Possiamo schematizzare uno spezzone infinitesimo della linea con un circuito come in Figura 33; dove R è la resistenza per unità di lunghezza della linea, L l'induttanza per unità di lunghezza, C la capacità sempre per unità di lunghezza e G la conduttanza (inverso di una resistenza) per unità di lunghezza. Definiamo $V(x, t)$ la differenza di potenziale che cade sul capacitore infinitesimo posto in x al tempo t e $I(x, t)$ la corrente che scorre nell'induttore infinitesimo in posizione x al tempo t .

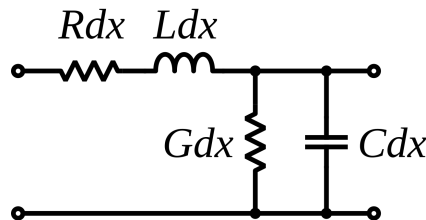


Figura 33: cella elementare

Con le due leggi di Kirchhoff trovare due equazioni differenziali che collegano le derivate spaziali o temporali delle tensioni con quelle delle correnti.

Mettendo insieme le due equazioni differenziali trovare un'equazione del tipo

$$\frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} = \alpha \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \gamma V(x, t)$$

trovare α , β e γ in funzione di R , L , C e G .

Trovare sotto quali condizioni di R , L , C e G

$$V(x, t) = e^{-\eta x} f(x - vt)$$

è soluzione dell'equazione differenziale ($f(x)$ è una funzione generica di una variabile; η e v sono due parametri costanti); provate a pensare perché si vorrebbe una linea che ha questo tipo di soluzione.

7.3 LC multipli (I2014)

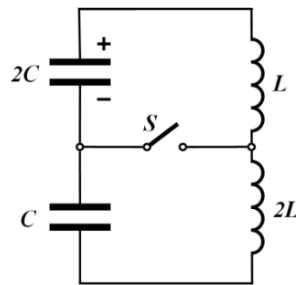


Figura 34: circuito LC multipli

Nel circuito di Figura 33 inizialmente l'interruttore S è aperto, il condensatore con capacità pari a $2C$ è caricato con una carica pari a q_0 e l'altro è scarico, nelle induttanze non scorre corrente. A questo punto il circuito viene fatto evolvere e quando la corrente nelle induttanze è massima si chiude l'interruttore S ; trovare la corrente massima $I_{\max}$ che scorre nell'interruttore dopo che è stato chiuso.

7.4 Induttanze accoppiate

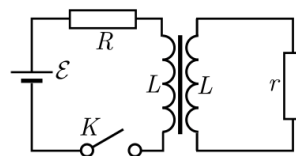


Figura 35: induttanze accoppiate

Due induttanze accoppiate sono collegate come mostrato in Figura 35; hanno entrambe induttanza L e mutua induttanza M^3 . Trovare le correnti che scorrono nel circuito in funzione del tempo dopo che l'interruttore viene chiuso.

³Dalla teoria si dimostra che deve sempre valere $M \leq L$ se sono diverse deve essere minore della media geometrica tra le due induttanze.

8 Circuiti lineari in alternata

8.1 Circuiti passa alto e passa basso

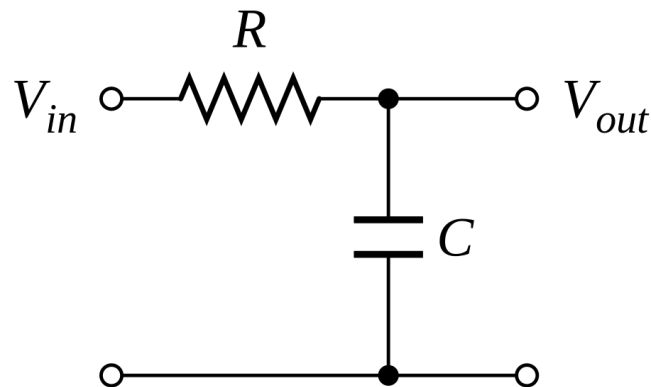


Figura 36: circuito passa basso.

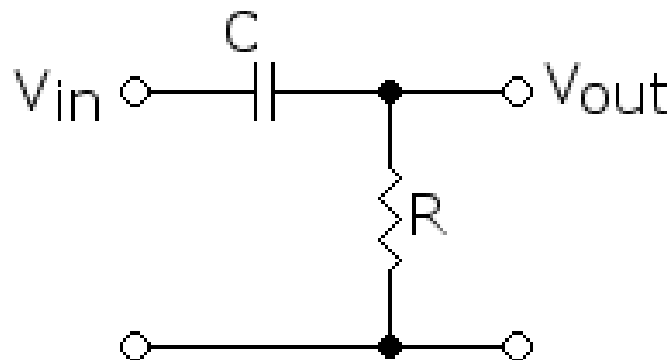


Figura 37: circuito passa alto.

Trovare la funzione di trasferimento $F = V_{out}/V_{in}$ dei seguenti circuiti in Figura 36, 37. Tracciare un grafico approssimativo del modulo e della fase al variare della frequenza del generatore di tensione in alternata. Spiegare perché si danno tali nomi a questi circuiti.

Trovare un modo, se esiste (se non esiste spiegare il perché), per riprodurre la stessa funzione di trasferimento con un circuito composto solo da induttanze e resistenze.

8.2 Linea ad alta tensione (N2001)

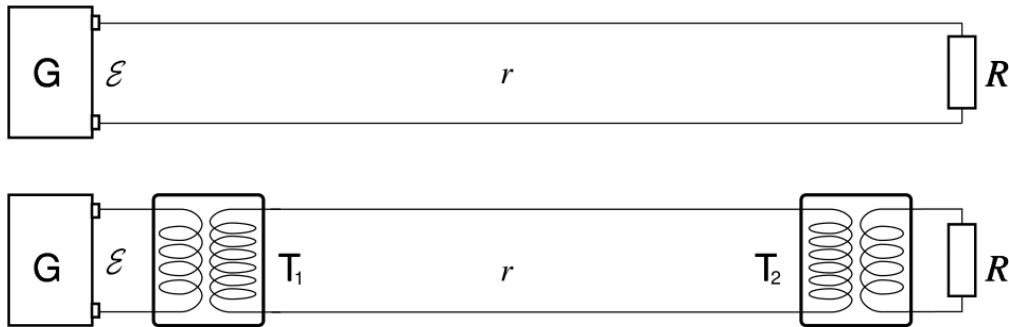


Figura 38: Linea ad alta tensione

Si consideri una linea di trasporto dell'energia elettrica, tanto lunga che la sua resistenza sia confrontabile con la resistenza totale del carico. Semplificando molto la situazione reale, si schematizza il circuito con un generatore ideale di tensione G collegato ad una resistenza R (carico) attraverso dei fili di resistenza totale r (si veda Figura 38 in alto); in queste condizioni è facile calcolare il rendimento η_1 del sistema, inteso come rapporto tra la potenza assorbita dal carico e quella erogata dal generatore. Si seziona ora il circuito in tre parti interponendo un trasformatore ideale (cioè senza perdite di potenza) tra il generatore e la linea e un secondo trasformatore complementare tra la linea ed il carico; lo scopo è di elevare la tensione del generatore di un fattore k all'uscita del primo trasformatore e di diminuire dello stesso fattore all'uscita del secondo trasformatore.

Dare un'espressione per il nuovo rendimento η_k in funzione di η_1 e k ; calcolare quando deve valere k per portare il rendimento dal 60% al 99.9%.

8.3 Circuito LCR (NB2018)

Considerare il circuito in Figura 39.

Tracciare un diagramma dei fasori dove sono indicate le seguenti tensioni V_{AD} , V_{DB} , V_{AB} , V_{AE} , V_{EB} , V_{AF} e V_{FB} .

Sapendo che i moduli delle tensioni sono $V_{DE} = 7\text{ V}$, $V_{DF} = 15\text{ V}$ e $V_{EF} = 20\text{ V}$, dare il valore di V_0 .

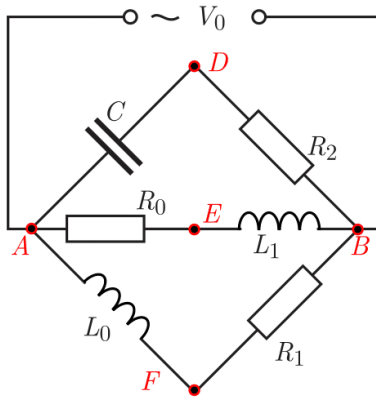


Figura 39: circuito LCR (NB2018)

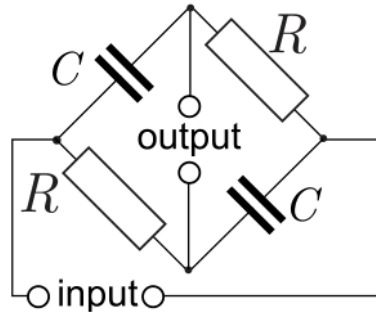


Figura 40: circuito di uno sfasatore

8.4 Sfasatore

Con il circuito in Figura 40 è possibile aggiustare la fase di un segnale sinusoidale posto in ingresso. Trovare lo sfasamento φ tra il segnale di uscita e quello di ingresso in funzione della pulsazione ω del segnale di ingresso.

8.5 Scala LC

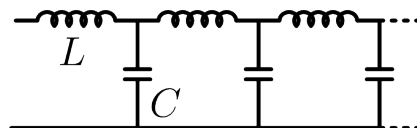


Figura 41: Scala LC

Preso un circuito a scala composta da induttanze e capacitori disposti come in Figura 41.

Trovare l'impedenza equivalente del circuito e capire come varia in funzione della pulsazione ω .

Se alimentiamo l'inizio del circuito con un generatore di tensione $V_0 = Ve^{-i\omega t}$, definiamo V_n la differenza di potenziale sull'ennesimo condensatore mostrare che essa è un'onda propagante della forma

$$V_n = Ve^{i\varphi n - i\omega t}$$

si nota però che oltre una certa pulsazione ω_t , detta pulsazione di taglio, l'onda non è più propagante ma viene smorzata, trovare ω_t in funzione dei parametri del circuito.

9 Componenti non lineari

9.1 Misurare la caratteristica tensione-corrente

Per ricostruire la caratteristica tensione-corrente di un componente si può procedere in tre modi differenti: usa spazzata in tensione, cioè si collega il componente ad un generatore di tensione regolabile e si misura la corrente che scorre nel circuito; una spazzata in corrente, cioè si collega il componente ad un generatore di corrente regolabile e si misura la tensione che cade sul componente; oppure si collega il componente ad un generatore di tensione regolabile con in serie una resistenza (che è equivalente ad un generatore di corrente con in parallelo la stessa resistenza) e si misurano sia la tensione ai capi del componente sia la corrente che ci scorre attraverso. Provate a ragionare sui pregi e difetti delle tre tecniche.

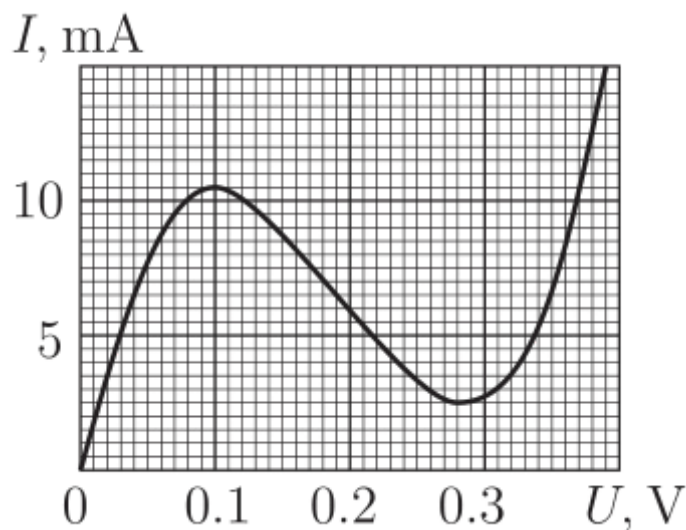


Figura 42: componente a resistenza differenziale negativa di tipo N (Diodo Esaki).

Per comprendere meglio tutte le problematiche consideriamo un componente che ha caratteristica tensione-corrente come in Figura 42; una proprietà peculiare di questo componente è la resistenza differenziale negativa⁴ di tipo

⁴Per resistenza differenziale negativa si intende che la pendenza della curva è negativa, o formalmente $R_{\text{diff}} = \frac{dV}{dI}$

N^5 in una in un certo range di tensioni.

Prima di tutto proviamo il terzo metodo, alimentiamo il componente con un generatore di tensione con in serie una resistenza R e facciamo una spazzata in tensione, come varia la curva tensione- corrente ricostruita in funzione di R .

Estremizzando il concetto tracciare il grafico della curva tensione-corrente ricostruita se si usa il metodo della spazzata in corrente.⁶

9.2 Circuito con diodo

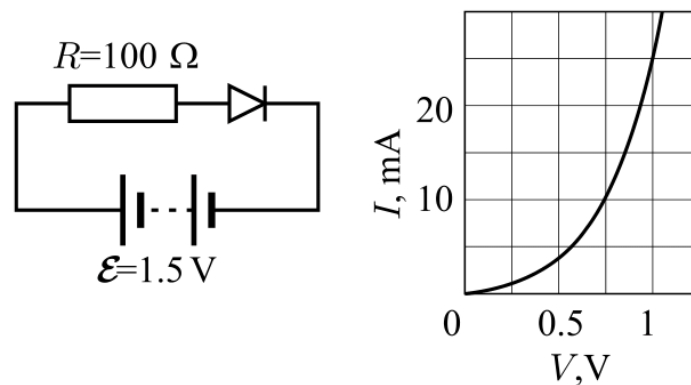


Figura 43: circuito e caratteristica $I - V$ di un diodo

Trovare la corrente che scorre nel circuito di Figura 43; La caratteristica tensione-corrente del diodo è mostrata nel grafico.

9.3 Amplificatore a diodo tunnel (EF2003)

In Figura 44 è riportato il circuito di un semplice amplificatore a diodo tunnel. Trovare l'amplificazione $A = V_{\text{output}}/V_{\text{input}}$ per piccoli segnali in ingresso, usando i seguenti valori: $R = 10 \, \Omega$ e $\mathcal{E} = 0.25 \text{ V}$.

⁵Il nome N viene dalla forma della curva, in contrapposizione con la S di un componente simile (negistor)

⁶per comprendere al meglio il problema sappiate che per i circuiti vale il seguente principio; se ci sono più soluzioni stabili possibili per il circuito quale si avveri dipende dalla storia del circuito (es se le tensioni applicate al circuito variano nel tempo), infatti i componenti obbediscono ad un principio di inerzia (per capirci, le densità di carica possono variare velocemente ma non istantaneamente) e non cambiano da un equilibrio all'altro se non c'è un buon motivo (es se si raggiunge un punto di instabilità o scompare il ramo corrente di equilibrio)

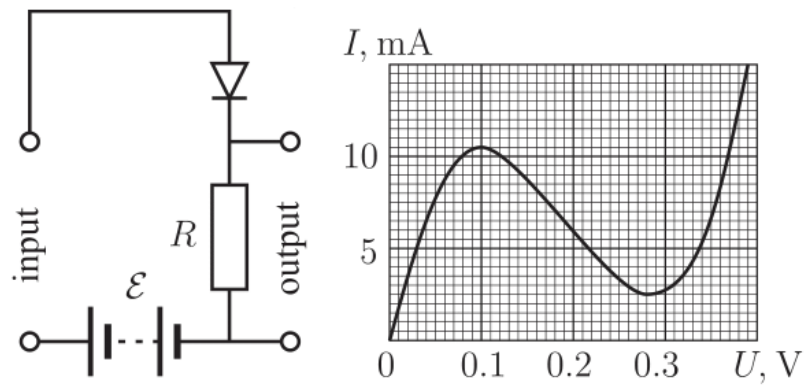


Figura 44: circuito e caratteristica $I - V$ di un diodo tunnel

9.4 Ribaltare una batteria

Presi i due circuiti in Figura 45 e Figura 46 di quante volte aumenta la potenza generata dalla batteria e dissipata nella resistenza A nel caso di Figura 45 se viene invertita la polarità della batteria (assumere che le resistenze sono tutte uguali e che i diodi sono ideali)?

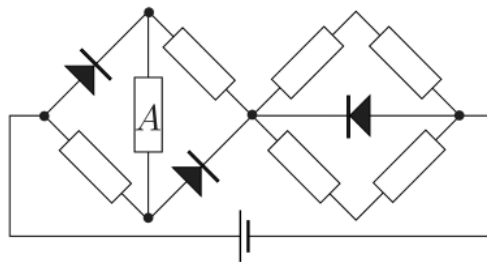


Figura 45

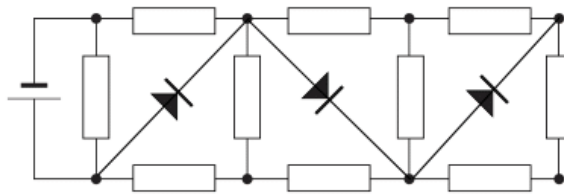


Figura 46

9.5 Bipoli in serie

Dato un bipolo con caratteristica tensione corrente come in Figura 47 (è la semplificazione di un componente reale chiamato diodo tunnel risonante o RTD).

Tracciare la caratteristica tensione corrente di due di questi bipoli messi in serie.

Cosa succede se ne metto in serie N ?

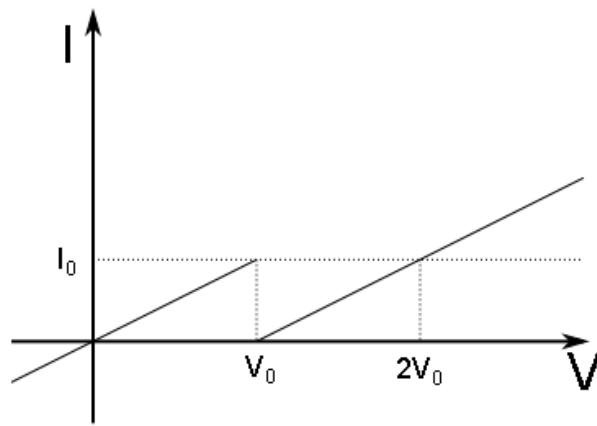


Figura 47: Caratteristica tensione corrente schematizzata RTD

9.6 Lampada a scarica

Una lampada a scarica è un tubo di vetro riempito di un gas rarefatto con due elettrodi ai capi, quando viene alimentata ha un comportamento resistivo definito come in Figura 48: La lampada parte da spenta ed ha una resistenza pari a R_S , rimane tale finché la tensione ai capi della lampada supera il valore V_A ; a questo punto la resistenza scende a $R_A < R_S$ e la lampada si accende; la resistenza rimane pari a R_A finché la tensione ai capi della lampada scende sotto il valore $V_S < V_A$, a questo punto la resistenza sale a R_S e la lampada si spegne.

La lampada viene alimentata da un generatore di tensione continua regolabile V con in serie una resistenza R , a seconda del voltaggio di alimentazione V il circuito ha tre comportamenti differenti; tracciare il grafico V_L (tensione sulla lampada) in funzione di V e indicare su di esso le tre regioni di comportamento, cercando di spiegare brevemente come si comporta il circuito in ciascuno dei tre casi. (dati numerici $V_S = 3\text{ V}$, $V_A = 6\text{ V}$, $R_S = 600\ \Omega$, $R_A = 100\ \Omega$,

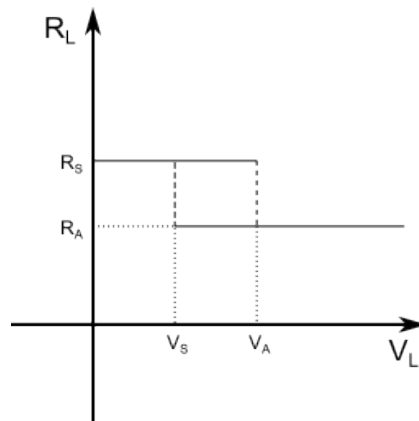


Figura 48: Caratteristica resistenza tensione lampada a scarica

$R = 400 \Omega$); successivamente valutare se ci sono delle condizioni su R per cui il circuito ha solo due comportamenti differenti al posto che tre.

Sommario

P(numero) è un problema delle Olimpiadi di Fisica (Olifis) fase provinciale, anno (numero). Ulteriori dettagli sulla soluzione ufficiale. Analogamente N sta per Nazionale, I sta per internazionale (IPhO).

10 Teoremi ed esercizi dimostrativi

10.1 Teorema di Tellegen

La dimostrazione è solo una riscrittura della sommatoria. definiamo I_{ij}^k la corrente che scorre dal nodo i al nodo j attraverso il ramo k -esimo tra i due nodi.

$$\sum_{l \in L} \Delta V_l I_l = \sum_{(\{i,j\},k)} \Delta V_{ij} I_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{(i,j,k)} \Delta V_{ij} I_{ij}^k$$

Dove nell'ultima eguaglianza si è passati dalle somme sulle coppie non ordinate $\{i,j\}$ alle coppie ordinate (i,j) , in questo modo contiamo due volte ogni ramo quindi si giustifica il fattore $1/2$ davanti alla sommatoria. A questo punto applicando le due leggi di kirchhoff si ricava

$$\sum_{(i,j,k)} \Delta V_{ij} I_{ij}^k = \sum_{(i,j,k)} (V_i - V_j) I_{ij}^k = \sum_i V_i \underbrace{\sum_{(j,k)} I_{ij}^k}_{=0} - \sum_j V_j \underbrace{\sum_{(i,k)} I_{ij}^k}_{=0} = 0$$

10.2 Teorema di Reciprocità

Applichiamo il teorema di Tellegen considerando le tensioni sul primo circuito e le correnti del secondo. Si ricava

$$E_a I'_a + E_b I'_b + \sum R_k I_k I'_k = 0$$

Dove k indicizza le resistenze nel circuito. Analogamente, scambiando i ruoli del primo e del secondo circuito, ottengo

$$E'_a I_a + E'_b I_b + \sum R_k I'_k I_k = 0$$

da cui sottraendo membro a membro e ricordando che $E_b = E'_a = 0$ si ha la tesi.

10.3 Teorema di Cohn

Prendiamo due circuiti con tutte le resistenze uguali tranne una; alimentiamo entrambi i circuiti con un generatore di corrente I ; indicheremo con a il ramo del generatore e con b il ramo della resistenza cambiata, le quantità del secondo circuito saranno indicate con gli indici primati. Applicando il teorema di tellegen come prima possiamo ricavare

$$V_a I'_a + V_b I'_b = V'_a I_a + V'_b I_b$$

ricordiamo che $V_a = -R_{eq} I_a$ (il meno è dovuto al fatto che noi stiamo guardando il generatore), e lo stesso per il secondo circuito

$$I_a I'_a (R'_{eq} - R_{eq}) = I_b I'_b (R' - R)$$

facendo tendere R' a R si ricava

$$\frac{\partial R_{eq}}{\partial R_b} = \frac{I_b^2}{I_a^2}$$

da cui la tesi

10.4 Teoremi di non amplificazione

Dimostriamo il teorema di non amplificazione delle tensioni. Il potenziale ha chiaramente un massimo e un minimo, bisogna solo localizzarli. Supponiamo che il massimo o il minimo sia su un nodo in cui incidono solo resistenze allora applicando la prima legge di kirchhoff si ricava

$$0 = \sum_j I_{ij} = \sum_j \frac{\Delta V_{ij}}{R_{ij}} = V_i \sum_j \frac{1}{R_{ij}} - \sum_j \frac{V_j}{R_{ij}} \Rightarrow V_i = \frac{\sum_j \frac{V_j}{R_{ij}}}{\sum_j \frac{1}{R_{ij}}}$$

cioè il potenziale del nodo è la media aritmetica pesata dei nodi vicini, quindi non può essere né il minimo né il massimo. le ipotesi fatte cadono sul generatore pertanto sia il minimo che il massimo del potenziale devono essere sul generatore. Più in generale supponiamo che su un nodo incidano solo componenti passivi e dimostriamo che il potenziale del nodo non può essere né il minimo né il massimo, dalla prima legge di kirchhoff si ricava se c'è una corrente entrante ci deve essere sempre una corrente uscente (Trascuriamo il caso banale in cui tutte le correnti sono nulle infatti implicherebbe che il nodo è equipotenziale a tutti i suoi vicini), da ciò si ricava che il potenziale del nodo collegato dal ramo con la corrente entrante è a potenziale maggiore (per la passività del componente sul ramo $\Delta VI \geq 0$) e per lo stesso

ragionamento si ricava che c'è un nodo a potenziale minore quindi non può essere né il massimo né il minimo.

Dimostriamo il teorema di non amplificazione delle correnti. Ordiniamo i nodi del circuito da quello a potenziale più alto a quello a potenziale più basso, consideriamo una partizione in due insiemi dei nodi in modo che i nodi fino a k stanno nel primo insieme e gli altri nel secondo ($\{1, 2, \dots, k\}$ e $\{k+1, k+2, \dots, N\}$) si consideri l'insieme T_k di tutti i rami che collegano un nodo del primo insieme con un nodo del secondo, è intuitivo che il ramo del generatore appartiene a tutti i T_k e si dimostra per induzione su k che

$$\sum_{l \in T_k} I_l = 0$$

in particolare per le convenzioni scelte le correnti saranno tutte positive tranne quella nel ramo del generatore che sarà negativa, quindi in modulo quella nel generatore deve essere quella maggiore del circuito.

NOTA IMPORTANTE: abbiamo dimostrato come sia la differenza di potenziale che la corrente devono essere massime sul generatore, ma ciò non implica che il massimo non possa essere anche su una delle resistenze infatti se si pensa ad un circuito in cui una resistenza è in serie al generatore questa avrà anch'essa la corrente massima che ci scorre attraverso.

10.5 Teorema di Millman

$$\Delta V_{AB} = V_A - V_B = E_i + I_i R_i$$

qualunque sia i . Ricavando I_i e sommando su i ho

$$\sum I_i = \sum \frac{\Delta V - E_i}{R_i} = 0$$

dove l'ultima uguaglianza viene dalla conservazione della corrente al nodo B (o A). Risolvendo per ΔV si ha la tesi.

10.6 Trasformazione Y- Δ

Per mostrare che i due circuiti sono equivalenti bisogna mostrare che per qualunque terna di tensioni applicate ai nodi A , B e C le correnti sono uguali; applicando la sovrapposizione degli effetti applichiamo una tensione alla volta e annulliamo le altre. Per i due circuiti applichiamo una tensione al nodo A , ponendo gli altri due nodi a potenziale

nullo, e calcolo le correnti nel circuito.

Nella configurazione a stella con qualche conto si ricava facilmente

$$I_B = \frac{V_A R_C}{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C} \quad I_C = \frac{V_A R_B}{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}$$

In quella a triangolo è banale

$$I_B = \frac{V_A}{R_{AB}} \quad I_C = \frac{V_A}{R_{AC}}$$

quindi uguagliando i risultati si ricava la tesi. Invertendo il sistema si ricavano le trasformazioni inverse.

10.7 Teoremi di minima dissipazione

Dalla seconda legge di Kirchhoff ricaviamo la prima.

Usando la seconda legge di Kirchhoff la potenza dissipata nelle resistenze si può scrivere come

$$P = \sum_{(\{i,j\},k)} \frac{(V_i - V_j)^2}{R_{ij}^k}$$

differenziando la potenza in V_i e imponendo che sia un minimo si ricava

$$0 = \frac{\partial P}{\partial V_i} = 2 \sum_{(j,k)} \frac{(V_i - V_j)}{R_{ij}^k} = 2 \sum_{(j,k)} I_{ij}^k$$

però V_i non può essere uno dei due nodi del generatore, però usando la conservazione dell'energia possiamo scrivere

$$0 = \sum_{(\{i,j\},k)} \Delta V_{ij} I_{ij}^k = \frac{1}{2} \left(\sum_i V_i \underbrace{\sum_{(j,k)} I_{ij}^k}_{=0 | i \neq a,b} - \sum_j V_j \underbrace{\sum_{(i,k)} I_{ij}^k}_{=0 | j \neq a,b} \right)$$

dove nell'ultimo passaggio si sono usati gli stessi conti del teorema di Tellegen e il fatto che vale la prima legge di Kirchhoff per tutti i nodi tranne per i due del generatore, definiti a e b .

$$0 = \frac{1}{2} (V_a \sum_{(j,k)} I_{aj} + V_b \sum_{(j,k)} I_{bj} - V_a \sum_{(i,k)} I_{ia} - V_b \sum_{(i,k)} I_{ib}) = V_a \sum_{(j,k)} I_{aj} + V_b \sum_{(j,k)} I_{bj}$$

ma $\sum_{(j,k)} I_{aj} = - \sum_{(j,k)} I_{bj}$ questo perché la corrente del generatore è presa con i due segni opposti e le altre devono sommare a 0 perchè sono le correnti entranti di una parte di circuito in cui in tutti i nodi vale

la prima legge di Kirchhoff (dimostratelo per induzione sul numero di nodi); quindi

$$(V_a - V_b) \sum_{(j,k)} I_{aj} = 0$$

dato che ΔV_{ab} non può essere nulla altrimenti siamo nel caso banale in cui tutte le correnti sono nulle deve valere la prima legge di Kirchhoff anche per il nodo a , similmente si dimostra per il nodo b .

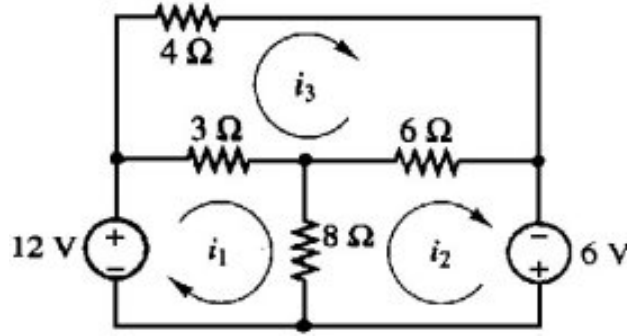


Figura 49: esempio di correnti di maglia

Dalla prima legge di Kirchhoff ricaviamo la seconda. Usando la prima legge di Kirchhoff si può dedurre l'esistenza di $l-n+1$ (dove l è il numero di lati e n è il numero di nodi del circuito) correnti indipendenti che scorrono in altrettante maglie (si veda l'esempio in figura 49), le maglie vengono scelte in modo che nel generatore scorre solo una corrente di magli I_G . Possiamo scrivere la potenza come

$$P = \sum_l R_l I_l^2$$

derivando rispetto ad una delle correnti di maglia si ricava

$$\frac{\partial P}{\partial I_i} = 2 \sum_{(l,j) \in M_i} (I_i + I_j) R_l = 2 \sum_{l \in M_i} \Delta V_l = 0$$

dove M_i è l'insieme dei lati che appartengono alla maglia i , l indicizza i lati appartenenti alla maglia e j indicizza le correnti di maglia che scorrono nel ramo l diverse da quella i -esima. Per recuperare quella del generatore si usa la conservazione dell'energia

$$0 = \sum_{l \in L} \Delta V_l I_l = \sum_{l \in L} \Delta V_l \sum_{i \in \tilde{M}_l} I_i = \sum_{i \in M} I_i \underbrace{\sum_{l \in M_i} \Delta V_l}_{=0 \text{ se } i \neq G} = I_G \sum_{l \in M_G} \Delta V_l$$

dove L è l'insieme dei lati, $\tilde{M}_l$ è l'insieme delle maglie che incidono sul lato l , M_i è l'insieme dei lati della maglia i e M è l'insieme delle maglie indipendenti prese in considerazione. Assumendo $I_G \neq 0$ altrimenti si cade nel caso triviale in cui tutte le potenze sono nulle e quindi le tensioni, si ricava la legge per le maglie anche per il generatore; cambiando l'insieme di maglie indipendenti prese in considerazione si ricava la seconda legge di Kirchhoff per tutte le maglie del circuito.

10.8 Disuguaglianza triangolare per la resistenza equivalente

Preso il circuito in cui colleghiamo un generatore di corrente I tra i nodi A e C la resistenza equivalente $R_{AC} = V_{AC}/I$; ma questo circuito possiamo vederlo come sovrapposizione tra il circuito alimentato dallo stesso generatore di corrente tra i nodi A e B (circuito primato) e uno in cui si mette il generatore tra i nodi B e C (circuito doppio primato), quindi

$$R_{AC} = \frac{V_C - V_A}{I} = \frac{V'_C - V'_A + V''_C - V''_A}{I}$$

dal teorema di non amplificazione sappiamo che $V'_C \leq V'_B$ e $V''_A \geq V''_B$ quindi

$$R_{AC} = \frac{V_C - V_A}{I} = \frac{V'_C - V'_A + V''_C - V''_A}{I} \leq \frac{V'_B - V'_A + V''_C - V''_B}{I} = R_{AB} + R_{BC}$$

da cui la tesi.

Durante lo stage mi è stata proposta un'altra dimostrazione; l'idea è quella che per un circuito a tre uscite in configurazione a stella la tesi è evidente, se un qualunque circuito visto da tre nodi è equivalente ad un circuito di tipo stella allora la tesi si dimostra banalmente; per dimostrare quest'ultima affermazione bisogna passare per le matrici di conduttanza quindi verrà omessa (è più facile dimostrare che un circuito a tre nodi è equivalente a un circuito in configurazione a triangolo e poi passare alla stella con le trasformazioni Y- Δ).

10.9 Proprietà topologica di una rete di resistenze

Facciamo il caso più generale. Definiamo R_{ij} la resistenza tra i nodi i e j e con σ_{ij} la resistenza equivalente sempre tra i e j ; definiamo I_{ij}^{k+} la corrente che scorre dal nodo i al nodo j quando viene iniettata una corrente $\frac{N-1}{N}I$ dal nodo k e viene estratta una corrente $\frac{1}{N}I$ dagli altri

$N - 1$ nodi e con I_{ij}^{k-} la situazione opposta. Da queste definizioni e usando il principio di sovrapposizione si ricava che

$$\sigma_{ij} = R_{ij} \frac{I_{ij}^{i+} + I_{ij}^{j-}}{I}$$

quindi seguendo la falsa riga della dimostrazione di Tellegen

$$\sum_{\{i,j\}} \frac{\sigma_{ij}}{R_{ij}} = \frac{1}{I} \sum_{\{i,j\}} I_{ij}^{i+} + I_{ij}^{j-} = \frac{1}{2I} \sum_{(i,j)} I_{ij}^{i+} + I_{ij}^{j-} = \frac{1}{2I} \left(\underbrace{\sum_i \sum_{j_i} I_{ij}^{i+}}_{= \frac{N-1}{N} I} + \underbrace{\sum_j \sum_{i_j} I_{ij}^{j-}}_{= \frac{N-1}{N} I} \right) = (N-1)$$

in definitiva

$$\sum_{\{i,j\}} \frac{\sigma_{ij}}{R_{ij}} = N - 1$$

11 Circuiti lineari in continua

11.1 Partitore di tensione e corrente

E' sufficiente mettere una resistenza r in serie con il generatore di tensione o in parallelo nel caso di generatore di corrente. Nel caso di resistenza in serie $r = R \frac{V_0 - V_1}{V_1}$. Nell'altro caso $r = R \frac{I_1}{I_0 - I_1}$.

11.2 Più generatori

Devo risolvere il circuito dell'esercizio mediante il principio di sovrapposizione (farlo di forza bruta insegna quasi solo che questo metodo è preferibile). Considero come "condizioni al contorno" i due generatori. Passivando V , cioè cortocircuitandolo, ho che R_1 e R_2 diventano in parallelo e si ha un circuito a una maglia con generatore di corrente I e resistenza equivalente $R_{eq} = R_3 + R_4 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Si può ricavare la tensione in qualunque punto in modo elementare, così come la corrente attraverso R_1 e R_2 . Analogamente passivando I ho un circuito a una maglia con generatore di tensione V e serie di resistenze R_1 R_2 (staccando I ho che R_3 e R_4 non entrano mai in gioco). Anche qui è facile ricavare la corrente e la tensione ovunque, dopodiché è sufficiente sommare le due soluzioni (punto per punto la tensione totale è la somma delle tensioni nei due casi, e così la corrente).

11.3 Guasto alla linea telefonica (P2004)

Per questo problema si rimanda alla soluzione ufficiale del gruppo olimpiadi. [Testi gara provinciale](#)

11.4 Misure elettriche (P2010)

Per questo problema si rimanda alla soluzione ufficiale del gruppo olimpiadi. [Testi gara provinciale](#)

11.5 4 Resistenze (P2013)

Per questo problema si rimanda alla soluzione ufficiale del gruppo olimpiadi. [Testi gara provinciale](#)

11.6 Occhio alle induttanze (N2007)

Per questo problema si rimanda alla soluzione ufficiale del gruppo olimpiadi. [Testi gara nazionale](#)

11.7 Solidi platonici

Qui si presenta la soluzione trovata nel 1998 dall'olandese F. J. Van Steenwijk.

Applichiamola per esempio al dodecaedro (quello tra tutti il più complicato da risolvere con altri metodi); per calcolare la resistenza equivalente tra due nodi si inietta corrente dal primo nodo e si estrae dal secondo e si calcola la differenza di potenziale tra i due nodi; questa configurazione si può vedere come sovrapposizione tra:

- iniettare nel primo vertice e estrarre una corrente uguale da tutti gli altri
- iniettare una corrente uguale tra tutti i vertici tranne il secondo ed estrarla dal secondo

come rappresentato in figura 50 Prendiamo in considerazione il primo

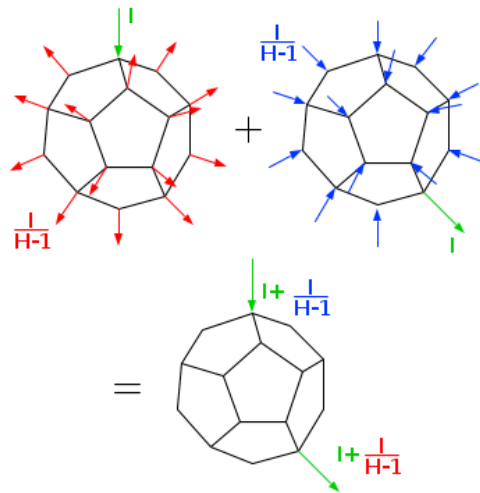


Figura 50: idea su come applicare la sovrapposizione degli effetti (H è il numero di vertici del solido)

caso (il secondo è uguale); a questo punto ci siamo ricondotti a un caso totalmente simmetrico in cui le correnti nei lati si calcolano facilmente e da quelle si ricavano i potenziali su ogni nodo. Noti i potenziali si può calcolare la resistenza equivalente; ci si convince facilmente che la seconda configurazione tra i due nodi dà lo stesso potenziale quindi il potenziale finale sarà doppio di quello trovato; la corrente che si sta iniettando nel solido è pari a $IH/(H-1)$ dove H è il numero di vertici del solido; quindi la resistenza equivalente finale si ricava con la formula

$$R_{eqn} = \frac{2V_n}{I} \frac{N-1}{N}$$

facendo un po di conti si ricavano le seguenti resistenze equivalenti, tra parentesi viene messo il numero di nodi con quella resistenza equivalente.

Tetraedro

$$R_{eq} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

Ottaedro

$$R_{eq} = \frac{5}{12} \quad (4) \quad \frac{6}{12} \quad (1)$$

Cubo

$$R_{eq} = \frac{7}{12} \quad (3) \quad \frac{9}{12} \quad (3) \quad \frac{10}{12} \quad (1)$$

Dodecaedro

$$R_{eq} = \frac{19}{30} \quad (3) \quad \frac{27}{30} \quad (6) \quad \frac{32}{30} \quad (6) \quad \frac{34}{30} \quad (3) \quad \frac{35}{30} \quad (1)$$

Isocaedro

$$R_{eq} = \frac{11}{30} \quad (5) \quad \frac{14}{30} \quad (5) \quad \frac{15}{30} \quad (1)$$

11.8 Scala di resistenze

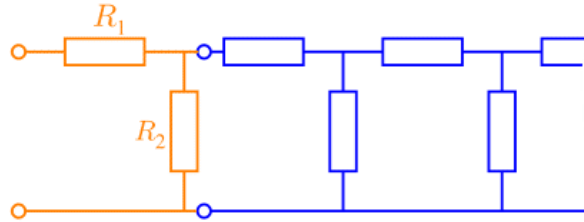


Figura 51: idea della soluzione

Per calcolare la resistenza equivalente basta notare che il circuito è auto-similare quindi, prendendo riferimento dalla figura 51, se tolgo le prime due resistenze (in arancione), la parte rimanente (in blu) è equivalente al circuito di partenza, quindi si può scrivere

$$R = R_1 + \frac{R R_2}{R + R_2} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{R_1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{R_2}{R_1}} \right)$$

Per la seconda domanda chiamiamo V_n la tensione dell' n -esimo nodo in alto, con V_0 quella di alimentazione. Applicando la prima legge di Kirchhoff si ricava

$$\frac{V_n - V_{n+1}}{R_1} = \frac{V_{n+1}}{R_2} + \frac{V_{n+1} - V_{n+2}}{R_1}$$

Sostituendo la soluzione proposta $V_n = V_0 \lambda^n$ si ricava una equazione di secondo grado per λ che ha entrambe le soluzioni positive, ma solo una < 1 (l'altra è da escludere per il teorema di non amplificazione delle tensioni).

$$\lambda^2 R_2 - \lambda(2R_2 + R_1) + R_2 = 0$$

$$\lambda = \frac{2R_2 + R_1 - \sqrt{R_1^2 + 4R_1 R_2}}{2R_2}$$

e invertendola si ricava

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\lambda}{(\lambda - 1)^2}$$

11.9 Profusione di scale

Generatori 1

Applicando il teorema di thevenin il circuito può essere visto come un generatore di tensione ε_{th} con in serie una resistenza R_{th} , usando l'idea precedente di sostituire tutto il circuito tranne il primo modulo con l'equivalente di thevenin si ricavano le seguenti due equazioni (per ricavare la seconda si usa il teorema di Milmann)

$$R_{th} = R + \frac{r R_{th}}{r + R_{th}} \quad \varepsilon_{th} = \frac{\frac{\varepsilon}{r} + \frac{\varepsilon_{th}}{R_{th}}}{\frac{1}{r} + \frac{1}{R_{th}}}$$

che risolte danno

$$R_{th} = \frac{R}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{r}{R}} \right) \quad \varepsilon_{th} = \varepsilon$$

Scala Geometrica

Togliendo il primo modulo la resistenza equivalente sarà doppia quindi si può scrivere

$$R_{eq} = R + \frac{2R R_{eq}}{R + R_{eq}} \quad R_{eq} = R \frac{3 + \sqrt{17}}{4}$$

•

Generatori 2

Applicando le stesse idee viste in precedenza

$$R_{th} = \frac{R}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{r}{R}} \right)$$

$$\varepsilon_{th} = \varepsilon + \varepsilon_{th} \frac{r}{r + R_{th}} \quad \varepsilon_{th} = \varepsilon \left(1 + \frac{2r}{R} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + 4 \frac{r}{R}}} \right)$$

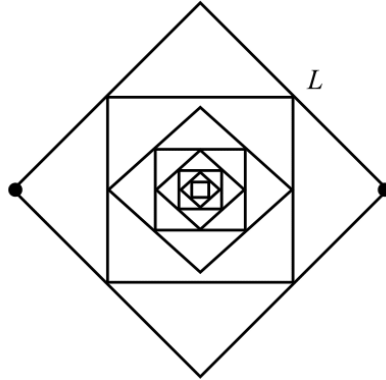


Figura 52: circuito semplificato

11.10 Circuito frattale quadrato

Dalla simmetria destra-sinistra si può dedurre che tutti i vertici a metà del circuito sono allo stesso potenziale quindi il circuito in Figura 53 è equivalente a quello di partenza (si notino i vertici staccati nel terzo quadrato); a questo punto si noti come il quadrato centrale è equivalente al circuito totale solo scalato di un fattore $1/2$, quindi definita Rx la resistenza equivalente dell'intero circuito la resistenza del quadrato centrale sarà $Rx/2$. A questo punto si può calcolare la

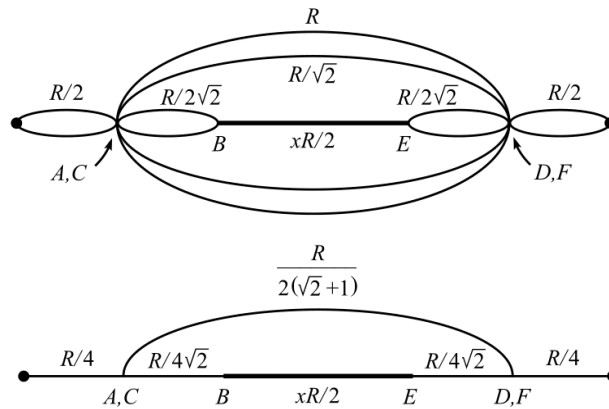


Figura 53: circuito equivalente

resistenza equivalente

$$Rx = \frac{R}{2} + \left(\frac{1}{\frac{R}{2\sqrt{2}+1}} + \frac{1}{\frac{R}{2\sqrt{2}} + \frac{Rx}{2}} \right)^{-1}$$

che dopo parecchi calcoli diventa

$$x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1}{2}$$

11.11 Quadrati affiancati

Per capirci chiamiamo A il nodo in basso a sinistra C quello in alto a sinistra D quello in basso a destra e B quello in alto a destra e verrà indicato un $+$ a pedice se viene iniettata corrente nel nodo e con $-$ se viene estratta; per calcolare la resistenza equivalente basta iniettare una corrente I nel nodo A ed estrarne una identica da B (A_+B_-). questo è equivalente a sovrapporre due configurazioni $A_+B_-C_+D_-$ e $A_+B_-C_-D_+$ dove le correnti ai quattro vertici sono $I/2$ in modo che sommando le due configurazioni si recuperi quella di partenza.

$A_+B_-C_+D_-$

Per simmetria di riflessione alto-basso, sulle resistenze verticali non scorre corrente quindi

$$V_{AB} = V_{AD} = \frac{NRI}{2}$$

$A_+B_-C_-D_+$

usando il metodo delle correnti di maglia (si veda la Figura 49 per capire cosa sono le correnti di maglia) e usando la seconda di Kirchhoff si ricava

$$2I_k R + (I_k - I_{k-1})R + (I_k - I_{k-1})R = 0 \quad \Rightarrow \quad 4I_k - I_{k-1} - I_{k+1} = 0$$

Provando una soluzione del tipo $I_k = A\lambda^k$ si ricava la seguente equazione

$$\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0 \quad \lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

notiamo che le due soluzioni sono una l'inverso dell'altra e quindi usando quella col $+$ come riferimento possiamo scrivere

$$I_k = A\lambda^k + B\lambda^{-k}$$

imponendo le condizioni al contorno

$$\begin{cases} I_0 &= \frac{I}{2} = A + B \\ I_{N+1} &= -\frac{I}{2} = A\lambda^{N+1} + B\lambda^{-N-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A &= -\frac{I}{2} \frac{\lambda^{-N-1}}{1-\lambda^{-N-1}} \\ B &= \frac{I}{2} \frac{1}{1-\lambda^{-N-1}} \end{cases}$$

che da come risultato

$$I_k = \frac{I}{2} \frac{\lambda^{-k} - \lambda^{-N-1+k}}{1 - \lambda^{-N-1}}$$

per simmetria destra-sinistra

$$V_{AB} = V_{AC} = R(I_0 - I_1) = \frac{RI}{2} \frac{(\lambda - 1)(1 + \lambda^N)}{\lambda^{N+1} - 1}$$

Quindi sommando i due contributi si ricava

$$R_{eq} = \frac{V_{AB1} + V_{AB2}}{I} = \frac{R}{2} \left[N + \frac{(\sqrt{3} + 1)(1 + (\sqrt{3} + 2)^N)}{(\sqrt{3} + 2)^{N+1} - 1} \right]$$

11.12 Griglia quadrata

Per R_{01} si può fare un ragionamento di simmetria e sovrapposizione. procediamo col iniettare una corrente I_0 in $(0, 0)$ e la estraiamo da $(0, 1)$; questa configurazione può essere vista come sovrapposizione tra una in cui inietto la corrente in $(0, 0)$ e la estraggo all'infinito in modo simmetrico e un'altra in cui inietto corrente dall'infinito in modo simmetrico e la estraggo da $(0, 1)$; in entrambi i casi data la simmetria della griglia la corrente si distribuirà in modo equo nelle quattro resistenze adiacenti al nodo preso in esame quindi quando sovrappongo nella resistenza tra i due nodi scorre la metà della corrente che inietto; da questo si deduce che $R_{01} = R/2$ ⁷

Per calcolare R_{MN} bisogna impostare un conto più complesso che prevede l'uso della trasformata di Fourier discreta bidimensionale.⁸ procediamo sempre iniettando una corrente I in $(0, 0)$ e estraendone

⁷questo ragionamento dà il risultato corretto ma bisogna stare attenti in quanto si può dimostrare che la resistenza tra due nodi asintoticamente cresce con il logaritmo della distanza quindi quell'estrarre e iniettare dall'infinito ci porta ad avere tensioni infinite nel circuito che potrebbero essere problematiche

⁸Per i dettagli si rimanda a testi specifici, ai fini della comprensione basti sapere che la trasformata manda una funzione $f(m, n)|m, n \in \mathbb{Z}$ in una funzione $F(h, k)|h, k \in [-\pi, \pi)$ e viceversa attraverso le seguenti trasformazioni

$$F(h, k) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(m, n) e^{-i(mh+nk)}$$

$$f(m, n) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} dh \int_{-\pi}^{\pi} dk F(h, k) e^{i(mh+nk)}$$

una in (M, N) e calcoliamo la differenza di potenziale tra i due nodi, impostiamo la prima legge di Kirchhoff per il nodo (m, n)

$$\frac{V_{m,n} - V_{m,n+1}}{R} + \frac{V_{m,n} - V_{m,n-1}}{R} + \frac{V_{m,n} - V_{m+1,n}}{R} + \frac{V_{m,n} - V_{m-1,n}}{R} = I_{m,n}$$

$$4V_{m,n} - V_{m,n+1} - V_{m,n-1} - V_{m+1,n} - V_{m-1,n} = RI_{m,n}$$

dove

$$I_{m,n} = \begin{cases} -I & m=0, n=0 \\ I & m=M, n=N \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

vorremmo risolvere questo sistema di infinite equazioni ma per farlo applichiamo la trasformata di Fourier

$$\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} (4V_{m,n} - V_{m,n+1} - V_{m,n-1} - V_{m+1,n} - V_{m-1,n}) e^{-i(mh+nk)} = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} RI_{m,n} e^{-i(mh+nk)}$$

e si semplifica usando l'identità $\cos(x) = (e^{ix} + e^{-ix})/2$

$$(4 - 2\cos(h) - 2\cos(k))V_{h,k} = RI_{h,k} \quad I_{h,k} = I \left(e^{-i(hM+kN)} - 1 \right)$$

da cui ricaviamo $V_{h,k}$, quindi

$$R_{M,N} = \frac{V_{M,N} - V_{0,0}}{I_0} = \frac{R}{4\pi^2 I} \iint_{-\pi}^{\pi} dh dk \frac{I_{h,k}}{4 - 2\cos(h) - 2\cos(k)} \left(e^{i(hM+kN)} - 1 \right)$$

con qualche conto e usando, usando le somme del coseno e la disparità di alcuni pezzi che si annullano di conseguenza si ricava

$$R_{M,N} = \frac{R}{4\pi^2} \iint_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos(hM) \cos(kN)}{2 - \cos(h) - \cos(k)}$$

che risolto da i seguenti risultati⁹

$$R_{01} = \frac{R}{2} \quad R_{11} = \frac{2R}{\pi} \quad R_{21} = R \left(\frac{4}{\pi} - \frac{1}{2} \right)$$

11.13 Muro di resistenze (PC2018)

Per questo problema si rimanda alla soluzione ufficiale della physics cup. [Testi gara](#)

⁹una formula esplicita per risolvere quell'integrale non esiste, un metodo per cercare di semplificarlo passa per i polinomi di Chebichev quindi non verrà riportata in queste dispense

12 Circuiti nel dominio del tempo

12.1 Magneti superconduttori (I1994)

Per questo problema si rimanda alla soluzione ufficiale delle olimpiadi internazionali. [Testi IPhO](#)

12.2 Linea di trasmissione

Applicando la prima legge di Kirchhoff si ricava

$$I(x, t) = I(x + dx, t) + V(x, t)G dx + \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} C dx$$
$$-\frac{\partial I(x, t)}{\partial x} = GV(x, t) + C \frac{\partial V(x, t)}{\partial t}$$

dalla seconda si ricava

$$V(x, t) = V(x + dx, t) + I(x, t)R dx + \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} L dx$$
$$-\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = RI(x, t) + L \frac{\partial I(x, t)}{\partial t}$$

derivando in x la seconda e usando la prima per togliere la corrente si ricava che

$$\alpha = LC \quad \beta = RC + GL \quad \gamma = RG$$

inserendo l'espressione data nell'equazione differenziale si ricava un sistema che risolto dà come condizione

$$RC = GL$$

la soluzione data implica che la linea non distorce il segnale cioè se inietto un segnale all'inizio della linea, esso rimarrà uguale in forma solo ridotto di un fattore $e^{-\eta L}$.

12.3 LC multipli (I2014)

Per questo problema si rimanda alla soluzione ufficiale delle olimpiadi internazionali. [Testi IPhO](#)

12.4 Induttanze accoppiate

Le equazioni sono

$$\varepsilon = I_1 R + L \dot{I}_1 + M \dot{I}_2$$
$$M \dot{I}_1 + L \dot{I}_2 + I_2 r = 0$$

Derivo la prima e ricavo $\dot{I}_1$ dalla seconda. Si ha

$$\frac{dI_1}{dt}R + L\frac{d^2I_1}{dt^2} + M\frac{d^2I_2}{dt^2} = 0$$

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{-rI_2 - L\frac{dI_2}{dt}}{M}$$

sostituendo la seconda nella prima si ha un'equazione differenziale per il solo I_2 , per il quale provo la soluzione $I_2(t) = Ae^{-\lambda t}$. Si ricava dunque un'equazione per λ che è

$$(L^2 - M^2)\lambda^2 - L\lambda(R + r) + Rr = 0$$

posto $\beta = \frac{M}{L}$ si ha

$$\lambda_{1,2} = \frac{R+r}{2L(1-\beta^2)} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{Rr}{(R+r)^2}(1-\beta^2)} \right)$$

Abbiamo quindi $I_2(t) = Ae^{-\lambda_1 t} + Be^{-\lambda_2 t}$, da cui si ricava $\frac{dI_1}{dt}$ e di conseguenza $I_1(t)$

$$I_1(t) = \frac{\varepsilon}{R} + \left(\frac{rA}{M\lambda_1} - \frac{LA}{M} \right) e^{-\lambda_1 t} + \left(\frac{rB}{M\lambda_2} - \frac{LB}{M} \right) e^{-\lambda_2 t}$$

dove la costante arbitraria è stata scelta in modo che per tempi grandi, quando tutte le derivate si annullano, si cancelli il contributo del generatore. Imponendo che le correnti I_1 , I_2 inizialmente siano nulle si ricava

$$A + B = 0; \quad \frac{\varepsilon}{R} + \frac{rA}{M\lambda_1} - \frac{LA}{M} + \frac{rB}{M\lambda_2} - \frac{LB}{M} = 0$$

che risolte danno

$$A = -B = \frac{\varepsilon L \beta}{Rr} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\varepsilon \beta}{R+r} \frac{1}{\sqrt{1 - 4\frac{Rr}{(R+r)^2}(1-\beta^2)}}$$

un caso interessante di queste equazioni è quando $\beta = 1$ in cui si viene a formare una discontinuità nelle correnti

13 Circuiti lineari in alternata

13.1 Circuiti passa alto e passa basso

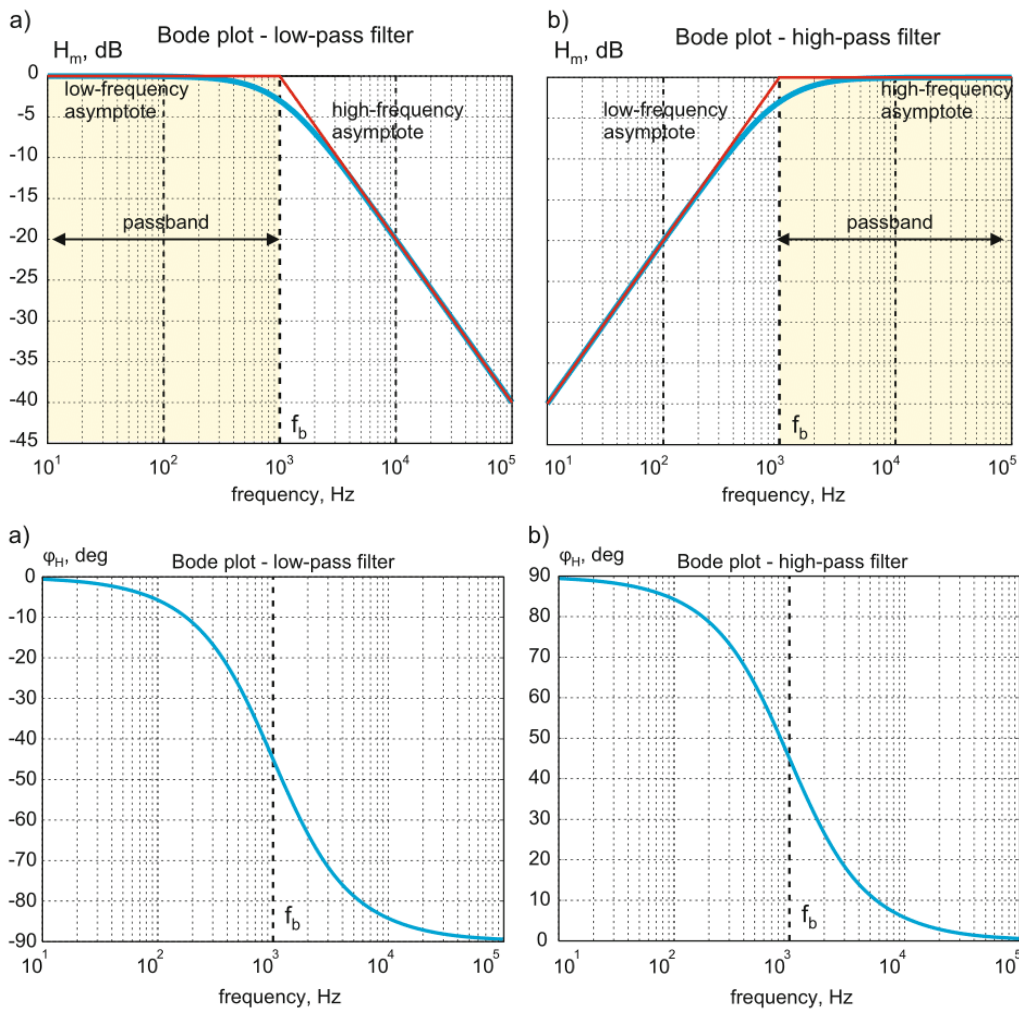


Figura 54: Diagramma di Bode di un filtro passa basso (a) e di un filtro passa alto (b) con frequenza di taglio a 1 KHz

Per il circuito passa basso attraverso le formule del partitore di tensione si ricava

$$F(j\omega) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

per i grafici al posto di $F(j\omega)$ si preferisce graficare $A = 20 \log_{10}(|F(j\omega)|)$ che viene detto guadagno e si misura in dB (Decibel); quindi i grafici sono quelli in figura 54 (si noti come l'asse delle ω sia in scala

logaritmica) da cui si capisce il nome del circuito. per il circuito passa alto la situazione è simile

$$F(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

per i grafici si faccia riferimento alla figura 54

Per riprodurre le stesse funzioni di trasferimento con induttanze e resistenze basta notare che se si moltiplicano tutte le impedenze per $i\omega$ le funzioni di trasferimento non cambiano ma le resistenze vanno in induttanze e le capacità vanno in resistenze

$$\begin{array}{lcl} R & \Rightarrow & L \\ C & \Rightarrow & \frac{1}{R} \end{array}$$

13.2 Linea ad alta tensione (N2001)

Per questo problema si rimanda alla soluzione ufficiale del gruppo olimpiadi. [Testi gara nazionale](#)

13.3 Circuito LCR (NB2018)

Per questo problema si rimanda alla soluzione ufficiale delle olimpiadi del nord-baltico. [Testi gara](#)

13.4 Sfasatore

Usando le formule del partitore di tensione si ricava

$$V_1 = V_{in} \frac{R}{R + \frac{1}{i\omega C}} \quad V_2 = V_{in} \frac{\frac{1}{i\omega C}}{R + \frac{1}{i\omega C}}$$

quindi la funzione di trasferimento è

$$\frac{V_2 - V_1}{V_{in}} = \frac{1 - i\omega RC}{1 + i\omega RC}$$

si vede come la funzione di trasferimento ha modulo costante e unitario e fase

$$\varphi = -2 \arctan(\omega RC)$$

13.5 Scala LC

Per calcolare l'impedenza equivalente basta notare che se si tolgono la prima induttanza e la prima capacità il circuito rimane uguale quindi si può scrivere

$$Z = i\omega L + \frac{Z \frac{1}{i\omega C}}{Z + \frac{1}{i\omega C}} \Rightarrow Z^2 - i\omega LZ - \frac{L}{C} = 0$$

che risulta da

$$Z = \frac{i\omega L}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{\omega^2 LC}} \right)$$

per decidere il segno bisogna essere un po più attenti ci sono due regimi, definita $\omega_t = 2/\sqrt{LC}$, bisogna distinguere se ω è maggiore o minore di ω_t . Se $\omega < \omega_t$ si vede che l'impedenza ha sia una parte reale sia una parte immaginaria, questo è dovuto al fatto che, come si vedrà nel seguito, la scala trasporta segnali e quindi la resistenza simula la potenza che la linea porta all'infinito; per decidere il segno basta notare che la parte reale deve essere positiva, pertanto deve esserci il segno negativo. Se $\omega_t > \omega$ l'impedenza è puramente immaginaria, ciò è dovuto al fatto che la scala non propaga più segnali e quindi scompare la resistenza; per decidere il segno basta notare che per frequenza molto alte l'impedenza della scala sarà circa quella della prima induttanza, infatti la prima capacità avrà impedenza trascurabile e quindi cortocircuiterà il resto della scala; da ciò si deduce che il segno corretto è quello positivo.

Mostriamo che si possono propagare onde lungo la linea, usando la legge di Kirchhoff ai nodi si ricava

$$\frac{V_{n-1} - V_n}{i\omega L} = \frac{V_n - V_{n+1}}{i\omega L} + V_n i\omega C \Rightarrow V_{n+1} - (2 - \omega^2 LC)V_n + V_{n-1} = 0$$

usando la formula per le onde propaganti si ricava

$$2\cos(\varphi) = 2 - \omega^2 LC \Rightarrow \varphi = \pm \arccos \left(1 - \frac{\omega^2 LC}{4} \right)$$

il segno corretto della fase è quello negativo (nel seguito si mostra come dimostrarlo); si nota subito che la soluzione trovata è valida solo per $\omega \leq 2/\sqrt{LC} = \omega_t$. Se $\omega > \omega_t$ si vuole cercare una soluzione nella forma

$$V_n = V\alpha^n e^{-i\omega t} \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad |\alpha| \leq 1$$

il fatto che il modulo di α si voglia minore di 1 è dovuto al fatto che vogliamo una soluzione esponenzialmente depressa; usando le formule precedenti si ricava

$$\alpha^2 - (2 - \omega^2 LC)\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1 - \frac{\omega^2 LC}{2} \pm \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2 LC}{2}\right)^2 - 1}$$

si noti come entrambe le soluzioni siano negative e quella con il modulo minore di uno è quella con il segno positivo quindi

$$\alpha = 1 - \frac{\omega^2 LC}{2} + \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2 LC}{2}\right)^2 - 1}$$

Per trovare il segno corretto della fase nel punto precedente si procede nel seguente modo, si aggiunge una piccola resistenza in serie all'induttanza e si va a cercare la soluzione con modulo minore di 1 infatti le resistenze inserite disperdono potenza e quindi non fanno propagare il segnale; quindi

$$V_{n+1} - (2 - \omega^2 LC + i\omega RC)V_n + V_{n-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{i2\tilde{\varphi}} - (2 - \omega^2 LC + i\omega RC)e^{i\tilde{\varphi}} + 1 = 0$$

definiamo $x = 1 - \omega^2 LC/4 < 1$ e $y = \omega RC/2$, pertanto

$$e^{i2\tilde{\varphi}} - 2(x + iy)e^{i\tilde{\varphi}} + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{i\tilde{\varphi}} = x + iy \pm \sqrt{(x + iy)^2 - 1}$$

che approssimata al primo ordine in y da

$$e^{i\tilde{\varphi}} = x \pm i\sqrt{1 - x^2} \pm \frac{yx}{\sqrt{1 - x^2}} + iy$$

calcolandone il modulo quadro (sempre approssimato al primo ordine in y) si ricava

$$|e^{i\tilde{\varphi}}|^2 = 1 \pm \frac{2y}{\sqrt{1 - x^2}}$$

da questo si deduce che il segno corretto è quello negativo.

14 Componenti non lineari

14.1 Misurare la caratteristica tensione-corrente

La differenza tra i tre metodi dipende tutto dalla resistenza differenziale $R_{\text{diff}} \left(\frac{dI}{dV} \right)$ del componente.

Maggiore è la differenza differenziale in una certa regione più conviene esplorare la regione con una spazzata in corrente, al contrario minore è la resistenza differenziale. Più conviene usare spazzate in tensione; il terzo metodo è una via di mezzo che ha i pregi e i difetti di entrambe.

nell'esempio se $R < |R_{\text{diff min}}|$ allora la spazzata prende tutta la curva altrimenti si vede come si viene a creare un ciclo di isteresi e non si riesce a vedere più un pezzo di curva, estremizzando se si fa una spazzata in corrente la regione a resistenza differenziale negativa non potrà mai essere esplorata (tantopiù che è instabile) sia che la si percorra in salita sia in discesa.

14.2 Circuito con diodo

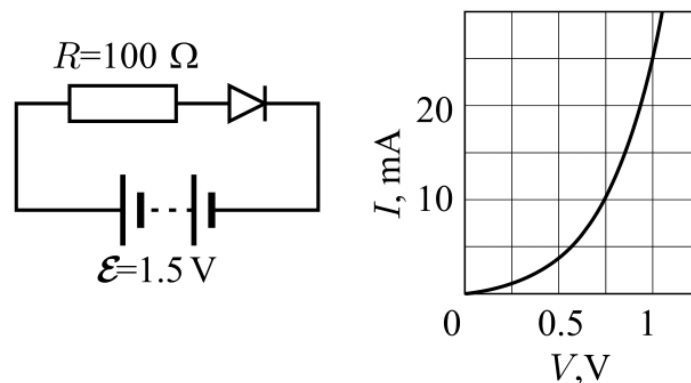


Figura 55: circuito e caratteristica $I - V$ di un diodo

L'equazione del circuito è $1.5 = 0.1I + V(I)$, cioè devo intersecare $V(I)$ con $V = 1.5 - 0.1I \rightarrow I = 15 - 10V, I(V)$. Tracciando la retta di carico del generatore con la resistenza sul grafico e andando vedere nel punto di intersezione si ricava una corrente $I = 8 \text{ mA}$. volendo usare un metodo più preciso, i diodi hanno la legge $I(V) = I_0(e^{kV} - 1)$; fittando su $V = 0.75 \text{ V}$, $V = 1 \text{ V}$ trovo $k = 3.485 \text{ V}^{-1}$, $I_0 = 0.791 \text{ mA}$ e intersecando con la retta ricavata precedentemente si ricava $I = 8.07 \text{ mA}$.

14.3 Amplificatore a diodo tunnel (EF2003)

Per questo problema si rimanda alla soluzione ufficiale delle olimpiadi estoni-fillandesi. [Testi gara](#)

14.4 Ribaltare una batteria

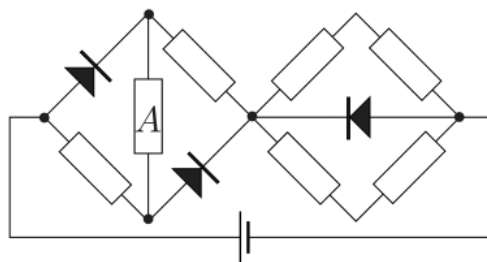


Figura 56

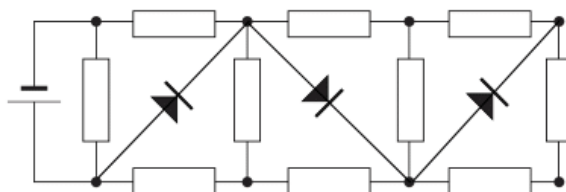


Figura 57

Figura 56

Con la polarità della batteria come in figura ci si convince abbastanza facilmente che i primi due diodi sono in conduzione e il terzo è interdetto (cioè non conduce), quindi semplificando il circuito mettendo gli opportuni cortocircuiti si ricava

$$P_G^+ = \frac{3}{4} \frac{V^2}{R} \quad P_A^+ = \frac{1}{16} \frac{V^2}{R}$$

ribaltando la batteria i ruoli si scambiano, quindi quelli che conducevano passano in interdizione e quelli interdetti vanno in conduzione quindi

$$P_G^- = \frac{1}{3} \frac{V^2}{R} \quad P_A^- = \frac{1}{9} \frac{V^2}{R}$$

prendendo i rapporti si ricava

$$\frac{P_G^-}{P_G^+} = 4 \quad \frac{P_A^-}{P_A^+} = \frac{16}{9}$$

Figura 57

Quando la polarità della batteria è come in figura il primo diodo è in conduzione (si vede per il teorema di non amplificazione delle tensioni) quindi

$$I_+ = \frac{2V}{R}$$

quando la polarità della batteria viene invertita il primo diodo passa in interdizione e il secondo inizia a condurre (applicando il teorema di Thevenin si riesce a ricondurre al caso precedente), quindi con un po di calcoli si ricava

$$I_- = \frac{7}{5} \frac{V}{R}$$

e prendendone il rapporto

$$\frac{P_G^-}{P_G^+} = \frac{VI_-}{VI_+} = \frac{7}{10}$$

14.5 Bipoli in serie

l'idea dato che sono in serie è di supporre di alimentare il circuito a corrente costante e di vedere tutte le possibili tensioni che può avere, dato che la caratteristica tensione corrente del singolo dipolo è composto da due rette parallele la caratteristica della serie saranno dei segmenti paralleli tra loro a pendenza dimezzata, l'unica cosa è capire gli estremi, se si fa tutto per ben si ricava un grafico come quello in figura 58 (si noti come si è venuto a formare un ciclo di isteresi) Per

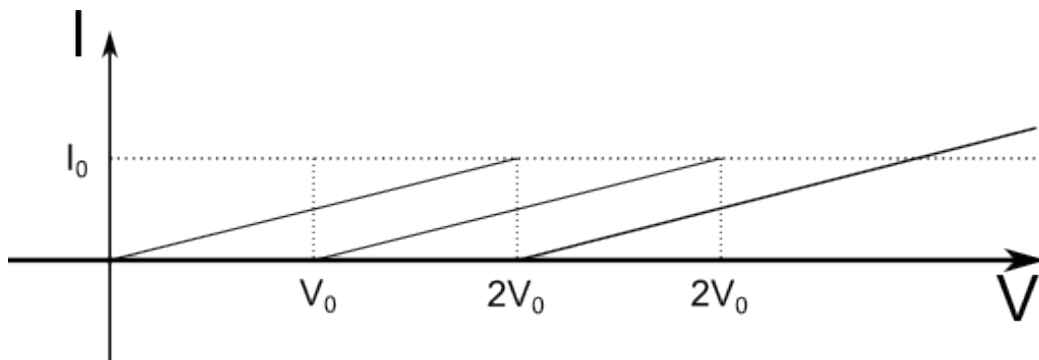


Figura 58: Caratteristica tensione corrente della serie

N bipoli messi in serie si procede allo stesso modo e si ricaverà un grafico simile solo con più segmenti.

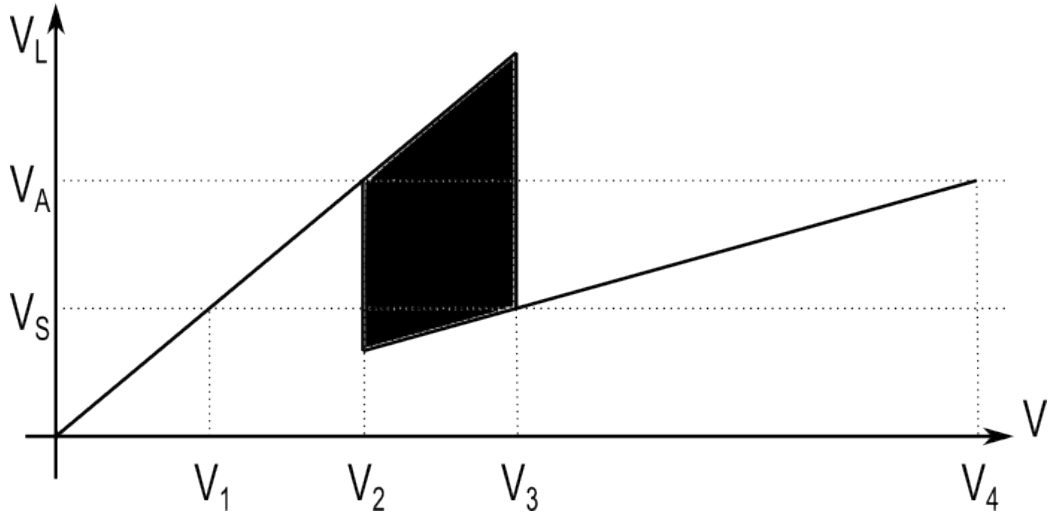


Figura 59: grafico $V - V_L$

14.6 Lampada a scarica

Prendiamo in riferimento la Figura 59, usando le formule del partitore di tensione si ricavano i seguenti valori

$$V_L = V \frac{R_L}{R_L + R} \quad V = V_L \left(1 + \frac{R}{R_L} \right)$$

$$V_1 = V_S \left(\frac{R}{R_S} + 1 \right) = 5 \text{ V} \quad V_2 = V_A \left(\frac{R}{R_S} + 1 \right) = 10 \text{ V}$$

$$V_3 = V_S \left(\frac{R}{R_A} + 1 \right) = 15 \text{ V} \quad V_4 = V_A \left(\frac{R}{R_A} + 1 \right) = 30 \text{ V}$$

I tre regimi sono

- $0 \div V_2$ La lampada rimane spenta perché $V_L < V_A$
- $V_2 \div V_3$ La lampada lampeggia perché se la lampada è spenta $V_L > V_A$ e quindi si accende, ma se la lampada è accesa $V_L < V_S$ e quindi si spegne
- $V_3 \div \infty$ La lampada rimane sempre accesa perché $V_L > V_S$

Se si vuole far scomparire la regione di oscillazione deve avvenire la condizione $V_3 \leq V_2$ quindi esplicitando i calcoli si ricava

$$\left(\frac{V_S}{R_A} - \frac{V_A}{R_S} \right) \frac{1}{V_A - V_S} \leq \frac{1}{R}$$

ma verificando che il fattore a sinistra è positivo si può riscrivere

$$R \leq \frac{V_A - V_S}{\frac{V_S}{R_A} - \frac{V_A}{R_S}} = 150 \Omega$$

Riferimenti bibliografici

- [HW15] Paul Horovitz and Hill Winfield. *The Art of Electronics*. Cambridge University Press, 2015.
- [Ste98] F.J. Steenwijk. Equivalent resistors of polyhedral resistive structures. *American Journal of Physics - AMER J PHYS*, 66:90–91, 01 1998.