

Meccanica 1

Giuseppe Bogna*, Edoardo Centamori†

5 febbraio 2018

Sommario

Lo scopo della lezione è approfondire alcuni aspetti della meccanica classica che vengono spesso tralasciati al liceo. In particolare, ci soffermeremo sui sistemi non inerziali, sulle coordinate polari e sferiche, e sul moto in un campo centrale.

1 Sistemi non inerziali

Consideriamo un vettore $\vec{v}$ di modulo costante ed eseguiamo su di esso una rotazione attorno ad un asse $\hat{n}$ di un angolo θ . La componente di $\vec{v}$ parallela a $\hat{n}$, ossia

$$\vec{v}_{\parallel} = (\vec{v} \cdot \hat{n})\hat{n}$$

è lasciata inalterata dalla trasformazione. Al contrario, la componente perpendicolare

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{\parallel}$$

è ruotata di un angolo θ e rimane nel piano perpendicolare ad $\hat{n}$. In particolare, se indichiamo con un apice i vettori dopo la rotazione si avrà

$$\vec{v}'_{\perp} = (\vec{v} - \vec{v}_{\parallel}) \cos \theta + (\hat{n} \times \vec{v}) \sin \theta$$

Di conseguenza il vettore ruotato sarà

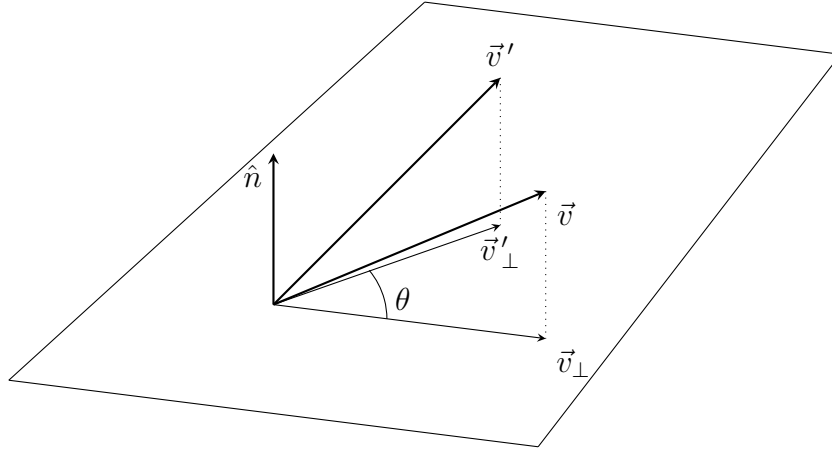
$$\vec{v}' = (\vec{v} \cdot \hat{n})\hat{n} + (\vec{v} - (\vec{v} \cdot \hat{n})\hat{n}) \cos \theta + (\hat{n} \times \vec{v}) \sin \theta$$

Supponiamo ora che un vettore $\vec{v}$ ruoti a velocità angolare ω (in generale dipendente dal tempo) attorno ad un asse $\hat{n}$. Se $d\theta = \omega dt$ è l'angolo infinitesimo di cui ruota $\vec{v}$, al primo ordine in dt abbiamo

$$\vec{v}(t+dt) = (\vec{v}(t) \cdot \hat{n})\hat{n} + (\vec{v}(t) - (\vec{v}(t) \cdot \hat{n})\hat{n}) + (\hat{n} \times \vec{v}(t))\omega dt = \vec{v}(t) + \omega(\hat{n} \times \vec{v}(t))dt$$

*giuseppe.bogna@sns.it

†edoardo.centamori@sns.it



Ossia

$$\frac{\vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

e al limite $dt \rightarrow 0$ si ha

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

La formula vale in generale per qualsiasi vettore di modulo costante¹.

Passiamo ora ai sistemi non inerziali. Per definizione, un sistema di riferimento è inerziale se in esso è valida la seconda legge di Newton. La classe dei sistemi di riferimento inerziali è caratterizzata dal fatto che questi si muovono con velocità relativa (*vettoriale*) costante. Tuttavia, è possibile studiare un particolare moto (e anzi, a volte è comodo) in un sistema di riferimento non inerziale. L'origine di un tale sistema è necessariamente accelerata rispetto a un qualunque sistema di riferimento inerziale. In particolare, possiamo classificare i sistemi non inerziali in tre famiglie distinte:

1. sistemi di riferimento che traslano con velocità non costante, sempre rispetto ad un sistema inerziale, mantenendo però sempre costanti le direzioni degli assi.
2. sistemi di riferimento che ruotano, mantenendo però l'origine centrata in un punto fisso rispetto ad un altro sistema inerziale.
3. sistemi che fanno entrambe le cose: in questo caso andremo a sovrapporre i due effetti.

¹Si veda [1]§10 per una trattazione completa dell'argomento.

Scegliamo ora un sistema di riferimento inerziale e studiamo il primo caso: siano $\vec{r}_0$ e $\vec{a}_0$ la posizione e l'accelerazione dell'origine del sistema non inerziale (che possono, ovviamente, variare nel tempo). Consideriamo un punto materiale con posizione $\vec{r}'$ e accelerazione $\vec{a}'$ rispetto al sistema inerziale e posizione $\vec{r}$ e accelerazione $\vec{a}$ rispetto al sistema non inerziale. Si osserva facilmente che

$$\vec{r}' = \vec{r}_0 + \vec{r}$$

$$\vec{a}' = \vec{a}_0 + \vec{a}$$

Se $\vec{F}$ è la forza totale agente sul corpo, sappiamo che

$$\vec{F} = m\vec{a}'$$

Dato che il primo sistema è inerziale. Di conseguenza otteniamo

$$m\vec{a} = \vec{F} - m\vec{a}_0$$

Possiamo quindi interpretare il termine $-m\vec{a}_0$ come un'ulteriore forza che agisce sul corpo.

Consideriamo ora un sistema rotante con origine coincidente con l'origine del sistema inerziale. Sia $\vec{\Omega}$ la velocità angolare (possibilmente non costante nel tempo) e prendiamo un vettore $\vec{V}$ generico

$$\vec{V} = V_x\hat{x} + V_y\hat{y} + V_z\hat{z}$$

I versori $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ sono solidali con gli assi del sistema ruotante, quindi ruotano anch'essi con velocità angolare $\vec{\Omega}$ rispetto al sistema inerziale. La derivata temporale di $\vec{V}$ nel sistema non inerziale è

$$\frac{\delta \vec{V}}{\delta t} = \dot{V}_x\hat{x} + \dot{V}_y\hat{y} + \dot{V}_z\hat{z}$$

dove la particolare notazione $\delta/\delta t$ viene usata per indicare la derivata temporale nel sistema non inerziale (ovvero, la derivata delle sole componenti di $\vec{V}$). Nel sistema inerziale i versori $\hat{x}, \hat{y}$ e $\hat{z}$ non sono fissi, dunque in questo sistema la derivata di $\vec{V}$ è

$$\begin{aligned} \dot{\vec{V}} &= \dot{V}_x\hat{x} + \dot{V}_y\hat{y} + \dot{V}_z\hat{z} + V_x\dot{\hat{x}} + V_y\dot{\hat{y}} + V_z\dot{\hat{z}} = \\ &= \dot{V}_x\hat{x} + \dot{V}_y\hat{y} + \dot{V}_z\hat{z} + \vec{\Omega} \times \vec{V} = \frac{\delta \vec{V}}{\delta t} + \vec{\Omega} \times \vec{V} \end{aligned}$$

In particolare, il termine contenente le derivate dei versori può essere espresso come $\vec{\Omega} \times \vec{V}$. La relazione precedente prende il nome di relazione di Poisson. Appliciamola alla posizione, alla velocità angolare:

$$\vec{v}' = \dot{\vec{r}}' = \frac{\delta \vec{r}}{\delta t} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

$$\dot{\vec{\Omega}} = \frac{\delta \vec{\Omega}}{\delta t} + \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} = \frac{\delta \vec{\Omega}}{\delta t}$$

Infine, applichiamo la relazione di Poisson alla velocità:

$$\begin{aligned} \vec{a}' = \dot{\vec{v}}' &= \frac{\delta \vec{v}}{\delta t} + \vec{\Omega} \times \vec{v} = \frac{\delta}{\delta t} \left(\frac{\delta \vec{r}}{\delta t} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \right) + \vec{\Omega} \times \left(\frac{\delta \vec{r}}{\delta t} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \right) = \\ &= \frac{\delta^2 \vec{r}}{\delta t^2} + \frac{\delta \vec{\Omega}}{\delta t} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times \frac{\delta \vec{r}}{\delta t} + \vec{\Omega} \times \frac{\delta \vec{r}}{\delta t} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = \\ &= \vec{a} + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio, sono state introdotte la velocità $\vec{v}$ e l'accelerazione $\vec{a}$ relative al sistema non inerziale. Se ora aggiungiamo anche la possibilità che l'origine del sistema non inerziale si sposti nel tempo rispetto a quella di quello inerziale, la seconda equazione del moto si riscrive in sistemi inerziali come

$$\vec{F} - m \left(\vec{a}_0 + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} \right) = m\vec{a}$$

I vari addendi che appaiono sono dette forze apparenti e sono delle forze che bisogna introdurre matematicamente per rendere valida $\vec{F} = m\vec{a}$ nei sistemi non inerziali. In altre parole, se vi trovate in questi ultimi percepirete degli effetti che non vedete normalmente e voi stessi li spiegherete intuitivamente come forze. In particolare

- Il termine $-m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$ è la forza centrifuga. Ad esempio, la avvertite quando fate una curva in macchina.
- Il termine $-2m\vec{\Omega} \times \vec{v}$ è la forza di Coriolis. Questo termine permette la nascita dei cicloni, e spiega anche perchè ruotano in sensi opposti su emisferi opposti.
- Il termine $-m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}$ è la forza azimutale. Ad esempio, se immaginate di trovarvi in una giostra che da ferma inizia ad accelerare, sentirete una forza che cercherà di farvi cadere da cavallo.
- Il termine $-m\vec{a}_0$ viene detta forza di trascinamento ed è responsabile della forza che vi schiaccia sui sedili di un aereo in fase di decollo.

Il termine centrifugo può essere riscritto espandendo il triplo prodotto. In generale, presi tre vettori $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$, si ha

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

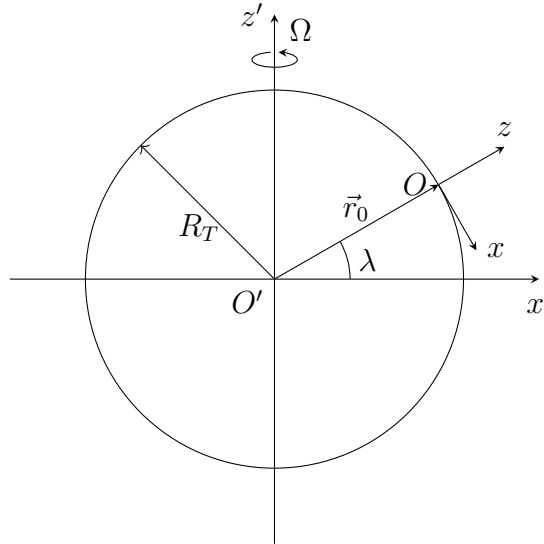
Di conseguenza, il termine centrifugo può essere riscritto come

$$\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = \vec{\Omega}(\vec{\Omega} \cdot \vec{r}) - \Omega^2 \vec{r}$$

Inoltre, spesso il moto studiato è confinato in un piano e la velocità angolare è ortogonale a tale piano. In questo caso, il termine centrifugo si semplifica ulteriormente ed è nell'usuale forma

$$\vec{a}_c = -\Omega^2 \vec{r}$$

Vediamo subito un problema per familiarizzare con quanto visto finora. Consideriamo un filo inestensibile, di massa trascurabile e lunghezza l molto minore del raggio terrestre R_T , alla cui estremità è appesa una massa puntiforme m . Il pendolo si trova a una latitudine λ sulla superficie della Terra ed è fissato nel punto O . Siano (x', y', z') il sistema di riferimento con origine O' nel centro della terra, asse z passante per il polo Nord e assi x e y sul piano equatoriale e (x, y, z) il sistema di riferimento con origine O , asse z in direzione radiale e assi x e y come in figura (l'asse y è entrante nel foglio).



Siano $\vec{g} = -g\hat{r}$ l'accelerazione di gravità in prossimità del suolo e $\vec{\Omega} = \Omega\hat{z}'$ la velocità angolare di rotazione della Terra, che possono essere assunte come

costanti. Supponiamo inoltre che $\Omega^2 \ll \omega^2 = g/l$ e che le oscillazioni del pendolo siano piccole, in modo da poter assumere $z = 0$ in tutto il problema. Indichiamo con $\vec{r}_0 \approx R_T \hat{z}$ la posizione a cui è fissato il pendolo rispetto al centro della Terra e con $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$ la posizione di m rispetto al sistema (x, y, z) . La forza apparente nel sistema (x', y', z') è

$$\vec{F}_{\text{app}} = -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times (\vec{r}_0 + x\hat{x} + y\hat{y})) - 2m\vec{\Omega} \times (\dot{\vec{r}}_0 + \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y})$$

Possiamo ignorare il termine centrifugo nell'ipotesi $\Omega \ll \omega$. Inoltre, nel sistema (x, y, z) si ha

$$\vec{\Omega} = \Omega(-\cos \lambda \hat{x} + \sin \lambda \hat{z})$$

Di conseguenza la forza di Coriolis è l'unico termine significativo nella forza apparente. Sviluppando i calcoli e trascurando la componente lungo $\hat{z}$ otteniamo

$$\vec{F}_{\text{app}} = -2m\Omega \sin \lambda (\dot{x}\hat{y} - \dot{y}\hat{x})$$

Sulla massa m agiscono la forza peso e la reazione vincolare, ossia

$$\vec{F} = -mg\hat{z} + \vec{T} = -m\omega^2(x\hat{x} + y\hat{y})$$

Il secondo passaggio si ottiene grazie all'ipotesi sulle le piccole oscillazioni. L'equazione del moto è quindi

$$m(\ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y}) = 2m\Omega \sin \lambda (\dot{x}\hat{y} - \dot{y}\hat{x}) - m\omega^2(x\hat{x} + y\hat{y})$$

Proiettando lungo gli assi si ottengono infine le equazioni del moto

$$m\ddot{x} = 2m\Omega \sin \lambda \dot{y} - m\omega^2 x \quad (1)$$

$$m\ddot{y} = -2m\Omega \sin \lambda \dot{x} - m\omega^2 y \quad (2)$$

Introduciamo ora la variabile complessa $\xi = x + iy$. Moltiplicando la (2) per i e sommandola alla (1) si ottiene

$$\ddot{\xi} + 2i\Omega \sin \lambda \dot{\xi} + \omega^2 \xi = 0 \quad (3)$$

Si verifica che l'equazione precedente ha come soluzione

$$\xi(t) = \xi_0 \sin(\omega t) e^{i\Omega t \sin \lambda}$$

Ritornando alle grandezze reali

$$x(t) = \Re(\xi(t)) = \xi_0 \sin \omega t \cos(\Omega t \sin \lambda)$$

$$y(t) = \Im(\xi(t)) = \xi_0 \sin \omega t \sin(\Omega t \sin \lambda)$$

Concludiamo quindi che il moto sul piano xy è la sovrapposizione di un'oscillazione armonica di frequenza ω e di una rotazione intorno all'asse z di frequenza $\Omega \sin \lambda$. Ad esempio, in figura 1 è riportata l'orbita per $\omega = 27\Omega$. Per $\lambda \simeq 48^\circ$ (latitudine di Parigi) si ottiene $2\pi/\Omega \sin \lambda \simeq 32$ h, in accordo con quanto osservato da Foucault.

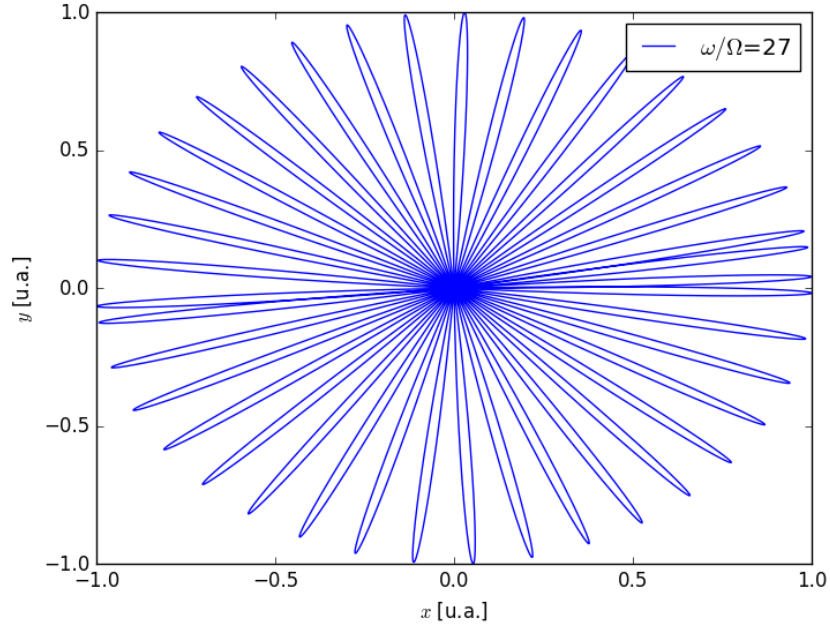


Figura 1: Orbita del pendolo di Foucault

2 Vettori e coordinate

Consideriamo un sistema di riferimento in cui sono state introdotte delle coordinate cartesiane. In tale sistema, è facile scrivere la posizione e la velocità di un punto materiale

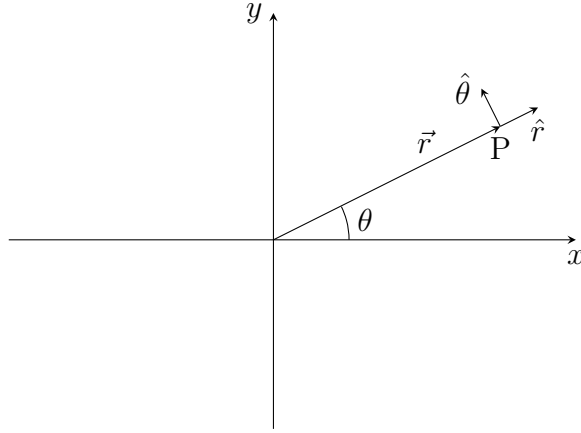
$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}$$

La semplicità nell'esempio precedente è dovuta al fatto che i tre versori $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$ non variano nel tempo. Ci sono però molti casi in cui le coordinate cartesiane sono poco utili: per questo motivo si introducono altri sistemi di coordinate. Quelli più usati sono le coordinate polari e le coordinate sferiche.

2.1 Coordinate polari

Consideriamo un punto P nel piano e introduciamo i versori $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$, come nella figura successiva



Il versore $\hat{r}$ ha la stessa direzione e lo stesso verso del vettore posizione $\vec{r}$, mentre $\hat{\theta}$ è ortogonale a quest'ultimo. Di conseguenza, si ha

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

Inoltre, i versori $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ possono anche essere scritti in coordinate cartesiane

$$\hat{r} = \hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta \quad (4)$$

$$\hat{\theta} = -\hat{x} \sin \theta + \hat{y} \cos \theta \quad (5)$$

Il calcolo della velocità è più complesso del caso in coordinate cartesiane. Infatti, in questo caso $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ variano nel tempo. Di conseguenza, si avrà

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}}$$

Possiamo derivare la (4) e la (5) per risolvere il problema. Si ha

$$\dot{\hat{r}} = -\hat{x}\dot{\theta} \sin \theta + \hat{y}\dot{\theta} \cos \theta = \dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -\hat{x}\dot{\theta} \cos \theta - \hat{y}\dot{\theta} \sin \theta = -\dot{\theta}\hat{r}$$

di conseguenza si ha

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

Notiamo che l'ultimo termine è la classica velocità tangenziale. Nel calcolo di $\vec{v}$ non è strettamente necessario conoscere $\dot{\hat{\theta}}$, ma tale risultato viene utilizzato nel calcolo dell'accelerazione. Infatti, derivando ulteriormente $\vec{v}$ si ottiene

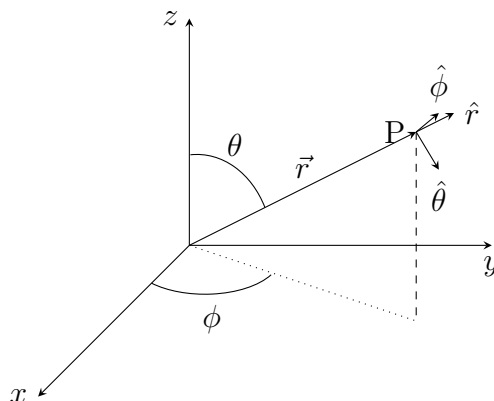
$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

Alternativamente, è possibile utilizzare il teorema di Poisson per calcolare $\dot{\hat{r}}$ e $\dot{\hat{\theta}}$. Ci si convince facilmente che per le coordinate polari la velocità angolare è $\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{z}$.

Le coordinate polari si estendono in maniera naturale allo spazio tridimensionale. In tal caso si parla di coordinate cilindriche, che consistono in un sistema di coordinate polari sul piano xy e della coordinata cartesiana z sull'asse ortogonale a tale piano.

2.2 Coordinate sferiche

Consideriamo un punto P nello spazio e fissiamo una terna di assi ortonormali. Indichiamo con θ l'angolo tra il vettore posizione $\vec{r}$ di P e l'asse polare z (ovvero θ è la colatitudine) e con ϕ l'angolo tra la proiezione di $\vec{r}$ sul piano xy e l'asse x (ovvero ϕ è la longitudine).



In questo caso $\hat{r}$ è parallelo a $\vec{r}$, $\hat{\theta}$ è ortogonale a $\hat{r}$ e giace nel piano contenente $\vec{r}$ e $\hat{z}$, mentre l'ultimo versore $\hat{\phi}$ può essere definito come $\hat{\phi} = \hat{r} \times \hat{\theta}$. Anche qui la posizione è

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

mentre i tre versori in coordinate cartesiane sono

$$\hat{r} = \hat{x} \sin \theta \cos \phi + \hat{y} \sin \theta \sin \phi + \hat{z} \cos \theta$$

$$\hat{\theta} = \hat{x} \cos \theta \cos \phi + \hat{y} \cos \theta \sin \phi - \hat{z} \sin \theta$$

$$\hat{\phi} = -\hat{x} \sin \phi + \hat{y} \cos \phi$$

Il calcolo della velocità è analogo al caso delle polari, anche se più laborioso nei calcoli. Si ottiene

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi}$$

Il calcolo dell'accelerazione è oltremodo ostico, e viene qui tralasciato².

²Per completezza, in questo caso la velocità angolare richiesta dal teorema di Poisson è $\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{z} + \dot{\theta}\hat{\phi}$. La forma di $\vec{\omega}$ e il principio di sovrapposizione permettono di interpretare il moto come sovrapposizione di un moto radiale e di due moti circolari: questa osservazione è utile per ricordare la velocità e l'accelerazione in queste coordinate.

3 Moto in campo centrale

3.1 Moto di una particella

Consideriamo un campo di forze $\vec{F}(\vec{r})$. Tale campo si dice centrale se si può scrivere nella forma

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\hat{r}$$

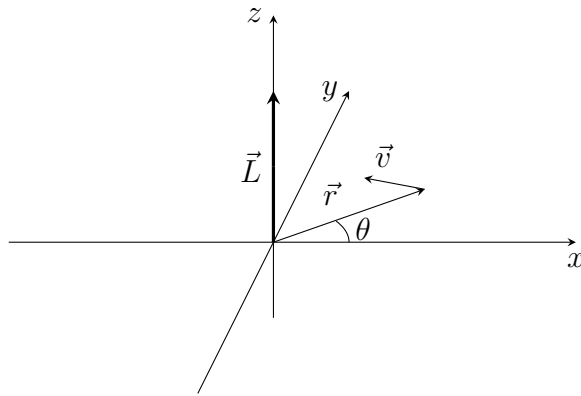
cioè se in ogni punto è radiale e se il modulo della forza dipende unicamente dalla distanza dall'origine. Si mostra abbastanza facilmente che un campo centrale è sempre conservativo, ovvero l'integrale di linea di $\vec{F}$ lungo una curva chiusa è sempre nullo³. Di conseguenza è possibile definire un potenziale V per $\vec{F}$. Anche V dipende unicamente da r e si ha

$$f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

Vogliamo ora studiare il moto di un punto materiale di massa m in un campo centrale. Per quanto abbiamo appena detto, l'energia meccanica E è una costante del moto. Inoltre, il momento torcente agente sul corpo è banalmente

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{r} \times \hat{r} = 0$$

Quindi anche il momento angolare $\vec{L}$ è una costante del moto. Ciò significa che, istante per istante, la posizione $\vec{r}$ e la velocità $\dot{\vec{r}}$ si trovano sul piano ortogonale alla retta su cui giace $\vec{L}$. Dato che tale piano non ruota o trasla nel tempo, possiamo ben definire il piano dell'orbita. Fissiamo quindi un sistema di riferimento in cui il versore $\hat{z}$ coincide con $\hat{L}$, mentre la posizione e la velocità del corpo giacciono sul piano xy , e introduciamo un sistema di coordinate polari.



³Intuitivamente, presa una qualunque curva γ l'integrale di linea $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l}$ dipende unicamente dallo spostamento radiale, dato che $\vec{F}$ è diretto radialmente. In particolare, se γ è chiusa segue subito $\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$.

In tale sistema l'energia e il momento angolare si scrivono come

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r)$$

$$\vec{L} = mr^2\dot{\theta}\hat{z} = L\hat{z}$$

Possiamo quindi riscrivere l'energia nella forma

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r)$$

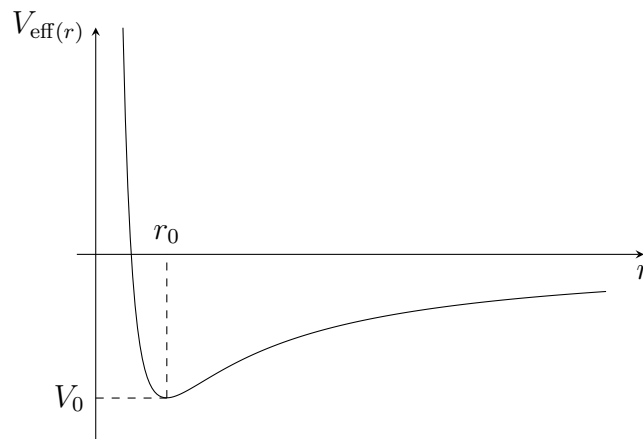
In tale forma l'energia dipende unicamente dalla coordinata r e dalla sua derivata, quindi siamo riusciti a ricondurre il moto in campo centrale allo studio di un moto unidimensionale, che in genere sappiamo trattare abbastanza facilmente. Inoltre abbiamo definito il potenziale efficace come

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

E questo ha un ruolo del tutto analogo all'energia potenziale nel moto unidimensionale. Ad esempio, per un potenziale newtoniano del tipo

$$V = -\frac{k}{r}$$

dove $k > 0$ è una costante opportunamente dimensionata, il grafico del potenziale efficace è



Dato che E rimane costante in tutto il moto e dato che l'energia cinetica è sempre non negativa, il corpo può raggiungere solamente i punti in cui $V_{\text{eff}} \leq E$. In particolare, notiamo che esiste un valore r_0 per cui il potenziale efficace assume un valore minimo negativo V_0 : se si ha $E = V_0$, necessariamente $\dot{r} = 0$,

ossia l'orbita è circolare. Se invece si ha $V_0 < E < 0$, esistono due punti $r_{\min}$ e $r_{\max}$ in cui $V = E$: il moto è limitato tra questi valori estremi di r . Infine, se $E \geq 0$ il corpo può raggiungere una distanza qualsiasi dal centro, quindi il moto non è limitato.

Deriviamo ora l'energia rispetto al tempo per ottenere l'equazione del moto

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

Nella maggior parte delle situazioni l'equazione scritta in tale forma non è trattabile in maniera agevole, e anzi ci piacerebbe trovare una forma più semplice per l'equazione del moto. A tale scopo, introduciamo la variabile $u = r^{-1}$. Utilizzando la regola per la derivata della funzione composta e ricordando $L = mr^2\dot{\theta}$, si ottiene

$$\dot{r} = \frac{\partial r}{\partial \theta} \dot{\theta} = \frac{\partial r}{\partial \theta} \frac{L}{mr^2}$$

Osserviamo inoltre che si ha

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \theta}$$

Di conseguenza otteniamo l'espressione

$$\dot{r} = -\frac{L}{m} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

Possiamo derivare ancora una volta rispetto al tempo, ottenendo

$$\ddot{r} = -\frac{L}{m} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \dot{\theta} = -\left(\frac{L}{m}\right)^2 u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

Infine, inserendo tale espressione nell'equazione del moto si ottiene un'equazione per l'orbita, nota come formula di Binet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + u = \frac{mr^2}{L^2} \frac{\partial V}{\partial r}$$

In genere, se si conosce il potenziale V la formula di Binet permette di ricavare agevolmente l'orbita. Se consideriamo nuovamente un potenziale gravitazionale, l'equazione di Binet ci dà

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + u = \frac{mk}{L^2}$$

L'equazione precedente è analoga all'equazione del moto di un oscillatore armonico di frequenza unitaria, a cui viene aggiunta una forza esterna costante. La soluzione è quindi della forma

$$u(\theta) = \frac{mk}{L^2} + A \cos \theta$$

dove A è un'opportuna costante, dipendente dalle condizioni iniziali⁴. Allora avremo

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

per opportune costanti r_0 e ε . Passando ora in coordinate cartesiane otteniamo

$$(1 - \varepsilon^2)x^2 + y^2 + 2\varepsilon r_0 x = r_0^2$$

Dunque l'orbita è una conica di eccentricità ε . In particolare avremo una circonferenza per $\varepsilon = 0$, un'ellisse per $0 < \varepsilon < 1$, una parabola per $\varepsilon = 1$ e un'iperbole per $\varepsilon > 1$. Tramite la conservazione dell'energia si può anche mostrare che

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$$

In particolare otteniamo nuovamente il risultato che lega la forma dell'orbita al segno dell'energia meccanica. Per una discussione più dettagliata, si veda [2]§3 e [3]§15.

3.2 Problema dei due corpi

Finora abbiamo trattato il moto di un singolo corpo in campo centrale. Cosa accade invece se abbiamo due corpi di masse m_1 e m_2 che interagiscono con un potenziale che dipende unicamente dalla loro distanza reciproca? Indichiamo con $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ le posizioni dei due corpi, con $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ la distanza tra essi. L'energia e il momento angolare sono allora

$$E = \frac{1}{2}m_1|\dot{\vec{r}}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\dot{\vec{r}}_2|^2 + V(r)$$

$$\vec{L} = m_1\vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1 + m_2\vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2$$

Se introduciamo la massa totale e la posizione del centro di massa, che sono rispettivamente

$$M = m_1 + m_2$$

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M}$$

⁴A rigore, la soluzione dell'equazione del moto è

$$u(\theta) = \frac{mk}{L^2} + A \cos(\theta + \theta_0)$$

Non è però restrittivo supporre $\theta_0 = 0$, dato che possiamo scegliere sempre gli assi cartesiani sul piano dell'orbita in modo che $\theta(0) = 0$.

Le equazioni precedenti si riscrivono come

$$E = \frac{1}{2}M|\dot{\vec{R}}|^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}|\dot{\vec{r}}|^2 + V(r)$$

$$\vec{L} = M\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

Dato che sul sistema non agiscono forze esterne, possiamo spostarci nel sistema del centro di massa, in cui $\vec{R} = 0$ e $\dot{\vec{R}} = 0$. In questo sistema il moto delle due masse è del tutto equivalente al moto di un'unica massa μ nello stesso potenziale centrale. Tale massa viene detta massa ridotta, e vale ovviamente

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$$

Riferimenti bibliografici

- [1] D. Morin, *Introduction to Classical Mechanics*
- [2] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, *Classical Mechanics*
- [3] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Fisica Teorica. Volume 1: Meccanica*

4 Problemi

Problema 4.1. Consideriamo un corpo puntiforme di massa m soggetto a una forza

$$\vec{F} = \alpha \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

Dove α è una costante opportunamente dimensionata.

1. Dimostrare che il modulo della velocità è una costante del moto.
2. Dimostrare che la grandezza

$$\vec{Q} = m\vec{r} \times \vec{v} - \alpha \frac{\vec{r}}{r}$$

è una costante del moto.

Scegliamo ora un sistema di coordinate sferiche (r, θ, ϕ) con $\hat{Q}$ versore dell'asse polare.

3. Calcolare $\vec{Q} \cdot \hat{\phi}$ e mostrare che anche θ è una costante del moto. Di conseguenza, m si muove lungo la superficie un cono.
4. Calcolare $\vec{Q} \cdot \hat{r}$ e $|\vec{Q}|$.
5. Calcolare $\vec{Q} \cdot \hat{\theta}$ e mostrare che

$$\dot{\phi} = \frac{k}{r^2}$$

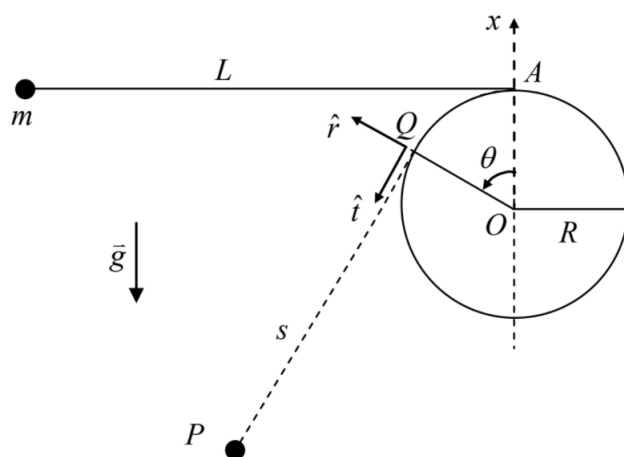
Determinare inoltre la costante k .

6. Determinare $r(\phi)$. (Suggerimento: scrivere esplicitamente v^2 e un'opportuna equazione differenziale della forma $dr/d\phi = f(r)$).

Formule utili:

- $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$
- La derivata di un versore è ortogonale al versore stesso, in particolare $\dot{\hat{r}} \cdot \hat{r} = 0$.
- $\frac{d}{dx} \sec^{-1} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Problema 4.2 (IPhO 2003). Un cilindro di raggio R è mantenuto fisso in posizione orizzontale. Una corda di lunghezza $L > 2\pi R$ e massa trascurabile è fissata al punto A , mentre all'estremità libera si trova un punto materiale di massa m . Il punto materiale viene sollevato fino a che non si trova alla stessa altezza del punto A , a distanza L da quest'ultimo, per poi venir rilasciato con velocità iniziale nulla. L'accelerazione di gravità è $\vec{g} = -g\hat{x}$. Sia O l'origine



del sistema di riferimento in figura. Quando il punto materiale si trova in P , la corda è tangente al cilindro nel punto Q . Siano s la lunghezza del segmento PQ e θ l'angolo compreso tra i segmenti AO e OQ , preso in senso antiorario. I versori radiale e tangente sono indicati rispettivamente con $\hat{r}$ e $\hat{t}$. In funzione delle quantità finora elencate, trovare:

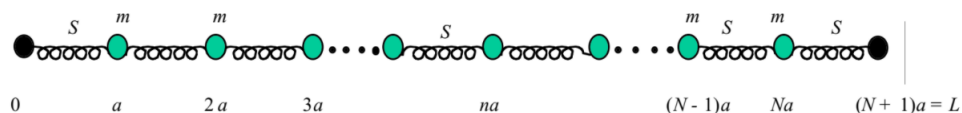
1. La relazione tra $\dot{\theta}$ e $\dot{s}$.
2. La velocità $\vec{v}_Q$ del punto Q rispetto a O .
3. La velocità $\vec{v}'$ di m relativa al punto Q .
4. La velocità $\vec{v}$ di m relativa all'origine.
5. La componente lungo $\hat{t}$ dell'accelerazione di m relativa a O .
6. L'energia potenziale gravitazionale di m .
7. La velocità v_m di m nel punto più basso della sua traiettoria.

Consideriamo ora il caso in cui il rapporto L/R è

$$\frac{L}{R} = \frac{9\pi}{8} + \frac{2}{3} \cot \frac{\pi}{16} \simeq 6.886$$

8. Qual è la velocità v_s di m quando il tratto di corda tra Q e P è ancora teso e ha lunghezza minima, in funzione di g e R ? Può essere utile studiare graficamente le equazioni ottenute.

Problema 4.3 (APhO 2002). Consideriamo un numero molto grande N di particelle identiche di massa m disposte su una retta e collegate con $N + 1$ molle identiche di massa trascurabile, costante elastica k e lunghezza a riposo a .



In generale, il moto della catena così ottenuta è assai complicato, ma può essere scomposto nella sovrapposizione di N oscillazioni armoniche, chiamate modi di oscillazione, ciascuna con una frequenza caratteristica di oscillazione.

1. Scrivere l'equazione del moto per l' n -esima particella.

Si può risolvere il set di equazioni precedenti cercando per l' n -esima particella una soluzione della forma

$$x_n(\omega, t) = A \sin(nka) \cos(\omega t + \alpha)$$

Dove ω è la frequenza del modo di oscillazione e A, k, α opportune costanti. k è detto numero d'onda e per ogni k esiste una corrispondente frequenza ω . La funzione $\omega(k)$ è detta relazione di dispersione. Tuttavia, non tutti i valori di k sono compatibili con il moto del sistema.

2. Trovare la relazione di dispersione e i valori possibili di k .

L'energia di un fotone di frequenza ω è $E = \hbar\omega$, dove $\hbar$ è la costante di Planck ridotta. Einstein assunse che anche un modo di oscillazione di un cristallo ha la stessa energia. In particolare, un modo di vibrazione può essere visto in maniera analoga a un fotone ed è anche chiamato fonone. Consideriamo ora un cristallo formato da un numero molto grande di particelle disposte in una catena lineare, in maniera analoga a quanto visto prima. Per una certa frequenza ω (o equivalentemente per un certo numero d'onda k) può esistere o meno un fonone, o ne può esistere più di uno. Vogliamo quindi calcolare

l'energia media $\langle E(\omega) \rangle$ di un certo modo di oscillazione di frequenza ω . Sia $P_p(\omega)$ la probabilità di avere p fononi con frequenza ω . L'energia cercata è allora semplicemente

$$\langle E(\omega) \rangle = \frac{\sum_{p=0}^{\infty} p \hbar \omega P_p(\omega)}{\sum_{p=0}^{\infty} P_p(\omega)}$$

Nonostante i fononi siano discreti, la somma è estesa fino a $p = \infty$ perchè, nelle nostre ipotesi, il loro numero è molto grande e $P_p(\omega)$ decresce rapidamente all'aumentare di p . Infatti, grazie alla statistica di Boltzmann sappiamo che

$$P_p(\omega) \propto e^{-\frac{p \hbar \omega}{kT}}$$

Dove k è la costante di Boltzmann e T la temperatura assoluta del cristallo, mentre la costante di proporzionalità è indipendente da p .

3. Calcolare $\langle E(\omega) \rangle$.

Ora siamo interessati a calcolare l'energia totale E_T del cristallo. Per fare ciò, dobbiamo moltiplicare $\langle E(\omega) \rangle$ per il numero di modi di oscillazione con frequenza ω e poi fare la somma su tutti i possibili valori di ω .

4. Consideriamo un intervallo Δk di numeri d'onda. Nell'approssimazione di numero di particelle molto grande, e supponendo che Δk sia molto più ampio della differenza tra due valori consecutivi di k , quanti modi di oscillazione si trovano nell'intervallo Δk ?
5. Con queste approssimazioni, è possibile sostituire le somme con integrali su ω . Ricavare un'espressione per E_T , senza cercare di valutarla esplicitamente.

Formule utili:

- $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ se $|x| < 1$

Problema 4.4. Consideriamo tre corpi puntiformi di masse m_1, m_2, m_3 che interagiscono solo tramite forze gravitazionali. Supponiamo che i corpi si muovano lungo orbite circolari. Quali sono le rispettive velocità angolari?

Problema 4.5. Consideriamo un satellite di massa m che si muove in un'orbita circolare R intorno alla terra. All'istante $t = 0$, una perturbazione imprime al satellite una velocità radiale v molto piccola. Mostrare che l'orbita perturbata è stabile e trovare la frequenza delle piccole oscillazioni intorno all'orbita non perturbata. Quale condizione deve soddisfare v per essere considerata piccola?

Problema 4.6. Consideriamo il moto di una massa m in un campo centrale descritto dal potenziale

$$V(r) = V_0 \frac{r^n}{a^n}$$

Dove V_0 e a sono opportune costanti. Per quali valori di n un'orbita circolare di raggio R è stabile per piccole perturbazioni radiali?

Problema 4.7. Un pianeta di massa m si muove in un potenziale newtoniano perturbato

$$V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{\varepsilon}{r^2}$$

Dove ε è una costante sufficientemente piccola. Supponiamo inizialmente $\varepsilon = 0$.

1. Mostrare che il vettore

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - mk \frac{\vec{r}}{r}$$

è una costante del moto.

2. Mostrare che $\vec{A}$ giace sul piano dell'orbita.
3. Mostrare che $\vec{A}$ punta al perielio dell'orbita.

Supponiamo ora $\varepsilon \neq 0$.

4. Quanto precede l'orbita?

Problema 4.8. Una stella sferica di massa M e raggio R si muove con velocità v relativamente al mezzo interstellare. Il mezzo interstellare, nelle regioni lontane dalla stella, è formato da particelle ferme di massa $m \ll M$ con densità numerica per unità di volume n . Supponiamo che ogni particella che urti con la stella venga assorbita da quest'ultima. Supponiamo all'inizio che tutte le interazioni gravitazionali siano trascurabili.

1. Calcolare $\dot{M}$.

Supponiamo ora che le particelle del mezzo interstellare risentano della forza di gravità della stella, mentre continuiamo a trascurare le interazioni gravitazionali tra le particelle e gli urti tra queste.

2. Calcolare $\dot{M}$.
3. (Bonus) Dare un'espressione integrale per la forza di "attrito" agente sulla stella.

In tutto il problema supporre che valga

$$\frac{\dot{M}}{M} \ll \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$$

che equivale a richiedere che il tempo impiegato da una particella per essere assorbita sia molto minore della "costante di tempo" della massa stellare.

5 Soluzioni

Soluzione 5.1. Questo problema è un riadattamento del problema 5.43 di *Introduction to electrodynamics* di Griffiths. In particolare, il problema originale studiava il moto di una carica elettrica nel campo di un ipotetico monopolo magnetico.

1. Detta K l'energia cinetica, si ha $\dot{K} = \vec{F} \cdot \vec{v}$. Dato che $\vec{F}$ e $\vec{v}$ sono ortogonali, K (e di conseguenza $|\vec{v}|$) si conserva.
2. Derivando rispetto al tempo si ottiene

$$\dot{\vec{Q}} = m\vec{v} \times \vec{v} + m\vec{r} \times \vec{a} - \alpha \frac{\vec{v}}{r} + \alpha \frac{\vec{r}}{r^2} = \frac{\alpha}{r^3} \vec{r} \times (\vec{v} \times \vec{r}) - \alpha \frac{\vec{v}}{r} + \alpha \frac{\vec{r}}{r^2} \dot{r}$$

Usando l'identità vettoriale suggerita si ottiene

$$\dot{\vec{Q}} = \frac{\alpha}{r^3} [\vec{v}r^2 - \vec{r}(\vec{v} \cdot \vec{r})] - \alpha \frac{\vec{v}}{r} + \alpha \frac{\vec{r}}{r^2} \dot{r} = \frac{\alpha \vec{r}}{r^2} \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{r} - \dot{r} \right)$$

A questo punto, si ha

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

Dato che $\dot{\hat{r}} \cdot \hat{r} = 0$, si ottiene

$$\vec{v} \cdot \hat{r} = \dot{r}$$

Dunque $\dot{\vec{Q}} = 0$, e $\vec{Q}$ è una costante del moto.

3. Dato che $\vec{Q}$ è lungo l'asse polare, si ha $\vec{Q} \cdot \hat{\phi} = 0$. D'altro canto usando l'espressione di $\vec{Q}$ si ha

$$\vec{Q} \cdot \hat{\phi} = m(\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \hat{\phi} - \alpha \hat{r} \cdot \hat{\phi} = -m(\vec{r} \times \hat{\phi}) \cdot \vec{v} = mr\dot{\theta} \cdot \vec{v} = mr^2\dot{\theta}$$

Si ricava $\dot{\theta} = 0$, ossia θ è costante durante il moto.

4. Si ha

$$\vec{Q} \cdot \hat{r} = -\alpha$$

D'altro canto $\vec{Q} \cdot \hat{r} = |\vec{Q}| \cos \theta$, quindi

$$|\vec{Q}| = -\frac{\alpha}{\cos \theta}$$

5. Si ha

$$\vec{Q} \cdot \hat{\theta} = m(\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \hat{\theta} = -m(\vec{r} \times \hat{\theta}) \cdot \vec{v} = -mr\dot{\phi} \cdot \vec{v} = -mr^2 \sin \theta \dot{\phi}$$

D'altro canto $\vec{Q} \cdot \hat{\theta} = -|\vec{Q}| \sin \theta$, e usando il punto precedente si ottiene

$$\dot{\phi} = -\frac{\alpha}{mr^2 \cos \theta}$$

$$k = -\frac{\alpha}{m \cos \theta}$$

6. Abbiamo

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 = \dot{r}^2 + \sin^2 \theta \frac{k^2}{r^2}$$

Usando la derivazione della composta si ha inoltre

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\phi} \dot{\phi} = \frac{dr}{d\phi} \frac{k}{r^2}$$

Allora si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\phi} &= r \sqrt{\frac{v^2 r^2}{k^2} - \sin^2 \theta} \\ \phi - \phi_0 &= \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r' \sqrt{\frac{v^2 r'^2}{k^2} - \sin^2 \theta}} = \frac{1}{\sin \theta} \left(\sec^{-1} \frac{vr}{k \sin \theta} - \sec^{-1} \frac{vr_0}{k \sin \theta} \right) \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$r(\phi) = \frac{k \sin \theta}{v \cos((\phi - \phi_0) \sin \theta + \sec^{-1}(vr_0/k \sin \theta))}$$

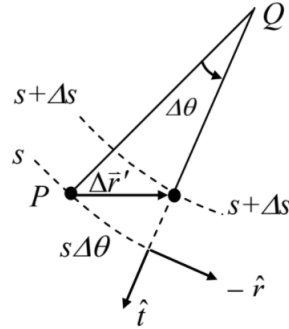
Soluzione 5.2. Questo problema viene proposto appositamente per conoscere meglio i vettori, pertanto in alcuni punti proponiamo la soluzione ufficiale e una soluzione che sfrutta i risultati sulle coordinate polari.

1. Da semplici considerazioni geometriche si ottiene $s + R\theta = L$, quindi derivando rispetto al tempo

$$\dot{s} + R\dot{\theta} = 0$$

2. Rispetto ad O , il punto Q si muove su una circonferenza di raggio R , di conseguenza

$$\vec{v}_Q = R\dot{\theta}\hat{t}$$



3. Come si nota dalla figura successiva, in un tempo Δt il punto si sposta rispetto a Q di

$$\Delta \vec{r}' = -s\Delta\theta \hat{r} + \Delta s \hat{t} = (-s\dot{\theta} \hat{r} + \dot{s} \hat{t}) \Delta t$$

Di conseguenza si ha

$$\vec{v}' = -s\dot{\theta} \hat{r} + \dot{s} \hat{t}$$

Soluzione alternativa: la posizione di P rispetto a Q è

$$\vec{r}' = s \hat{t}$$

Di conseguenza si ha

$$\vec{v}' = \dot{\vec{r}}' = \dot{s} \hat{t} - s\dot{\theta} \hat{r}$$

4. Si ha

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_Q = -s\dot{\theta} \hat{r}$$

Soluzione alternativa: questo risultato seguiva immediatamente scrivendo la posizione di P rispetto ad O

$$\vec{r} = R \hat{r} + s \hat{t}$$

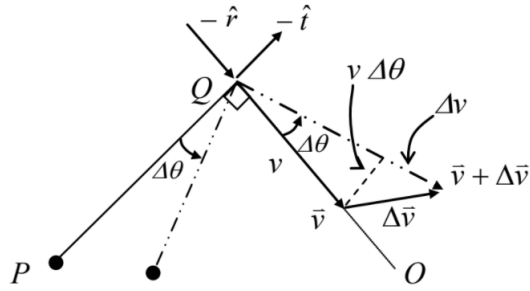
e derivando rispetto al tempo.

5. La componente lungo $\hat{t}$ della variazione di velocità $\Delta \vec{v}$ in un intervallo Δt è data da

$$\Delta \vec{v} \cdot \hat{t} = -v\dot{\theta} \Delta t$$

Di conseguenza, dato che $v = s\dot{\theta}$ per il punto precedente, la componente tangenziale dell'accelerazione è

$$\vec{a} \cdot \hat{t} = -s\dot{\theta}^2$$



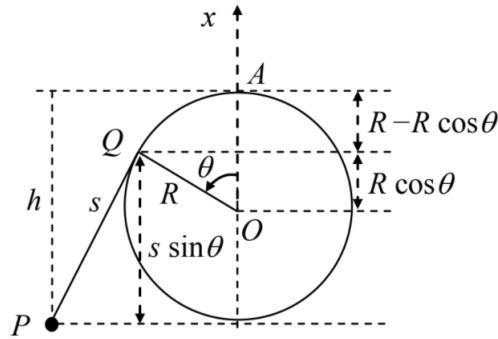
Soluzione alternativa: derivando $\vec{v}_P$ si ottiene

$$\vec{a}_P = -\dot{s}\theta\hat{r} - s\ddot{\theta}\hat{r} - s\dot{\theta}^2\hat{t}$$

L'ultimo termine è la componente tangenziale cercata.

6. Osservando la figura, si ottiene

$$U = -mgh = -mg[R(1 - \cos \theta) + s \sin \theta]$$



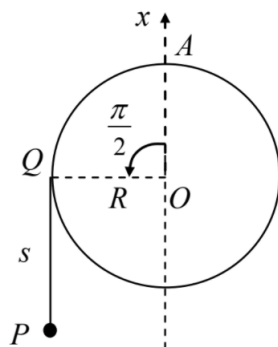
Soluzione alternativa: più semplicemente, si può scrivere

$$U = mgr\vec{r} \cdot \hat{x} - mgR$$

Avendo notato che, se si orienta l'asse y verso destra, si ha

$$\hat{r} = \hat{x} \cos \theta - \hat{y} \sin \theta$$

$$\hat{t} = -\hat{x} \sin \theta - \hat{y} \cos \theta$$



7. Se θ_m è l'angolo in corrispondenza del quale la particella si trova più in basso, allora si deve avere

$$\left. \frac{dU}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_m} = 0$$

Con semplici conti si ottiene

$$\frac{dU}{d\theta} = -mgs \cos \theta$$

Di conseguenza deve essere $\theta_m = \pi/2$. La velocità si trova allora dalla conservazione dell'energia

$$v_m = \sqrt{\frac{2U(\theta_m)}{m}} = \sqrt{2g \left(R + L - \frac{\pi R}{2} \right)}$$

8. L'energia è ancora una costante del moto, e ricordando $v = s\dot{\theta}$ si ha

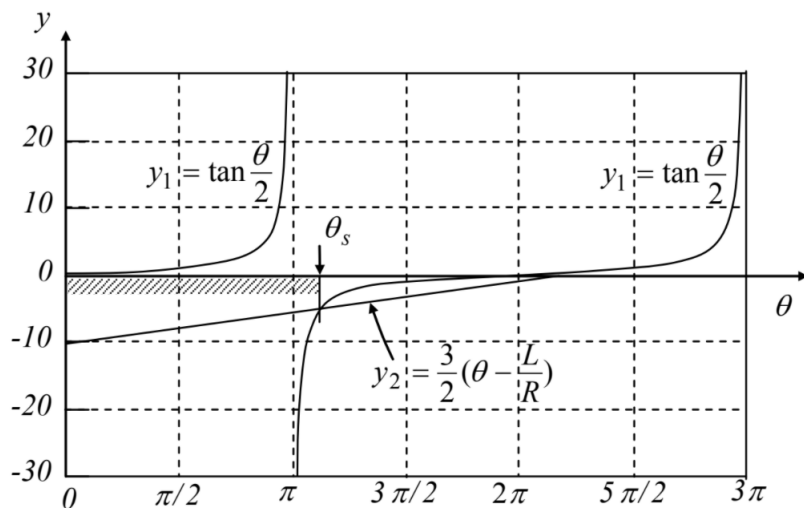
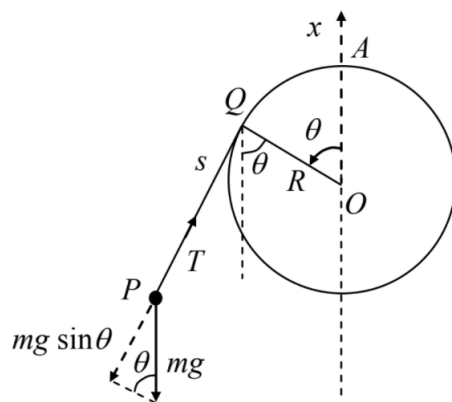
$$s^2 \dot{\theta}^2 = 2g[R(1 - \cos \theta) + s \sin \theta]$$

D'altro canto, indicando con T la tensione del filo e applicando la seconda legge di Newton al moto lungo $\hat{t}$ si ha

$$-T + mg \sin \theta = m\vec{a} \cdot \hat{t} = -ms\dot{\theta}^2$$

Inserendo la seconda equazione nella prima si ottiene

$$\frac{T}{m} = g[2R(1 - \cos \theta) + 3s \sin \theta] = 2gR \sin \theta \left[\tan \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} \left(\theta - \frac{L}{R} \right) \right]$$



Riportiamo ora in un grafico le funzioni $y_1 = \tan \theta/2$ e $y_2 = (3/2)(\theta - L/R)$.

Indichiamo con θ_s l'angolo in cui $y_1 = y_2$. Il valore del rapporto L/R implica $\pi < \theta_s < 2\pi$. Inoltre, si deve avere

$$\frac{9\pi}{8} + \frac{2}{3} \cot \frac{\pi}{16} = \theta_s - \frac{2}{3} \tan \frac{\theta_s}{2}$$

Dato che per un generico angolo α si ha $\tan(\alpha + \pi/2) = -\cot \alpha$, si ottiene $\theta_s = 9\pi/8$. Inoltre, sempre dal grafico si deduce $T > 0$ per $0 < \theta < \theta_s$, $T = 0$ per $\theta = \theta_s$ e $T < 0$ per $\theta_s < \theta < 2\pi$. Di conseguenza l'angolo in cui la corda ha lunghezza minima ed è ancora tesa è proprio

θ_s . Allora dalla conservazione dell'energia si ottiene

$$v_m = \sqrt{\frac{4gR}{3}} \cos \frac{\pi}{16}$$

Soluzione 5.3. 1. Si tratta di una semplice forza elastica, dunque indicando con x_n la posizione dell' n -esima particella si trova

$$m\ddot{x}_n = k(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1})$$

Tale espressione vale anche per $n = 1$ e $n = N$, se si richiede $x_0 = x_{N+1} = 0$.

2. Poniamo $\Omega^2 = k/m$. Inserendo $x_n(\omega, t)$ nell'equazione del moto si ottiene

$$\omega^2 \sin(nka) = \Omega^2 [2 \sin(nka) - \sin((n+1)ka) - \sin((n-1)ka)]$$

Con un paio di conti si ricava la relazione di dispersione

$$\omega = 2\Omega \sin \frac{ka}{2}$$

Dovendo essere $x_{N+1} = 0$, si ottiene la condizione

$$(N+1)ka = m\pi$$

Di conseguenza otteniamo per k i valori

$$k = \frac{m\pi}{(N+1)a}$$

Al variare di $m = 0, \dots, N$.

3. Osserviamo che si ha

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \ln \sum_{p=0}^{\infty} e^{-\frac{p\hbar\omega}{kT}} = -\frac{\sum_{p=0}^{\infty} (\hbar p)/(kT) e^{-\frac{p\hbar\omega}{kT}}}{\sum_{p=0}^{\infty} e^{-\frac{p\hbar\omega}{kT}}} = -\frac{\langle E(\omega) \rangle}{kT\omega}$$

D'altro canto, la prima serie è geometrica, quindi si ha

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \ln \sum_{p=0}^{\infty} e^{-\frac{p\hbar\omega}{kT}} = -\frac{\partial}{\partial \omega} \ln(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}) = -\frac{\hbar}{kT} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

Otteniamo quindi

$$\langle E(\omega) \rangle = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

4. Dal punto 2 sappiamo che l'intervallo tra due valori consecutivi di k è $\pi/((N+1)a)$. Allora nella nostra approssimazione il numero di modi cercato è

$$\Delta\mathcal{N} = \frac{(N+1)a}{\pi} \Delta k$$

5. L'energia totale è

$$\begin{aligned} E_T &= \sum_{\omega} \Delta\mathcal{N} \langle E(\omega) \rangle = \frac{(N+1)a}{\pi} \sum_{\omega} \langle E(\omega) \rangle \frac{\Delta k}{\Delta\omega} \Delta\omega = \\ &= \frac{(N+1)a}{\pi} \int_0^{\omega_{max}} \langle E(\omega) \rangle \frac{dk}{d\omega} d\omega \end{aligned}$$

Poniamo $\omega_0 = 2\Omega$. Dal punto 2 sappiamo che $\omega_{max} = \omega_0$ e che

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{2}{a\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

Di conseguenza si ha

$$E_T = \frac{2(N+1)}{\pi} \int_0^{\omega_0} \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \frac{d\omega}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

Soluzione 5.4. Mettiamoci nel sistema del centro di massa e sia $\vec{r}_i$ il vettore posizione di m_i . Sia inoltre $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$. L'equazione del moto di m_1 è

$$G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + G \frac{m_1 m_3}{r_{13}^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) = -m_1 \omega_1^2 \vec{r}_1 \quad (6)$$

Inoltre, per definizione di centro di massa si ha

$$\vec{r}_2 = -\frac{m_1 \vec{r}_1 + m_3 \vec{r}_3}{m_2}$$

Sostituendo $\vec{r}_2$ nella (6)

$$\vec{r}_1 \left(\frac{\omega^2}{G} - \frac{m_2 + m_1}{r_{12}^3} - \frac{m_3}{r_{13}^3} \right) + \vec{r}_3 \left(\frac{m_3}{r_{13}^3} - \frac{m_3}{r_{12}^3} \right) = 0 \quad (7)$$

Se le tre masse sono allineate il moto si studia banalmente. Altrimenti, $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ non sono paralleli, dunque i coefficienti moltiplicativi nella (7) devono annullarsi separatamente. In particolare, l'annullamento del coefficiente di $\vec{r}_3$ implica $r_{12} = r_{13}$. Analogamente, se si scrivono le equazioni del moto per m_2 e m_3 si trova $r_{23} = r_{12}$ e $r_{13} = r_{23}$, ossia le tre masse si trovano a una

stessa distanza r dal centro di massa, e in particolare formano un triangolo equilatero. Annullando ora il coefficiente di $\vec{r}_1$ si trova infine

$$\omega_1^2 = G \frac{m_1 + m_2 + m_3}{r^3}$$

Si ottiene lo stesso risultato per ω_2 e ω_3 , quindi il sistema ruota rigidamente intorno al centro di massa.

Soluzione 5.5. Sia $u_0 = R^{-1}$. L'equazione di Binet per l'orbita non perturbata ci dà semplicemente

$$u_0 = \frac{GMm^2}{L^2}$$

Dato che la perturbazione è radiale, il momento angolare è costante. Scrivendo ora $r = R + \delta r$ e espandendo al primo ordine l'equazione del moto otteniamo

$$m\delta\ddot{r} - \frac{L^2}{mR^3} \left(1 - 3\frac{\delta r}{R}\right) = -\frac{GMm}{R^2} \left(1 - 2\frac{\delta r}{R}\right)$$

$$\delta\ddot{r} + \frac{GM}{R^3}\delta r = 0$$

L'ultima equazione è quella di un oscillatore armonico. Inserendo le condizioni iniziali si ottiene

$$\delta r(t) = \frac{v}{\omega} \sin \omega t$$

Dove si è posto

$$\omega^2 = \frac{GMm}{R^3}$$

Affinchè la perturbazione sia piccola, è sufficiente allora imporre

$$v \ll \omega R$$

Notiamo incidentalmente che ω è anche la frequenza con cui il satellite ruota intorno alla terra, quindi si può richiedere equivalentemente che la velocità radiale sia trascurabile rispetto alla velocità tangenziale.

Soluzione 5.6. Consideriamo l'orbita non perturbata. L'equazione di Binet ci dà

$$L^2 = \frac{mnV_0 R^{n+2}}{a^n}$$

Scriviamo ora per l'orbita perturbata $r = R + \delta r$. Di conseguenza, per $u = r^{-1}$ si ha al primo ordine

$$u \simeq \frac{1}{R} \left(1 - \frac{\delta r}{R}\right)$$

Utilizzando ancora Binet si ottiene

$$-\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \delta r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R} - \frac{\partial r}{R^2} = \frac{mnV_0}{a^n L^2} (R + \delta r)^{n+1} \simeq \frac{mnV_0 R^{n+1}}{a^n L^2} \left(1 + (n+1) \frac{\delta r}{R} \right)$$

Sostituendo il valore di L^2 , che non cambia nella perturbazione, si ha

$$\frac{\partial^2 \delta r}{\partial \theta^2} + (n+2) \delta r = 0$$

Di conseguenza si ha stabilità per $n > -2$.

Soluzione 5.7. 1. Calcoliamo la derivata di $\vec{A}$

$$\dot{\vec{A}} = \dot{\vec{p}} \times \vec{L} + \vec{p} \times \dot{\vec{L}} - mk \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + mk \frac{\vec{r}}{r^2} \dot{r} = -\frac{k}{r^2} \hat{r} \times \vec{L} - mk \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + mk \frac{\vec{r}}{r^2} \dot{r}$$

Scegliamo il solito sistema di coordinate in cui $\vec{L} = mr^2 \dot{\theta} \hat{z}$ e in cui l'orbita è contenuta nel piano xy . Allora si ottiene

$$\dot{\vec{A}} = mk \dot{\theta} \hat{\theta} - mk \frac{\dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta}}{r} + \frac{mk \dot{r}}{r} \hat{r} = 0$$

2. Il piano dell'orbita è formato dai vettori ortogonali a $\vec{L}$. $\vec{r}$ lo è, così come $\vec{p} \times \vec{L}$, dunque anche $\vec{A}$ lo sarà.
3. Sia ϕ l'angolo tra $\vec{r}$ e $\vec{A}$. Allora si ha

$$Ar \cos \phi = \vec{A} \cdot \vec{r} = (\vec{p} \times \vec{L}) \cdot \vec{r} - mkr = L^2 - mkr$$

Dove si è usato

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$$

Di conseguenza, si ha

$$r = \frac{L^2}{mk + A \cos \phi}$$

Sappiamo inoltre che, se il perielio è sull'asse x , l'orbita è della forma

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 + \xi \cos \theta}$$

Di conseguenza $\phi = \theta$, ovvero $\vec{A}$ punta al perielio. Si provi, alternativamente, a calcolare $\vec{A}$ al perielio.

4. L'equazione di Binet in questo caso è

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + u = \frac{mk}{L^2} - \frac{2\varepsilon m}{L^2} u$$

Poniamo

$$\omega^2 = 1 + \frac{2\varepsilon m}{L^2}$$

Allora abbiamo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \omega^2 u = \frac{mk}{L^2}$$

La soluzione dell'equazione precedente è, a meno di rotazioni

$$u(\theta) = \frac{mk}{L^2} + u_0 \cos \omega \theta$$

I valori di θ per cui u è massimo (che corrispondono al perielio) sono

$$\theta_k = \frac{2k\pi}{\omega}$$

Di conseguenza, in una rivoluzione il perielio ruota di un angolo

$$\Delta\theta = 2\pi \left(\frac{1}{\omega} - 1 \right)$$

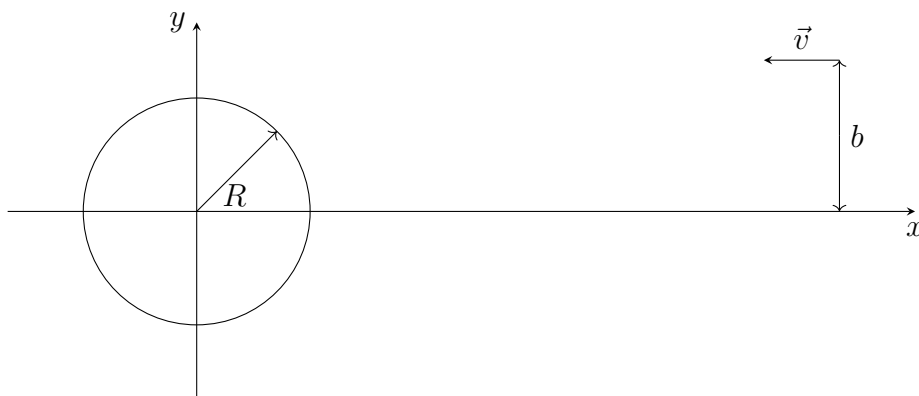
Soluzione 5.8. 1. In questa approssimazione il numero di particelle che urta la stella nell'unità di tempo è semplicemente

$$\dot{N} = n\pi R^2 v$$

Di conseguenza

$$\dot{M} = nm\pi R^2 v$$

2. Mettiamoci in un sistema solidale con la stella, in cui le particelle del mezzo interstellare si muovono (a grandi distanze dalla stella) con velocità $-v$. Consideriamo una particella con parametro di impatto b :



Questa particella ha energia e momento angolare

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

$$L = mvb$$

Sia r la distanza minima tra stella e particella. A questa distanza la velocità radiale è nulla, quindi per la conservazione dell'energia abbiamo

$$E = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

E dunque

$$r = \frac{GM}{v^2} \left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{v^2 b}{GM} \right)^2} \right]$$

Se $r \leq R$, la particella viene catturata dalla stella. Ciò accade se e solo se

$$b^2 \leq b_{max}^2 = R^2 \left(1 + \frac{2GM}{Rv^2} \right)$$

A questo punto si ottiene semplicemente

$$\dot{M} = nm\pi b_{max}^2 v = nm\pi R^2 v \left(1 + \frac{2GM}{Rv^2} \right)$$

3. Consideriamo di nuovo la particella del punto precedente. In coordinate polari, la sua orbita (iperbolica) è della forma

$$r(\phi) = \frac{r_0}{1 + \varepsilon \cos \phi}$$

Con

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2 M^2 m^3}} = \sqrt{1 + \left(\frac{v^2 b}{GM} \right)^2}$$

$$r_0 = (\varepsilon + 1)r = (\varepsilon^2 - 1) \frac{GM}{v^2}$$

Il sistema è simmetrico per rotazioni intorno all'asse x , pertanto la forza agente sulla stella sarà diretta lungo tale asse. Calcoliamo la variazione dell'impulso lungo x della particella nell'assorbimento con la stella. Tale variazione è semplicemente

$$\Delta \vec{p} \cdot \hat{x} = -\vec{p} \cdot \hat{x}$$

Dove $\vec{p}$ è l'impulso della particella subito prima dell'urto. Se l'assorbimento avviene a un angolo $\bar{\phi}$, con semplici calcoli si ricava

$$\vec{p} = \frac{L}{R} \left(\frac{1}{R} \frac{dr}{d\phi} \Big|_{\phi=\bar{\phi}} \hat{r} + \hat{\phi} \right)$$

$$\Delta \vec{p} \cdot \hat{x} = -\frac{L}{R} \left(\frac{1}{R} \frac{dr}{d\phi} \Big|_{\phi=\bar{\phi}} \cos \bar{\phi} - \sin \bar{\phi} \right)$$

A questo punto, l'angolo $\bar{\phi}$ si determina facilmente

$$\cos \bar{\phi} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{r_0}{R} - 1 \right)$$

Se ora consideriamo una corona circolare di raggio b e spesso infinitesimo db , la variazione totale di impulso lungo x in un intervallo dt è

$$\Delta \vec{P} \cdot \hat{x} = -2\pi n b v \frac{L \sin \bar{\phi}}{R} \left(\frac{r_0 \varepsilon \cos \bar{\phi}}{R(1 + \varepsilon \cos \bar{\phi})^2} - 1 \right) db dt$$

Da cui infine la forza di attrito

$$\vec{F} = \frac{2\pi n v \hat{x}}{R} \int_0^{b_{max}} b L \sin \bar{\phi} \left(\frac{r_0 \varepsilon \cos \bar{\phi}}{R(1 + \varepsilon \cos \bar{\phi})^2} - 1 \right) db =$$

$$= -\frac{2\pi n G^2 M^2 R m \hat{x}}{v^2} \int_0^{\frac{v^2 R}{GM} \sqrt{1 + \frac{2GM}{Rv^2}}} \sqrt{\frac{2 + \xi^2 \left(1 - \frac{GM}{Rv^2}\right)}{1 + \xi^2}} d\xi$$