

Meccanica 2

Massimo Bilancioni, Alessandro Foligno

1 febbraio 2018

1 Momento angolare

Consideriamo un sistema di riferimento "fisso" con origine O . Sia S un sistema di punti materiali con centro di massa G ¹, sia P un polo generico. Chiamiamo con $\vec{r}_G$ e $\vec{r}_P$ le posizioni di G e di P e con $\vec{r}_i$ la posizione della massa m_i (rispetto ad O).

Il momento angolare del sistema rispetto al polo P è definito come:

$$\vec{L}_P = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_P) \times m_i \vec{v}_i \quad (1)$$

È importante sottolineare che nella definizione appena data, $\vec{v}_i$ è la velocità misurata nel particolare sistema di riferimento adottato (che può anche eventualmente non essere inerziale) e **non** nel sistema di riferimento dove il polo è fermo; questo implica che il momento angolare calcolato rispetto a sistemi di riferimento diversi, di uno stesso corpo rispetto ad uno stesso polo può variare, ovvero *il momento angolare dipende, oltre che dal polo, dal sistema di riferimento nel quale lo si calcola*.

Per esercizio si mostri che se $\vec{L}$ è il momento angolare associato ad un corpo in un certo sistema di riferimento, lo stesso momento angolare, misurato (rispetto allo stesso polo P) in un nuovo sistema O' (non rotante) che trasla con velocità $\vec{v}_0$ rispetto ad esso (quindi le velocità misurate in O' saranno $\vec{v}' = -\vec{v}_0 + \vec{v}$) vale:

$$\vec{L}' = \vec{L} - M(\vec{r}_G - \vec{r}_P) \times \vec{v}_0 \quad ^2$$

¹Il centro di massa si definisce come "media pesata" rispetto alle masse delle posizioni delle stesse.

$$\vec{r}_G = \frac{\sum_i \vec{r}_i m_i}{\sum_i m_i}$$

²Se O' è non inerziale (ma sempre non rotante) rispetto ad O la formula di conversione per il momento angolare è :

$$\vec{L}'(t) = \vec{L}(t) - M(\vec{r}_G(t) - \vec{r}_P(t)) \times \vec{v}_0(t)$$

e varia nel tempo dato che $\vec{v}_0$ ora dipende da t .

Notare che *se scegliamo come polo il centro di massa ($P=G$)* questo termine addizionale è sempre nullo, ovvero in qualunque sistema di riferimento accelerato a piacere, non rotante rispetto a quello adottato, il momento angolare rispetto al centro di massa è sempre lo stesso.

È interessante scoprire che relazione lega $\vec{L}_G$, momento angolare calcolato scegliendo come polo G, a $\vec{L}_P$, dove P è un polo qualsiasi.

$$\begin{aligned}\vec{L}_P &= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_P) \times m_i \vec{v}_i = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_G + \vec{r}_G - \vec{r}_P) \times m_i \vec{v}_i \\ &= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_G) \times m_i \vec{v}_i + \sum_i (\vec{r}_G - \vec{r}_P) \times m_i \vec{v}_i \\ &= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_G) \times m_i \vec{v}_i + (\vec{r}_G - \vec{r}_P) \times M_{tot} \vec{V}_G\end{aligned}$$

M_{tot} indica la massa totale del sistema in questione e $\vec{V}_G$ la velocità del centro di massa.

Riconosciamo $\vec{L}_G$ nel primo addendo e con $\vec{L}_{G/P}$ indichiamo il secondo, abbiamo allora un importante risultato.

$$\vec{L}_P = \vec{L}_G + \vec{L}_{G/P} \quad (2)$$

Questa formula ci piace perchè il momento angolare rispetto al centro di massa, per come già detto, lo si può calcolare in un qualunque sistema di riferimento non rotante rispetto al sistema fisso, ad esempio uno molto spesso utile, è quello dove il centro di massa è fermo. $\vec{L}_{G/P}$ è interpretabile come il momento angolare, rispetto al polo P, di un punto materiale di massa uguale alla massa totale del sistema, posizionato nel centro di massa, con la velocità del centro di massa.

Nel caso di una distribuzione di massa continua invece che discreta, basta sostituire tutte le sommatorie con integrali e le m_i con dm , massettine infinitesime.

Guardiamo ora come varia il momento angolare nel tempo, usando la regola di Leibniz per derivare il prodotto vettoriale come fosse un prodotto normale (la cosa discende sostanzialmente dal fatto che è distributivo)

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}_P}{dt} &= \sum_i (\vec{v}_i - \vec{v}_P) \times m_i \vec{v}_i + \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_P) \times m_i \vec{a}_i \\ &= -\vec{v}_P \times \sum_i m_i \vec{v}_i + \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_P) \times \vec{F}_i \\ &= -\vec{v}_P \times M_{tot} \vec{V}_G + \vec{\tau}_P\end{aligned}$$

- $\vec{F}_i$ è la forza agente sulla particella i -esima nel sistema fisso.
- $\vec{\tau}_P$ è il momento torcente rispetto al polo P .
- $M_{tot}\vec{v}_G \times \vec{v}_P$ è il termine di polo mobile, per capire il motivo della sua esistenza si pensi a questo semplice esempio:

Una particella di massa m parte dall'origine e si muove con velocità costante $\vec{v} = v_0 \hat{y}$, il polo P inizialmente anch'esso nell'origine si muove con velocità costante $\vec{v}_P = v \hat{x}$.

Non ci sono momenti che agiscono sulla massa eppure $\vec{L}_P$ varia nel tempo, e di questa variazione ne tiene conto proprio il termine di polo mobile. Per esercizio si calcoli quanto vale il momento angolare all'istante t .

In alcuni casi pratici si cerca un polo in cui questo termine sia assente; ciò può essere fatto imponendo una qualunque delle seguenti condizioni:

1. $\vec{v}_P = 0$, il polo è fermo.
2. $\vec{v}_G = 0$, il centro di massa è fisso rispetto al nostro sistema di coordinate
3. $\vec{v}_P$ e $\vec{v}_G$ sono paralleli, condizione soddisfatta, ad esempio, imponendo $\vec{r}_P = \vec{r}_G$

Quando si tratta di scegliere il polo per fare un problema la scelta può essere dettata da varie cose, in particolare i poli scelti in genere sono tali per cui il momento torcente rispetto a questi è sempre nullo (anche se potrebbero saltar fuori termini di polo mobile), oppure poli rispetto ai quali il termine di polo mobile (che è abbastanza fastidioso) si annulla, ad esempio il centro di massa, oppure il cosiddetto *asse istantaneo di rotazione*, che vedremo più avanti.

Un'ultima osservazione sul centro di massa è che, dato che il momento angolare usando G come polo non dipende dal sistema di riferimento (ma solo dalle velocità relative fra le particelle), anche la sua derivata non dipenderà dal sistema di riferimento, e pertanto neanche $\vec{\tau}_G$, ovvero *il momento torcente rispetto al centro di massa non dipende dal sistema di riferimento rispetto al quale lo si calcola*. Questa ed altre proprietà fanno sì che il centro di massa sia un punto "privilegiato" rispetto al quale i conti vengono meglio. Un'ultima proprietà di cui gode il centro di massa, analoga a quella che permette di scomporre il momento angolare, riguarda l'energia cinetica di un corpo, che si scompone in due parti:

$$K_{tot} = K_0 + K_G$$

1. K_0 indica l'energia cinetica delle masse in un sistema di riferimento che trasla insieme al centro di massa, che quindi è visto fermo.

2. K_{tot} indica l'energia cinetica totale del sistema di corpi nel sistema di riferimento scelto
3. K_G indica l'energia cinetica del centro di massa visto come un punto materiale con velocità $\vec{V}_G$ e massa M nel sistema di riferimento scelto.

La dimostrazione è semplice, praticamente basta scrivere i due membri dell'equazione e svolgere i conti:

$$K_0 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i - \vec{V}_G)^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (v_i^2 + V_G^2 - 2\vec{v}_i \cdot \vec{V}_G) = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 - \frac{1}{2} M V_G^2 = K_{tot} - K_G$$

Nel caso di urti anaelastici all'interno del sistema, K_0 rappresenta la massima energia cinetica che può andare persa.

Esempio 1.1. Consideriamo un disco omogeneo con centro nell'origine, che ruota con velocità angolare $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$ (i.e. la velocità di ogni punto del disco si scrive come $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ ³); se P è un polo fisso come varia $\vec{L}_P$ (momento angolare al tempo $t = 0$) al variare di $\vec{r}_P$? E se il centro del disco si muove con velocità $\vec{v}_G$?

Soluzione 1.1. Anzitutto notiamo che, con la formula (2), $L_P = L_G$, dato che il centro di massa è fermo. Pertanto ci basta calcolare il momento angolare rispetto al centro di massa che vale $L_G = \frac{1}{2} M R^2 \omega$ (lungo z). Nel caso in cui il centro si muova con velocità costante, sempre con la formula (2), abbiamo, se il polo è in posizione (x_P, y_P) e il centro del disco è inizialmente nell'origine, con velocità $(\dot{x}_G, \dot{y}_G)$, che il momento angolare totale è $L_P = \frac{1}{2} M R^2 \omega + M(\dot{x}_G y_P - \dot{y}_G x_P)$ (sempre lungo z).

Esempio 1.2. Consideriamo sul piano x - y un anello omogeneo di massa m_1 con centro nell'origine e raggio r_1 che ruota con velocità angolare $\vec{\omega}_1$, sul bordo di questo anello è fissato il centro di un secondo anello di massa m_2 e raggio r_2 che ruota con velocità angolare $\vec{\omega}_2$. Determinare il momento angolare del sistema, rispetto all'origine, dicendo se esso è costante, e nel caso particolare in cui $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2$ descrivere le traiettorie dei punti sul secondo anello. Le velocità angolari sono da intendere come dirette lungo z .

Soluzione 1.2. Il momento del primo anello è: $L_1 = \omega_1 r_1^2 m_1$. Per quanto riguarda il secondo usiamo la formula per scomporre il momento in due parti: $L_2 = \omega_1 r_1^2 m_2 + \omega_2 r_2^2 m_2$. Il momento totale è $L = \omega_1 r_1^2 (m_1 + m_2) + \omega_2 r_2^2 m_2$,

³Se $\vec{r}$ è la posizione di un punto che ruota con velocità angolare ω attorno a un asse passante per l'origine, la velocità del punto in quel dato istante si scrive vettorialmente come :

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

dove $\vec{\omega}$ ha modulo ω , è diretto lungo l'asse di rotazione e il verso decide se la rotazione avviene in senso orario o antiorario.

Per convincersi della validità della formula, verificare che modulo e direzione di $\vec{v}$ siano quelli attesi.

che torna nel caso in cui $r_2 = 0$. Nel caso $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ il sistema di anelli si comporterà come un corpo rigido che ruota stando fisso, ovvero sarà come se i due anelli fossero “saldati” l’uno sull’altro. Questo perchè riesco a descrivere le velocità di tutti i punti (sia del primo che del secondo anello) con un’unica ω (vedi teoria del corpo rigido seguente). Un conto più esplicito mostra che le velocità dei punti del secondo anello valgono, detto $\vec{r}_2$ il centro del secondo anello e $\vec{v}_2$ la sua velocità: $\vec{v} = \vec{v}_2 + \omega \times (\vec{r} - \vec{r}_2) = \vec{\omega} \times \vec{r}_2 + \omega \times (\vec{r} - \vec{r}_2) = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

Esempio 1.3. *Un sistema di spire di forma arbitraria in cui scorre corrente è immerso in un campo magnetico uniforme $\vec{B}$.*

Sapendo che rispetto a un qualunque polo fermo, il momento torcente è $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$ ($\vec{m}$ rappresenta il momento magnetico e non dipende dalla posizione del polo), cosa si può dire sulla forza magnetica totale che agisce sulle correnti?

Soluzione 1.3. Notiamo che il momento torcente non dipende dalla posizione del polo, questo ci fa pensare che la forza totale debba essere nulla, altrimenti potremmo scegliere dei poli per cui questa forza da origine a momenti differenti.

Dimostriamolo in formule:

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_P &= \int (\vec{r} - \vec{r}_P) \times d\vec{F} \\ \vec{\tau}_P &= \int (\vec{r} - \vec{r}_Q + \vec{r}_Q - \vec{r}_P) \times d\vec{F} \\ \vec{\tau}_P &= \int (\vec{r} - \vec{r}_Q) \times d\vec{F} + \int (\vec{r}_Q - \vec{r}_P) \times d\vec{F} \\ \vec{\tau}_P &= \vec{\tau}_Q + (\vec{r}_Q - \vec{r}_P) \times \vec{F}_{tot} \\ (\vec{r}_Q - \vec{r}_P) \times \vec{F}_{tot} &= 0\end{aligned}$$

Questo vale per ogni scelta di P e Q, concludiamo che $\vec{F}_{tot} = 0$.

2 Corpo Rigido

La teoria del corpo rigido è complicata, per questo ci concentreremo sui casi semplici (che del resto sono quelli che interessano a noi) in cui il vettore velocità angolare del corpo non cambia direzione nel tempo.

Per corpo rigido si intende un sistema di punti materiali caratterizzati dal fatto che le loro mutue distanze si mantengono costanti nel tempo.

Partiamo con l’analizzare il caso di corpo rigido bidimensionale che si muove nel piano $x-y$. La velocità di un punto qualsiasi del corpo si può

scomporre rispetto al centro di massa G come:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{V}_G + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_G) \quad ^4 \quad (3)$$

$\vec{\omega}$ rappresenta la velocità angolare di rotazione del corpo vista da G , ed è diretta lungo z nel nostro caso.⁵

Anche $\vec{L}_G$ è diretto lungo z (i vettori posizione e velocità sono contenuti nel piano $x-y$), quindi nel caso del corpo bidimensionale che si muove su un piano abbiamo che $\vec{L}_G$ è parallelo ad $\vec{\omega}$; inoltre la relazione che lega queste due grandezze è lineare (se ω raddoppia anche L_G raddoppia), possiamo dunque scrivere $L_G = I_G \omega$ dove omettiamo i simboli di vettore, perchè, essendo tutto diretto lungo l'asse z , è come se stessimo lavorando con degli scalari.

Per trovare I_G calcoliamo $\vec{L}_G$ nel sistema di riferimento in cui G è fermo:

$$\begin{aligned} \vec{L}_G &= \int (\vec{r} - \vec{r}_G) \times (\vec{v} - \vec{v}_G) dm \\ &= \int (\vec{r} - \vec{r}_G) \times (\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_G)) dm \end{aligned}$$

Ci limitiamo a guardare il modulo, che è quello che ci interessa:

$$L_G = \omega \int (\vec{r} - \vec{r}_G)^2 dm$$

E abbiamo infine $I_G = \int (\vec{r} - \vec{r}_G)^2 dm$ ⁶ (valida nel caso **bidimensionale**)

Nel caso del corpo bidimensionale valgono allora queste equazioni molto utili:

$$1. \quad I_G \frac{d\omega}{dt} = \tau_G$$

⁴La relazione rimane valida anche nel caso di corpi tridimensionali.

⁵Qui il centro di massa non ha nulla di speciale, la velocità si può benissimo scomporre rispetto a un qualsiasi punto Q del corpo.

Infatti visti da Q gli altri punti ruotano su circonferenze (le loro distanze da Q restano costanti nel tempo perchè il corpo è rigido) con frequenza angolare $\vec{\omega}'$ e si può scrivere in modo analogo:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{V}_Q + \vec{\omega}' \times (\vec{r} - \vec{r}_Q) \quad (4)$$

E se ve lo state chiedendo è pure vero che $\vec{\omega} = \vec{\omega}'$, lo si mostri come esercizio usando la (3) e la (4); questo fatto importante mette in risalto il carattere "assoluto" di $\vec{\omega}$; tale circostanza ci permette di chiamare, a ragione, $\vec{\omega}$ velocità angolare di rotazione del corpo solido come tale.

⁶Il momento di inerzia rispetto a un punto Q qualunque (caso bidimensionale), si definisce in maniera analoga come

$$I_Q = \int (\vec{r} - \vec{r}_Q)^2 dm$$

Notare che $L_Q = I_Q \omega$ ora vale in generale se Q è **fermo** (ma non solo...) .

$$2. \vec{L}_P = I_G \vec{\omega} + (\vec{r}_G - \vec{r}_P) \times M_{tot} \vec{V}_G .$$

L'unico motivo per cui compaiono i vettori nella formula è che bisogna fare attenzione al segno; per il resto, essendo tutto lungo z , poco importa.

3. $K_0 = \frac{1}{2} I_G \omega^2$ dove K_0 , definita in precedenza, è l'energia cinetica nel sistema di riferimento del centro di massa. Questa formula vale perchè:

$$K_0 = \int \frac{1}{2} (\vec{v} - \vec{V}_G)^2 dm$$

E grazie alla (3):

$$\begin{aligned} K_0 &= \int \frac{1}{2} \omega^2 (\vec{r} - \vec{r}_G)^2 dm \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 \int (\vec{r} - \vec{r}_G)^2 dm \end{aligned}$$

Si è ignorato il prodotto vettore, nel caso bidimensionale i due vettori sono perpendicolari. Da questa, applicando la relazione vista prima, segue:

$$4. K_{tot} = \frac{1}{2} I_G \omega^2 + \frac{1}{2} M_{tot} V_G^2$$

Finora ci siamo ristretti , nella nostra discussione, al caso di oggetti planari.

Tuttavia nel caso di oggetti non planari che ruotano attorno a un asse parallelo a z rimangono sostanzialmente invariati tutti i risultati appena trovati, purchè L_z sia l'unica componente a cui siamo interessati (in generale L_x, L_y sono $\neq 0$, si pensi ad un'asta che ruota intorno all'asse z inclinata di un angolo θ fissato rispetto ad esso, con $0 < \theta < \pi/2$, $\vec{L}$ non è parallelo a $\vec{\omega}$).

Consideriamo quindi un oggetto tridimensionale il cui $\vec{\omega}$ è diretto lungo z ; vogliamo calcolare $L_{G,z}$, componente z di $\vec{L}_G$ momento angolare rispetto al polo G (la relazione sarà sempre lineare del tipo : $L_{G,z} = I_{G,z} \omega$), usiamo le coordinate cilindriche e scegliamo come asse z quello passante per G, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \vec{L}_G &= \int (\vec{r} - \vec{r}_G) \times (\vec{v} - \vec{v}_G) dm \\ &= \int (\vec{z} + \vec{\rho}) \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm \\ &= \int \vec{z} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm + \int \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm \end{aligned}$$

Il primo termine non ci interessa perchè è perpendicolare a z , per trattare il secondo usiamo l'identità $\vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = \vec{\omega}\rho^2 - \vec{\rho}(\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}) = \omega\rho^2\hat{z}$.

$$L_{G,z} = \omega \int \rho^2 dm$$

segue che $I_{G,z} = \int \rho^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm$ ⁷

Vediamo una a una le equazioni di prima:

$$1. I_{G,z} \frac{d\omega}{dt} = \tau_{G,z}$$

$$2. L_{P,z} = I_{G,z}\omega + [(\vec{r}_G - \vec{r}_P) \times M_{tot}\vec{V}_G]_z .$$

Con l'ultimo termine si intende la componente z del vettore fra parentesi quadre.

$$3. K_0 = \frac{1}{2}I_{G,z}\omega^2 \text{ infatti:}$$

$$K_0 = \int \frac{1}{2}(\vec{v} - \vec{V}_G)^2 dm$$

$$= \int \frac{1}{2}\omega^2\rho^2 dm$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2 \int \rho^2 dm$$

$$4. K_{tot} = \frac{1}{2}I_{G,z}\omega^2 + \frac{1}{2}M_{tot}V_G^2$$

2.1 Asse istantaneo di rotazione

Nel caso di corpo rigido c'è un secondo punto molto interessante da considerare, oltre al centro di massa: l'asse istantaneo di rotazione. Si dimostra che questo punto, che in realtà sarebbe in tre dimensioni un asse (l'asse lungo z passante per il punto in questione) esiste sempre ed il punto del corpo che si trova in corrispondenza (se c'è) è istantaneamente fermo. Sia A l'asse istantaneo, l'equazione (3) si semplifica ulteriormente e permette di scrivere:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_A)$$

⁷Generalizziamo al caso tridimensionale il discorso fatto nella nota ⁶.

Il momento di inerzia rispetto all'asse (parallelo a z) passante per un punto Q qualunque, si definisce in maniera analoga come

$$I_{Q,z} = \int (x^2 + y^2) dm$$

Dove il sistema di coordinate è stato preso in modo che $(x_Q, y_Q) = (0, 0)$.

dove non si è aggiunto $\vec{V}_A$ (velocità del punto del corpo in corrispondenza di A perchè è 0.

Due importanti precisazioni: ω è la stessa di quella del centro di massa, come già detto nelle note ³; il punto A può anche essere "fuori dal corpo", dove non c'è massa, poco importa.

Per trovarlo basta trovare un punto rispetto al quale le velocità sono ortogonali alla congiungente (in tre dimensioni la ricerca dell'asse equivale a trovare due punti istantaneamente fermi) dato che queste si calcolano facendo il prodotto vettore.

Le equazioni viste finora per il centro di massa si aggiustano nel seguente modo:

$$1. I_A \frac{d\omega}{dt} = \tau_A - [\vec{v}_A \times M_{tot} \vec{V}_G]_z$$

notare che $\vec{v}_A$ rappresenta la velocità del punto A e in generale $\vec{v}_A \neq \vec{V}_A$.

L'asse istantaneo come oggetto geometrico può avere una sua velocità, poco importa se i punti fisici in corrispondenza di esso sono fermi; si pensi a un cilindro che rotola sul piano.

$$2. K_{tot} = \frac{1}{2} I_A \omega^2, \text{ l'energia cinetica rispetto a questo punto è tutta rotazionale.}$$

I_A sarebbe il momento d'inerzia calcolato prendendo le distanze da A e non da G; non occorre rifare nessun integrale per trovarlo, visto che vale il teorema di Huygens-Steiner che illustriamo nella sezione seguente.

Intanto per fissare meglio le idee sull'asse istantaneo consideriamo l'esempio seguente:

Esempio 2.1. 1. *Trovare l'asse istantaneo di rotazione per un cono che rotola senza strisciare su un piano. Dedurre da ciò come si muove il vertice del cono.*

2. *Trovare l'asse istantaneo di rotazione di un cono il cui vertice è fissato sull'asse z ad un'altezza h e la cui base rotola sul piano x-y senza strisciare.*

Soluzione 2.1. Dato che rotola senza strisciare, tutti i punti a contatto col piano sono istantaneamente fermi, l'asse cercato è allora quello che passa per questi punti. Il vertice è sempre in contatto col piano, cioè a ogni istante è fermo, ma allora rimane nella stessa posizione durante il moto del cono.

Nel secondo caso il vertice è fermo ad ogni istante e il punto della base che tocca il piano è istantaneamente fermo, l'asse istantaneo di rotazione è quello che passa per questi due punti.

Esempio 2.2. *Un disco di massa M e raggio R si muove liberamente su un piano orizzontale $z = 0$. La velocità del centro di massa è $\vec{v} = v_0 \hat{x}$, la velocità*

angolare è $\vec{\omega} = \lambda v_0 / R \hat{z}$. Con una apposita pistola si vuole trapassare il disco con un chiodo. Dopo che questo è avvenuto il disco rimane vincolato e può solo ruotare attorno al chiodo, che rimane infisso nel piano. Determinare (se possibile) quale punto del disco è necessario trapassare per un dato valore del parametro λ se si vuole che

1. il disco perda tutta l'energia cinetica posseduta;
2. il disco conservi tutta l'energia cinetica posseduta.

Soluzione 2.2. Una quantità che si conserva durante l'impatto con il chiodo è il momento angolare rispetto al punto in cui questo viene infisso.

Fissiamo un sistema di riferimento con origine nella posizione del centro del disco al momento dell'impatto. Le coordinate del chiodo sono (x_P, y_P) .

1. Se tutta l'energia cinetica viene persa, allora dopo l'urto deve essere $\vec{L} = 0$. Ma allora anche il momento angolare prima dell'urto è nullo, questo è vero se:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= m(\vec{r}_G - \vec{r}_P) \times v_0 \hat{x} + I \omega \hat{z} = 0 \\ m(-x_P \hat{x} - y_P \hat{y}) \times v_0 \hat{x} + \frac{m R \lambda v_0}{2} \hat{z} &= 0 \\ (y_P v_0 + \frac{\lambda R}{2}) \hat{z} &= 0 \\ y_P &= -\frac{\lambda R}{2}\end{aligned}$$

x_P può essere scelta in modo arbitrario, la condizione che il chiodo finisca dentro il disco impone $|y_P| \leq R$, $|\lambda| < 2$.

2. Affinchè tutta l'energia cinetica si conservi il chiodo non deve colpire un punto del disco in movimento, altrimenti compierebbe un lavoro non nullo; è necessario colpire un punto del disco istantaneamente fermo ed è anche sufficiente dato che l'energia in tal caso sarebbe tutta rotazionale.

$$\begin{aligned}\vec{V}_P &= v_0 \hat{x} + \vec{\omega} \times \vec{r}_P = 0 \\ v_0 \hat{x} + \frac{\lambda v_0}{R} \hat{z} \times (x_P \hat{x} + y_P \hat{y}) &= 0 \\ (v_0 - \frac{\lambda v_0}{R} y_P) \hat{x} + \frac{\lambda v_0}{R} x_P \hat{y} &= 0 \\ y_P &= \frac{R}{\lambda} \quad x_P = 0\end{aligned}$$

Imponendo $|y_P| \leq R$, si vede che è possibile conservare tutta l'energia cinetica del disco se $|\lambda| > 1$.

2.2 Teorema di Huygens-Steiner

Il teorema di Huygens-Steiner permette di calcolare il momento di inerzia di un solido rispetto ad un asse parallelo a quello passante per il centro di massa.

Il momento d'inerzia rispetto ad un asse a , parallelo ad un altro c passante per il centro di massa, è :

$$I = I_G + M_{tot}d^2$$

Dove d è la distanza tra gli assi a ed c .

Dimostrazione 2.1. Scegliamo un sistema di coordinate in cui i due assi sono perpendicolari al piano $x-y$, l'asse a passa per l'origine e l'asse c passa per il punto (x_G, y_G) .

$$I = \int (x^2 + y^2) dm$$

$$I = \int [(x - x_G + x_G)^2 + (y - y_G + y_G)^2] dm$$

$$I = \int [(x - x_G)^2 + (y - y_G)^2] dm + (x_G^2 + y_G^2) \int dm + 2x_G \int (x - x_G) dm + 2y_G \int (y - y_G) dm$$

$$I = I_G + (x_G^2 + y_G^2) M_{tot}$$

$x_G \int (x - x_G) dm$ è nullo, perchè, portando fuori tutte le costanti, ottengo $x_G (\int x dm - \int x_G dm) = x_G (x_G M - x_G M) = 0$ per definizione di centro di massa, per lo stesso motivo è nullo $y_G \int (y - y_G) dm$.

L'utilità di questo teorema è che ti permette di evitare conti in certe situazioni.

Un' applicazione interessante è illustrata nel seguente esempio.

Esempio 2.3. Calcolare il momento di inerzia di un cubo omogeneo di massa M e lato l rispetto all'asse passante per il centro di massa perpendicolare a una delle facce.

Calcolare il momento di inerzia rispetto a un asse qualsiasi passante per il centro di massa.

Soluzione 2.3. Si pensi il cubo come unione di 8 cubetti di lato $l/2$. Chiamato x il lato di un cubo di densità ρ , per analisi dimensionale $I = \alpha \rho x^5$, con α da determinare. Applico il teorema di Huygens-Steiner a ogni cubetto, per calcolare il momento di inerzia passante per un asse distante $l\sqrt{2}/4$ dai loro centri, che sarebbe l'asse del cubo originale di lato l :

$$\rho l^5 \alpha = 8 \left(\frac{\alpha}{32} \rho l^5 + \rho \frac{l^5}{64} \right)$$

Da cui $\alpha = \frac{1}{6}$ e $I = \frac{1}{6} M l^2$.

Se fino a qui ci si poteva arrivare con l'integrazione diretta, questa risulta infattibile per la seconda parte dell'esercizio.

Procediamo quindi in maniera simile a prima, il teorema di Huygens-Steiner ci dice:

$$I = \sum_i \frac{M}{8} d_i^2 + I_{\frac{1}{8}}$$

Se $\hat{n}$ versore identifica il nostro asse, d_i è la distanza tra i due assi diretti lungo $\hat{n}$ passanti uno per il centro del cubetto i-esimo e l'altro per il centro del cubo.

$$d_i = |\hat{n} \times \vec{r}_i|$$

$\vec{r}_i$ è la posizione del centro del cubetto i-esimo rispetto al centro del cubo; questi otto vettori sono del tipo $\frac{1}{4}l(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ e a questo punto si tratta di svolgere questi otto prodotti vettori (in realtà 4 perchè sono a due a due uguali) ricordando che:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - b_y a_x)^2}$$

$$\begin{aligned} \sum d_i^2 &= \frac{1}{16} l^2 \sum (n_y(\pm 1_z) - n_z(\pm 1_y))^2 + (n_z(\pm 1_x) - n_x(\pm 1_z))^2 + (n_x(\pm 1_y) - n_y(\pm 1_x))^2 \\ &= \frac{1}{16} l^2 (16n_x^2 + 16n_y^2 + 16n_z^2) = l^2 \end{aligned}$$

$\sum d_i^2$ non dipende dalla direzione dell'asse, quindi per il momento di inerzia otteniamo lo stesso risultato di prima: $I = \frac{1}{6} M l^2$. In questo senso il cubo si comporta esattamente come una sfera. Questo stesso metodo si può applicare per trovare il momento di inerzia rispetto a un qualsiasi asse passante per il centro, di aste sottili, triangoli, quadrati ma anche cilindri (in quest'ultimo caso bisogna mettere in relazione il momento di inerzia di metà cilindro con quello del cilindro intero)

Esempio 2.4. Si consideri la sbarretta in Figura 1 lunga $2a$, massa m , vincolata ad avere gli estremi sugli assi, in un campo di gravità diretto lungo $-y$, si scrivano le equazioni del moto e la conservazione dell'energia.

Soluzione 2.4. Anzitutto notiamo che il problema ha una sola "coordinata", ovvero un unico grado di libertà, cioè l'angolo θ con l'asse delle y . La nostra ω , diretta lungo z vale $\dot{\theta}$ in modulo. La posizione del centro di massa sarà $(a \sin(\theta), a \cos(\theta))$. Cerchiamo ora l'asse istantaneo. Dato che i due estremi si muovono lungo x e lungo y , necessariamente l'asse dovrà essere sull'intersezione delle perpendicolari per gli estremi, quindi avrà coordinate $(2a \sin(\theta), 2a \cos(\theta))$.

Il momento di inerzia passante per il centro di massa è noto e vale $I_G = m \frac{a^2}{3}$, quello passante per l'asse istantaneo sarà quindi $I = I_G + m a^2 = m \frac{4a^2}{3}$.

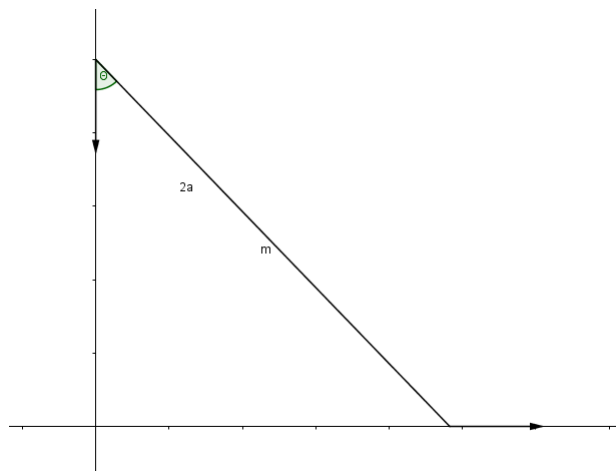


Figura 1: sbarretta che cade

L'energia cinetica **totale** sarà quindi $\frac{2}{3}ma^2\dot{\theta}^2$.

L'energia potenziale, a meno di costante arbitraria, sarà $U = mgy_G = mga \cos(\theta)$. Quindi

$$E_T = mga \cos(\theta) + \frac{2}{3}ma^2\dot{\theta}^2$$

La legge del moto è, invece, $I\ddot{\theta} = \tau = mga \sin(\theta)$, dove il tutto è sempre calcolato rispetto l'asse istantaneo; le reazioni non fanno evidentemente momento e il termine di polo mobile è nullo perchè la velocità del polo e del centro di massa sono parallele, questi due punti si muovono su circonferenze concentriche di raggio $2a$ e a .

Notare come, modulo un segno, ricorda quella di un pendolo.

3 Potenziale Centrifugo

Per concludere, vediamo quella che può essere un'ottima tecnica per risolvere problemi dove c'è da considerare un sistema rotante con una certa velocità angolare $\vec{\Omega}$. Come al solito orientiamo l'asse z lungo la velocità angolare; dalla teoria fatta in precedenza sappiamo che nel sistema rotante (con centro fisso) compariranno due termini di forza (Ω è supposta costante). $\vec{F}_{apparenti} = m\Omega^2\vec{\rho} - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}$ (ρ è la distanza dall'asse z).

Il secondo di questi termini non compie evidentemente lavoro; il primo termine di forza è invece conservativo, infatti

$$\int_{\vec{\rho}_a}^{\vec{\rho}_b} m\Omega^2\vec{\rho} = \frac{1}{2}m\Omega^2(\rho_b^2 - \rho_a^2)$$

Pertanto è possibile definire un'energia potenziale centrifuga che, fissando arbitrariamente lo 0 a $\rho = 0$, varrà:

$$U = -\frac{1}{2}\Omega^2\rho^2m$$

Esempio 3.1. Si consideri una massa m attaccata ad una molla ideale con lunghezza a riposo nulla con costante elastica k . La massa è vincolata a ruotare con velocità angolare $\Omega\vec{z}$ intorno al centro; trovare il periodo delle oscillazioni.

Soluzione 3.1. Indicando con x la distanza dal centro, scriviamo l'energia potenziale: $U = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}\Omega^2x^2m$ che è identica a quella di una molla con costante elastica $k' = k - \Omega^2$, pertanto il periodo sarà $T = \sqrt{\frac{m}{k-\Omega^2}}2\pi$

Esempio 3.2. Un anello omogeneo di massa M e raggio R ruota con velocità angolare ω intorno ad un asse passante per un suo diametro. Trovare l'energia potenziale centrifuga dell'anello.

Soluzione 3.2.

$$U = \int dU = -\frac{1}{2}\omega^2 \int \rho^2 dm = -\frac{1}{2}I\omega^2$$

Per calcolare I , sappiamo che per oggetti **planari** contenuti in x - y vale la relazione $I_z = I_x + I_y$; quindi $2I = I_x + I_y = I_z = MR^2$.

4 Problemi

Problema 4.1. Nel caso di un oggetto piatto che rototrasla nel piano x - y , trovare tutti i casi in cui vale la relazione $L_Q = I_Q\omega$? (Q è un polo qualunque nel piano non per forza fisso)

Problema 4.2. Un cilindro di raggio r rotola senza strisciare dentro un secondo cilindro fisso di raggio $R > r$ in presenza della gravità.

Se θ è l'angolo compreso tra la verticale e la retta passante per i centri dei due cilindri, determinare la velocità angolare del cilindro piccolo in funzione di $\dot{\theta}$.

Problema 4.3. Si consideri un cilindro cavo di massa M , raggio R , che rotola senza strisciare lungo un piano orizzontale. Il cilindro ha una massettina m fissa sul suo bordo interno. Si scriva l'equazione del moto, scegliendo un polo opportuno e considerando come variabile l'angolo tra la massettina e la verticale (rivolta verso il basso) e si verifichi che è la seguente:

$$2[M + m(1 - \cos \theta)]\ddot{\theta} + m \sin \theta \dot{\theta}^2 + \frac{mg}{R} \sin \theta = 0$$

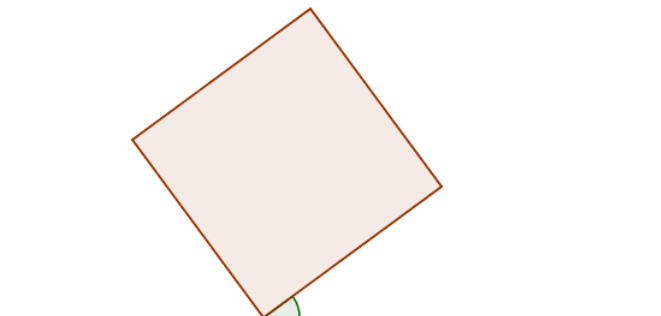


Figura 2: quadrato che cade senza strisciare

Problema 4.4. Un quadrato di massa M e lato L , inizialmente fermo, si trova inclinato di un certo angolo iniziale $\alpha < \pi/4$ ed inizia a scivolare su un piano senza attrito (si veda la Figura 2). Trovare la velocità angolare con cui va a sbattere, la velocità del centro di massa (in funzione dell'angolo di inclinazione), le equazioni del moto e l'energia (sempre in funzione dell'angolo di inclinazione) supponendo che il vertice del quadrato rimanga in ogni istante in contatto con il piano. (consiglio: per trovare il momento di inerzia si veda l'analogo Esempio 2.3)

Dimostrare che effettivamente questa supposizione è vera.

Domanda bonus: se sostituiamo il cubo con un'asta di lunghezza l e distribuzione di massa qualunque, inizialmente ferma inclinata di un certo angolo, è sempre vero che durante la caduta l'estremo rimane in ogni istante in contatto con il piano?

Problema 4.5. Un oggetto piano di massa M e forma arbitraria è fissato sul piano con un chiodo e ruota attorno ad esso con velocità angolare ω .

Qual è la forza che il chiodo esercita sull'oggetto in ogni istante per mantenerlo in rotazione? Che cosa serve conoscere dell'oggetto per poter rispondere alla domanda precedente?

Problema 4.6. Si consideri un rocchetto di filo modellizzato come due dischi sottili di raggio a , massa complessiva m , collegati da un cilindro cavo di lunghezza $2l$, massa M , raggio b (si veda la Figura 3). Il cilindro viene tirato tramite un filo arrotolato su di esso (uscente dalla parte inferiore) con una forza $\vec{F}$ costante in modulo, rotolando *senza strisciare*.

1. Si calcoli il momento d'Inerzia del sistema rispetto l'asse centrale e rispetto l'asse istantaneo.

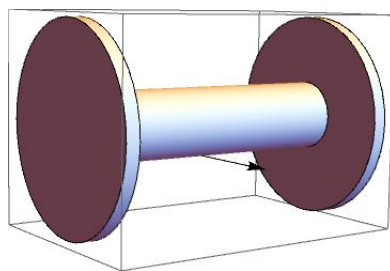


Figura 3: I dischi esterni hanno raggio a e massa complessiva m

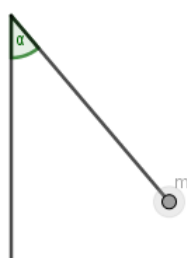


Figura 4: le asticelle del problema, quella senza la massa è vincolata a ruotare con velocità angolare ω

2. Si dicano le condizioni su a, b affinché il corpo trasli verso $\vec{F}$ o in verso opposto e quanto vale la relativa accelerazione angolare. (Per $a < b$ si può pensare che i dischi laterali si muovano su binari rialzati in modo che il cilindro centrale non tocchi)

Problema 4.7. Si considerino due bacchette senza massa di uguale lunghezza l , incernierate all'estremo in comune, formando un angolo α . La bacchetta più esterna ha una massa m all'estremo libero, quella più interna è vincolata a ruotare con velocità ω (Figura 4). Nell'istante iniziale si ha $\alpha = \pi$, e la massa m ha velocità iniziale $\vec{v}_0$ perpendicolare alle bacchette.

Si dica il valore minimo di $\vec{v}_0$ affinché le due bacchette vadano a sbattere. Domanda bonus: Per questo valore minimo di $\vec{v}_0$, l'urto avviene in un tempo finito?

Problema 4.8. Una corona circolare uniforme di massa M e raggio R è posta su una superficie orizzontale senza attrito.

Un bambino di massa m sale sulla corona dove c'è un segno S e fa un giro completo della circonferenza tornando in S.

Dove si trova il bambino rispetto al punto dove è salito? Di quale angolo ha ruotato la corona rispetto al suo centro?

Problema 4.9. Una sfera di raggio R e momento di inerzia I rotola sul pavimento senza strisciare, con velocità v_0 .

Trovare $v_{0,min}$, per cui la sfera, incontrando uno scalino di altezza h (con $h < R$), riesce a salirci sopra.

(Si assuma che durante l'urto con lo scalino la sfera ruoti attorno al punto di contatto senza strisciare)

Se al posto dello scalino la sfera incontra un cilindro di raggio $r < R$, qual è la condizione per cui riesce a superarlo?

Problema 4.10. Il modo standard per una sfera di rotolare sul piano senza strisciare è che si abbia $\vec{\omega}$ parallela al piano.

i) Esistono altri modi in cui la sfera può rotolare senza strisciare?

ii) Si consideri ora una sfera che rotola senza strisciare e sale poi su un foglio che viene mosso in maniera arbitraria (anche facendo slittare il punto di contatto).

Dopo che la sfera supera il foglio, riprende infine a rotolare senza strisciare, provare che la velocità finale è uguale alla velocità iniziale.

Problema 4.11. Una bacchetta rigida di lunghezza l , massa m e spessore trascurabile, ruota attorno all'asse verticale (a cui è fissato un suo estremo) con velocità angolare costante ω . L'angolo θ tra asse e bacchetta è fisso.

1. Calcolare l'energia cinetica del sistema.
2. Calcolare il vettore momento angolare del sistema $\vec{L}(t)$.
3. Supponendo che a un certo istante il vincolo venga a mancare discutere il moto successivo tenendo conto dell'effetto della gravità.

Problema 4.12. Due aste di lunghezza l_1, l_2 ed e di massa m_1, m_2 sono collegate ad un estremo da una cerniera che permette una rotazione libera. L'altro estremo dell'asta di lunghezza l_1 è fissato all'origine, con un'altra cerniera identica alla precedente.

Inizialmente le due aste sono in quiete, ed entrambe inclinate di un angolo θ_0 rispetto all'orizzontale. Vengono quindi lasciate libere di cadere sotto l'azione di un campo di gravità costante.

Per opportuni valori di l_1, l_2, m_1 e m_2 è possibile che durante la caduta le aste rimangano allineate?

Problema 4.13. Si consideri un lungo, rigido, prisma regolare con base esagonale (in pratica una matita). La massa del prisma è M ed è distribuita uniformemente, il lato della base esagonale è a . Il momento di inerzia rispetto all'asse centrale è $I = \frac{5}{12}Ma^2$.

Il prisma è inizialmente a riposo su un piano inclinato di angolo θ , con asse orizzontale. Si assuma che le facce del prisma siano leggermente concave in modo che solo gli spigoli siano in contatto con il piano (gli effetti della concavità sul momento di inerzia sono trascurabili).

A questo punto al prisma viene data una spinta ed inizia a rotolare. Assumere che grazie all'attrito non ci siano slittamenti e che il prisma non perda contatto con il piano.

1. Se la velocità angolare subito prima che un dato spigolo colpisca il piano è ω_i e la velocità angolare immediatamente dopo l'urto è ω_f , mostrare che si può scrivere

$$\omega_f = s\omega_i$$

Trovare s .

2. L'energia cinetica del prisma subito prima e dopo l'impatto è analogamente K_i, K_f ; mostrare che si può scrivere

$$K_f = rK_i$$

Trovare r .

3. Per fare in modo che avvenga l'impatto successivo, K_i deve essere maggiore di un certo $K_{i,min}$ che possiamo scrivere come

$$K_{i,min} = \lambda Mga$$

Si trovi λ in funzione di θ e r .

4. Se la condizione del punto (c) è soddisfatta, l'energia cinetica, mano a mano che il prisma rotola lungo il piano, tenderà a un valore limite $K_{i,0}$.

Supposto che esista il limite, si mostri che $K_{i,0}$ può essere scritto come

$$K_{i,0} = \alpha Mga$$

Si trovi α in funzione di θ e r .

Problema 4.14. Si consideri una generalizzazione dell'esempio 2.3, dove si vogliono calcolare i tre momenti d'inerzia (lungo x, y, z) di un parallelepipedo di lati a, b, c .

Problema 4.15. Possiamo schematizzare un dipolo elettrico come una sbarretta rigida di lunghezza $\vec{l}$ ai cui capi sono attaccate due cariche, una $+q$ e l'altra $-q$. Il verso di $\vec{l}$ è fatto in modo che il vettore vada dalla carica negativa a quella positiva. Il tutto è immerso in un campo magnetico uniforme $\vec{B} = B_0 \hat{z}$.

1. Leggi di conservazione

- (a) Calcolare la forza totale agente sul dipolo, e il momento torcente rispetto al centro di massa.
Scrivere le equazioni del moto per il centro di massa del dipolo e per la rotazione attorno al centro di massa.
- (b) Dalle equazioni del moto trovare la quantità di moto modificata che si conserva. Denotarla con $\vec{P}$.
Scrivere la conservazione dell'energia meccanica totale E .
- (c) Mostrare che la quantità definita come :

$$J = (\vec{r}_{cm} \times \vec{P} + I\vec{\omega}) \cdot \vec{B}$$

è una costante del moto. (I è il momento di inerzia rispetto al centro di massa)

2. Moto nel piano perpendicolare a $\vec{B}$

- (a) Supponiamo che all'istante iniziale il centro di massa del dipolo è fermo nell'origine, $\vec{l}$ punta nella direzione x e la velocità angolare iniziale è $\omega_0 \hat{z}$.
Se ω_0 è minore di un certo valore critico ω_c , il dipolo non compie un giro completo rispetto al centro di massa.
Trovare ω_c .
- (b) Per un generico $\omega_0 > 0$ qual è la massima distanza d_{max} nella direzione x , che il centro di massa può raggiungere?
- (c) Qual è la tensione sulla sbarretta in funzione di ω ?

Problema 4.16. Tra due cilindri coassiali di raggi a, b ($a < b$) è presente un campo elettrico $\vec{E} = k \frac{\hat{r}}{r}$ e un campo magnetico $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ (asse z coincide con l'asse dei cilindri).

Una particella di massa m e carica q parte con una velocità v radiale dal bordo del cilindro interno.

Per quali v , la particella riesce a raggiungere il cilindro esterno?

Problema 4.17. Un semicilindro di raggio R è posizionato sul terreno con la faccia piana rivolta verso il basso. Su questo viene appoggiata, perpendicolarmente all'asse, un'asta omogenea di lunghezza l e massa m .

L'asta ruota, sotto l'effetto della gravità; grazie all'attrito il punto di contatto non striscia mai. Trovare l'equazione che regola il moto dell'asta. Trovare i punti di equilibrio e interpretare i risultati. Trovare la frequenza delle piccole oscillazioni intorno a quelli stabili.

Problema 4.18. Sia xyz un sistema rotante con velocità angolare $\vec{\Omega} = \Omega \hat{z}$. Il punto medio di un'asta omogenea di massa m e lunghezza l è vincolato nell'origine del sistema. L'asta si trova nel piano $y-z$ ed è libera di ruotare solo attorno all'asse x .

1. Scrivere l'energia dell'asta nel sistema rotante usando come variabile l'angolo tra l'asta e l'asse z ; derivare l'espressione ottenuta per ottenere l'equazione del moto.
2. Ricordando che la seconda legge della dinamica in questo sistema è:

$$m\vec{a} = \vec{F} - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}$$

scrivere i momenti torcenti sull'asta dovuti alle forze fittizie (nella direzione $\hat{x}$); ricavare l'equazione del moto a partire da $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$ e verificare che coincide con quella ottenuta nel punto 1).

(Può essere utile l'identità vettoriale: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$)

3. Trovare la posizione di equilibrio stabile e il periodo delle piccole oscillazioni intorno a tale punto