

Ottica Fisica

Massimo Bilancioni, Elia Pizzati, Paolo Alessandro Xavier Tognini

6 febbraio 2020

Sommario

Nella seguente lezione verranno illustrati alcuni degli aspetti basilari dell'ottica fisica e dell'interpretazione della luce come un'onda elettromagnetica.

1 Introduzione

L'ottica fisica è la branca dell'ottica che studia la luce come fenomeno elettromagnetico. Rappresenta la teoria fondamentale per descrivere fenomeni quali l'interferenza, la diffrazione, la polarizzazione della luce e più in generale tutti i processi fisici per i quali non sono valide le ipotesi semplificative dell'ottica geometrica¹. Poiché il fondamento dell'ottica fisica è proprio il carattere ondulatorio della radiazione elettromagnetica, gran parte dei fenomeni sopra citati si ritrova in ogni contesto fisico nel quale i fenomeni ondulatori giocano un ruolo determinante. Per comprendere a fondo l'ottica fisica, dunque, è necessario fare prima un passo indietro e studiare l'origine dei fenomeni ondulatori.

2 Fenomeni ondulatori

Le onde sono uno dei fenomeni più importanti e ubiqui in fisica. Giocano un ruolo fondamentale non solo in elettromagnetismo, ma anche in meccanica quantistica, in relatività generale, in fluidodinamica e non solo. Permettono di descrivere contesti fisici profondamente diversi (dalle onde del mare alla diffrazione della luce in un cristallo, dall'emissione della luce da un atomo

¹Nell'ottica geometrica si trascura la polarizzazione della luce e si assume che quest'ultima si propaghi mediante raggi rettilinei; la teoria è valida quando la luce interagisce con oggetti di dimensioni molto maggiori della sua lunghezza d'onda.

alla creazione del suono), ma sono descritte da un identico formalismo che porta spesso a risultati non dissimili.

Per questi motivi, prima di addentrarci nello studio delle onde elettromagnetiche, è importante introdurre e consolidare i concetti generali sulla fisica delle onde che andremo successivamente ad applicare.

2.1 Equazione d'onda in una dimensione

Un'onda, fisicamente, è una perturbazione che si propaga nello spazio e nel tempo. Matematicamente, nella sua accezione più generica, è descritta da una funzione $\psi(x, t)$ (x è una generica coordinata spaziale e t è il tempo) che è soluzione di una specifica equazione alle derivate parziali, chiamata proprio *equazione d'onda*. In una dimensione questa equazione si scrive come:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

Non vogliamo dilungarci sui dettagli matematici che stanno dietro a questa equazione. Notiamo solamente due cose importanti. La prima è che la forma più generale della soluzione si scrive come una somma di due *travelling waves*:

$$\psi(x, t) = A h_{\text{right}}(x - ct) + B h_{\text{left}}(x + ct) \quad (2)$$

sostituendo nell'equazione (1) è facile verificare che ne è soluzione. A e B sono due coefficienti arbitrari, mentre $h_{\text{right}}(x)$ e $h_{\text{left}}(x)$ sono due profili unidimensionali qualsiasi. Ciò significa che questa soluzione è formata da due funzioni che, al passare del tempo t , si spostano *rigidamente* a destra o a sinistra lungo la coordinata spaziale x . La velocità di questo moto traslatorio è proprio determinata dal parametro c che compare nell'equazione (1): tale parametro è definito come la velocità a cui si muove l'onda (Figura 1).

(*Travelling waves* nel seguito diventerà sinonimo di onda che si propaga tutta in una certa direzione, con cui si intenderà, anche in tre dimensioni, un profilo che trasla rigidamente a velocità c in quella direzione.)

Una particolare classe di *travelling waves* è quella che si trova scegliendo come profili $h(x)$ delle funzioni sinusoidali:

$$\psi(x, t) = C^+ \sin(kx - \omega t + \phi^+) + C^- \sin(kx + \omega t + \phi^-) \quad \text{con} \quad \omega/k = c \quad (3)$$

Analizzeremo meglio queste funzioni, dette *onde piane*, nel paragrafo successivo; anticipiamo il fatto che giocano un ruolo estremamente importante e saranno le protagoniste in tutto quello che diremo in seguito.

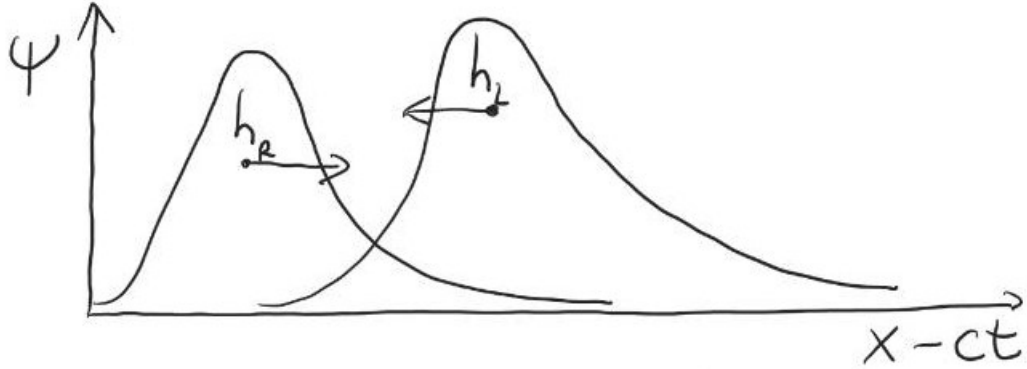


Figura 1

Una seconda osservazione fondamentale è che l'*equazione d'onda* è un'equazione differenziale lineare. Questo significa che vale in *principio di sovrapposizione*: se $\psi_1(x, t)$ e $\psi_2(x, t)$ sono entrambe soluzioni dell'eq. (1), allora anche tutte le funzioni della forma:

$$\psi(x, t) = A \psi_1(x, t) + B \psi_2(x, t) \quad (4)$$

sono ancora soluzioni dell'equazione al variare delle costanti A e B .

2.2 Intensità di un'onda

In fisica ci si trova spesso a confrontarsi non tanto con il valore $\psi(x, t)$ quanto con il modulo quadro di questo: $[\psi(x, t)]^2$. Il motivo è che $[\psi(x, t)]^2$ è proporzionale all'intensità I dell'onda²; a differenza di $\psi(x, t)$ l'intensità ha un significato fisico rilevante: è direttamente legata all'energia trasportata dall'onda, ed è il parametro che usualmente si osserva sperimentalmente (in particolare nel caso delle onde elettromagnetiche).

²In realtà nel caso di un'onda unidimensionale che si propaga tutta nella stessa direzione ($\psi = h_{\text{right}}$) l'intensità è proporzionale a:

$$I \propto \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \right]$$

se però ψ è un'onda sinusoidale si recupera la proporzionalità dell'intensità a $[\psi(x, t)]^2$. Per le onde elettromagnetiche il discorso è leggermente diverso e si illustrerà nel seguito.

Per semplicità assumiamo nel seguito

$$I = [\psi(x, t)]^2 \quad (5)$$

dimenticandoci del fattore di proporzionalità che sarà del tutto irrilevante per i nostri scopi.

L'equazione appena scritta è non lineare (ψ è elevata al quadrato): questo significa che non possiamo sommare linearmente le intensità delle diverse onde. Per calcolare l'intensità dell'onda risultante dobbiamo sommare le diverse onde e poi prendere il modulo quadro del risultato. Cioè, se $\psi_1(x, t)$ e $\psi_2(x, t)$ sono le due onde:

$$I = [\psi_1(x, t) + \psi_2(x, t)]^2 \neq [\psi_1(x, t)]^2 + [\psi_2(x, t)]^2 \quad (6)$$

il fatto che l'onda risultante sia la sovrapposizione lineare delle singole onde mentre l'intensità no, rappresenta il cuore dell'interferenza, che è uno dei fenomeni più importanti in elettromagnetismo.

2.3 Onde piane

Riprendiamo in esame più attentamente il caso delle *onde piane*, concentrando su quelle che si muovono verso le x positive.

$$\psi(x, t) = C \sin(kx - \omega t + \phi) \quad (7)$$

Notiamo che l'equazione (7) può essere anche scritta nella forma:

$$\psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t) + B \cos(kx - \omega t) \quad (8)$$

Le definizioni nelle eq. (7) e (8) sono chiaramente legate dalle relazioni:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \tan \phi = \frac{B}{A}$$

Rifacendoci alla forma di eq. (7) introduciamo le quantità fondamentali che descrivono un'onda:

- k è il *numero d'onda*; è legato alla *lunghezza d'onda* λ dalla relazione:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

la lunghezza d'onda è definita come la minima lunghezza per la quale, a tempo t fissato, l'onda $\psi(x, t)$ risulta periodica in x

$$\psi(x + \lambda, t) = \psi(x, t)$$

- ω è la *frequenza* (o più propriamente la *frequenza angolare* o *pulsazione*) dell'onda; questa grandezza è legata al *periodo* T dalla relazione:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

analogamente al caso precedente, il periodo T è definito, a coordinata x fissata, come il tempo minimo per il quale risulta

$$\psi(x, t + T) = \psi(x, t)$$

notiamo che la frequenza vera e propria è usualmente definita come $f = 1/T = \omega/2\pi$;

- Da $\lambda f = c$, segue immediatamente

$$\omega = ck$$

che è nota come *relazione di dispersione*; questa relazione afferma semplicemente che le onde piane si muovono a velocità $c = \omega/k$;

- C è l'ampiezza dell'onda piana; rappresenta semplicemente il massimo valore che assume l'onda durante il suo percorso;
- ϕ è la fase dell'onda (una fase positiva, trasla il grafico verso sinistra); è sostanzialmente irrilevante quando abbiamo una sola onda, ma diventa molto importante quando si hanno più onde diverse ognuna con una diversa fase, lo vedremo quando si tratteranno fenomeni di interferenza.
- $I = [\psi(x, t)]^2 = C^2 \sin^2(kx - \omega t + \phi)$ è l'intensità istantanea dell'onda in un certo punto a un dato istante. In genere però si è interessati alla media dell'intensità sul periodo. Infatti gli apparati sperimentali quando fanno una misura, prendono in realtà l'intensità media su un tempo T_I che è detto tempo di integrazione. Per le onde elettromagnetiche generalmente ³ $T_I \gg T$ cosicché lo strumento rileva solo una media dell'intensità pari a

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2} C^2$$

³Tempi di integrazione per strumenti ordinari sono dell'ordine di $T_I \sim 1\text{ms}$ mentre già per le microonde, che sono quelle con frequenza minore dopo le onde radio, abbiamo $T < 10^{-10}\text{s}$

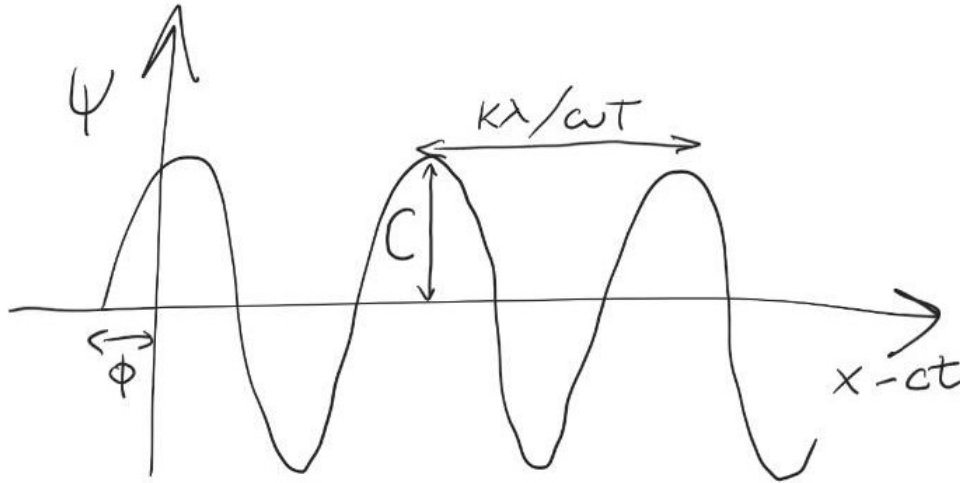


Figura 2: grafico di un'onda piana.

Perché le onde piane sono importanti? Vogliamo ora approfondire meglio il legame tra le *onde piane* e le *travelling waves*. Abbiamo già notato, in Sez. 2.1, che le onde piane scritte nella forma di eq. (3) sono a tutti gli effetti delle travelling waves. Dunque le onde piane sembrano essere solo un piccolissimo sottoinsieme delle possibili soluzioni dell'equazione d'onda: perché dedicarci tanta attenzione? Il motivo è molto semplice: dobbiamo ricordarci del principio di sovrapposizione!

Si può dimostrare, infatti, che ogni funzione è scrivibile come una somma di sinusoidi, ognuna con una particolare fase e una particolare ampiezza. Questo fatto è legato ai concetti matematici di *serie* (e *trasformata*) di *Fourier*, che qui non approfondiremo.

Se uniamo questa informazione con il principio di sovrapposizione possiamo considerare le sinusoidi (cioè le onde piane) come soluzioni molto semplici che se sommate permettono di costruire tutte le altre possibili soluzioni all'equazione d'onda. In formule, vale la seguente espressione:

$$\psi(x, t) = \sum_{k_i} C(k_i) \sin(k_i x - \omega_i t + \phi(k_i))$$

passando al limite continuo la somma diventa un integrale

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(k) \sin(kx - \omega t + \phi(k)) dk \quad (9)$$

per ogni onda piana che entra nella somma è sottointeso che valga la relazione di dispersione $\omega(k) = c|k|$. Quello che si vuole intendere con questa espressione è che ogni generica onda $\psi(x, t)$ può essere vista come somma di onde piane scegliendo i parametri $C(k), \phi(k)$ nel giusto modo.

Notiamo dalla (9) che le *travelling waves* contenute in $\psi(x, t)$ si possono scrivere come la somma delle onde piane che si propagano tutte a destra e tutte a sinistra:

$$h_{\text{right}}(x, t) = \int_0^{+\infty} C(k) \sin(kx - \omega t + \phi(k)) dk \quad (10)$$

$$h_{\text{left}}(x, t) = \int_{-\infty}^0 C(k) \sin(kx - \omega t + \phi(k)) dk \quad (11)$$

le *travelling waves* sono caratterizzate da una velocità di propagazione, ma non hanno una frequenza (o un numero d'onda) definiti. Per questo, le onde piane si dicono spesso anche *onde monocromatiche*, perché sono le uniche per le quali si può definire una singola frequenza che le caratterizza⁴.

Può sembrare controintuitivo che la somma di molte onde piane (cioè di sinusoidi) possa creare tutte le altre onde. Indagare questo aspetto approfonditamente non è possibile a questo livello. Discutiamo però due casi particolari in cui si mostra cosa succede quando si sommano sinusoidi con frequenza diversa.

Esempio 2.1 (Somma di due sinusoidi). Il caso più semplice di tutti è quello in cui sommo due sole sinusoidi con stessa ampiezza ma frequenze ω_1, ω_2 diverse.

$$\psi(x, t) = \sin(k_1 x - \omega_1 t) + \sin(k_2 x - \omega_2 t) \quad (12)$$

Se indichiamo la loro somma e la loro differenza rispettivamente con $\omega_s = \omega_1 + \omega_2, \omega_d = |\omega_1 - \omega_2|$.

Usando la formula di prostaferesi $2 \sin A \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$ (che si ottiene dalle formule di addizione dei seni) possiamo riscrivere $\psi(x, t)$ come:

$$\psi(x, t) = 2 \left[\sin \left(\frac{k_s x - \omega_s t}{2} \right) \cos \left(\frac{k_d x - \omega_d t}{2} \right) \right] \quad (13)$$

⁴Per essere più precisi il concetto di *onde piane* e quello di *onde monocromatiche* presentano sfumature di significato leggermente diverse. Nel primo caso quello che si vuole mettere in evidenza è che l'onda si propaga come una sinusoide *indefinitamente* nello spazio e nel tempo. Nel secondo caso si vuole porre l'accento sul fatto che l'onda abbia una frequenza ben determinata e non sia una sovrapposizione di onde con frequenza diversa. Dimostrare che queste due definizioni sono equivalenti non è banale, ma per quanto ci riguarda possiamo trattare i due termini come sinonimi senza alcun problema.

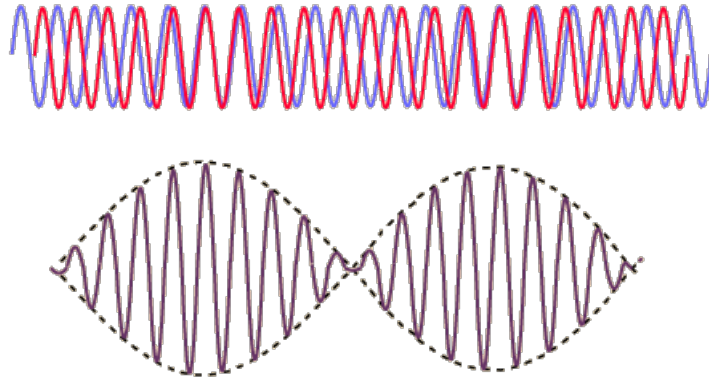


Figura 3: battimenti: l'involuppo ha frequenza ω_d mentre l'oscillazione ha frequenza ω_s

Dunque $\psi(x, t)$ diventa il prodotto di due sinusoidi⁵.

Cosa succede se le due frequenze sono molto vicine, ossia se $\omega_s \gg \omega_d$?

In tal caso il $\cos\left(\frac{k_d x - \omega_d t}{2}\right)$ si comporta da involuppo per la funzione rapidamente oscillante $\sin\left(\frac{k_s x - \omega_s t}{2}\right)$. Questo è il fenomeno dei battimenti. Riportiamo in Figura 3 un esempio di battimenti.

Il fenomeno dell'interferenza, a cui dedicheremo molta attenzione in Sez. 4, ha un'origine diversa: le onde piane che vanno a sovrapporsi hanno la stessa frequenza ma fase relativa non nulla.

□

Esempio 2.2 (Pacchetto d'onda Gaussiano). Se nell'eq. (9) scegliamo

$$C(k) = e^{-(k-k_0)^2 \Delta^2} \quad \text{e} \quad \phi(k) = 0$$

svolgendo l'integrale, senza entrare nei calcoli (che vengono discussi in dettaglio in uno dei problemi finali) si ottiene una funzione d'onda proporzionale a

$$\psi(x, t) \propto e^{-\frac{(x-ct)^2}{4\Delta^2}} \sin(k_0 x - \omega_0 t)$$

cioè una senoide di frequenza $\omega_0 = c k_0$ modulata da un'esponenziale: cioè un pacchetto Gaussiano di larghezza tipica $\sim \Delta$. L'argomento dell'esponenziale ci dice che il pacchetto trasla nel tempo a velocità c verso destra. In figura 4 viene mostrato un esempio.

⁵Notiamo che la relazione di dispersione continua a valere anche per queste sinusoidi, nella forma: $\omega_s = c k_s$ e $\omega_d = c k_d$

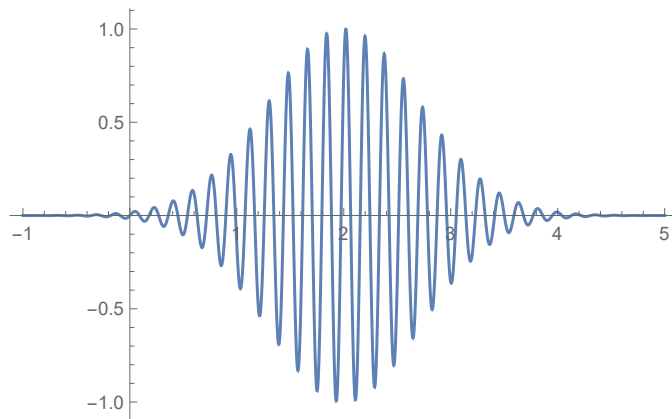


Figura 4: Pacchetto d'onda Gaussiano

Notiamo che sommando tante sinusoidi non limitate nello spazio abbiamo costruito un'onda che invece è ben limitata. Ciò è possibile perché una somma di sinusoidi in controfase dà come risultato un'onda di ampiezza (e intensità) nulla.

Infine, nel limite di $\Delta \rightarrow \infty$, $C(k)$ è molto concentrata sul valore $k = k_0$: si riottiene così la sinusoidale classica di frequenza ω_0 .

□

Per i motivi elencati in questo paragrafo, d'ora in poi parleremo quasi solo di onde piane. Se le equazioni della fisica che stiamo considerando sono lineari – è il caso, per esempio, delle equazioni di Maxwell in elettromagnetismo – l'evoluzione di un'onda di forma qualunque si può ottenere come la somma delle onde piane che la compongono evolute nel tempo. Quindi se sappiamo il comportamento nel tempo di tutte le onde piane in un dato problema, sappiamo anche il comportamento di qualsiasi altra forma d'onda!⁶

Una situazione in cui questo procedimento è particolarmente illuminante, è la propagazione della luce nella materia: le equazioni (per piccoli campi $\mathbf{E}, \mathbf{B}$) restano lineari, ma diventano dipendenti dalla frequenza; si pensi, ad esempio, a come onde luminose di frequenza diversa vengano diffratte ad angoli diversi. A causa di questa dipendenza dalla frequenza, l'evoluzione di un'onda di forma arbitraria diventa molto complicata, mentre quella di un'onda monocromatica rimane relativamente semplice. Conoscere come si comportano le onde piane in queste situazioni è molto utile per avere un'idea qualitativa di come si comportano forme d'onda più complesse.

⁶Questo è vero in linea di principio: in realtà spesso non è facile fare la somma delle onde piane dopo l'evoluzione per trovare l'evoluta della forma d'onda di partenza.

2.4 Introduzione alla notazione complessa

Vogliamo ora introdurre una notazione per le onde piane che è di estrema utilità quando tratteremo i fenomeni di interferenza, e ci semplificherà non poco la vita quando dovremo sommare diverse onde piane con frequenze identiche. Sottolineiamo che quanto diremo qui rappresenta solo un approfondimento matematico che ci sarà di grande utilità nelle prossime sezioni, ma non aggiunge nulla a quanto detto precedentemente in termini di fisica.

Si tratta semplicemente di un piccolo trucco, che si può riassumere nella semplice considerazione: *sommare e moltiplicare tra loro esponenziali è molto più semplice che sommare e moltiplicare sinusoidi*. Come sappiamo, esiste una stretta relazione tra sinusoidi ed esponenziali complessi, riassumibile dalle formule:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (14)$$

Trasformando seni e coseni in esponenziali complessi si possono dimostrare con relativa semplicità molte formule trigonometriche che sono altrimenti difficili da ricavare. Un esempio emblematico è quello delle formule di somma per seni e coseni: riportiamo qui a titolo di esempio la formula del prodotto di seni.

$$\sin x \sin y = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) \left(\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \right) = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y)) \quad (15)$$

L'ultimo passaggio si ottiene semplicemente svolgendo il prodotto tra le parentesi e usando la nota proprietà degli esponenziali $e^x e^y = e^{x+y}$.

(Se z è un numero complesso usiamo nel seguito $\Re(z)$ per indicare la parte reale e $\Im(z)$ per la parte immaginaria.)

Per descrivere le onde si usa un'identità ancora più semplice, ricavabile direttamente dalla prima eq. (14):

$$\cos x = \Re(e^{ix}) \quad (16)$$

Infatti, usando per le onde piane la forma di eq. (8) (il seno si può trasformare in coseno ridefinendo la fase), possiamo scrivere:

$$\psi(x, t) = C \cos(kx - \omega t + \phi) = \Re \left(C e^{i\phi} e^{i(kx - \omega t)} \right) = \Re \left(\tilde{C} e^{i(kx - \omega t)} \right) \quad (17)$$

L'ultimo passaggio mostra che volendo si può riassumere tutto in un unico parametro complesso $\tilde{C} \in \mathbb{C}$ che raccoglie insieme l'ampiezza ($C = |\tilde{C}|$) e la fase ($\tan \phi = \Im \tilde{C} / \Re \tilde{C}$) dell'onda.

Usando poi la linearità della parte reale ($\Re(Ax + By) = A\Re(x) + B\Re(y)$) possiamo scrivere una somma di onde piane come la parte reale di una somma di esponenziali complessi. Più in generale, possiamo combinare a piacere tutte le diverse onde che sono presenti nel sistema trattandole a tutti gli effetti come esponenziali complessi. Dobbiamo poi ricordarci, per tornare a recuperare un risultato che sia fisicamente significativo, di prendere la parte reale del risultato alla fine.

L'uso degli esponenziali complessi per rappresentare le onde piane è talmente frequente che spesso si sottintende l'operazione di parte reale: ci si dimentica che le onde sono a tutti gli effetti quantità reali e le si tratta sempre come numeri complessi. Questo non deve confondervi: è solo un artificio matematico, non c'è nulla di fisicamente significativo nel trattare quantità complesse. Un discorso a parte merita la meccanica quantistica, dove l'equazione fondamentale (l'*equazione di Schrodinger*) è definita in campo complesso: in questo caso trattare le soluzioni come numeri complessi è perfettamente lecito.

Abbiamo detto che l'operazione di parte reale è lineare, e dunque si comporta bene con la somma. Non vale lo stesso per il prodotto: infatti $\Re(xy) \neq \Re(x)\Re(y)$ (se volete convincervene facilmente prendete due numeri immaginari puri). Questa osservazione ci deve far scattare un campanello d'allarme: finché stiamo sommando onde piane va tutto bene, ma quando iniziamo a moltiplicarle tra loro non possiamo più trattarle come esponenziali complessi, e dobbiamo tornare a considerarle seni e coseni. Il caso tipico in cui si devono moltiplicare onde piane è nel calcolo delle intensità ($I = [\psi(x, t)]^2$). In definitiva, vale questo semplice consiglio: la notazione con esponenziali complessi è estremamente utile e conviene usarla sempre nel calcolo delle ampiezze; nel passare alle intensità, però, bisogna fermarsi e tornare alla notazione reale.

In realtà negli esempi che vedremo nel seguito sarà immediato passare dalla notazione complessa all'intensità. Sappiamo che l'intensità mediata sul periodo per un'onda piana è

$$\psi(x, t) = \Re \left(C e^{i\phi} e^{i(kx - \omega t)} \right) \rightarrow \langle I \rangle = C^2/2;$$

se cerchiamo la media temporale dell'intensità per un'onda del tipo

$$\psi(x, t) = \Re \left(C f(x) e^{i\phi} e^{i(kx - \omega t)} \right)$$

con $f(x)$ funzione reale, è facile allora convincersi che questa è

$$\langle I \rangle = \frac{C^2 f^2(x)}{2}$$

Esempio 2.3. Nel caso foste ancora poco convinti dalle potenzialità della notazione complessa, presentiamo il seguente semplice esempio che ci sarà utile in seguito (Sez. 4): consideriamo N onde piane con stessa frequenza ω e stessa ampiezza C , ma con diverse fasi $\phi_1, \dots, \phi_N$. Vogliamo sommare tutte queste onde piane e studiare l'onda risultante.

Se scriviamo le varie onde come sinusoidi il risultato non sembra illuminante:

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^N C \cos(kx - \omega t + \phi_n) \quad (18)$$

Passando alla notazione complessa, tuttavia, ci accorgiamo con estrema semplicità che l'onda risultante è ancora una senoide, con la stessa frequenza ω ma con ampiezza diversa. Infatti:

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^N \Re \left(C e^{i(kx - \omega t)} e^{i\phi_n} \right) = \Re \left(C e^{i(kx - \omega t)} \sum_{n=1}^N e^{i\phi_n} \right) \quad (19)$$

La somma dei diversi esponenziali complessi $e^{i\phi_n}$ è a sua volta un numero complesso, che possiamo scomporre in modulo e fase:

$$\sum_{j=1}^N e^{i\phi_j} = D e^{i\psi} \quad (20)$$

Dunque, esplicitando la parte reale, otteniamo infine:

$$\psi(x, t) = \Re \left(C D e^{i(kx - \omega t)} e^{i\psi} \right) = C D \cos(kx - \omega t + \psi) \quad (21)$$

Nel caso in cui $\phi_n = n\phi_0$, la somma degli esponenziali complessi si scrive esplicitamente perché è una serie geometrica. Cioè, definendo $z = e^{i\phi_0}$, vale:

$$\sum_{n=1}^N e^{in\phi_0} = \sum_{n=1}^N z^n = z \frac{z^N - 1}{z - 1} = \frac{z^{N/2+1}}{z^{1/2}} \frac{z^{N/2} - z^{-N/2}}{z^{1/2} - z^{-1/2}} = e^{i(N+1)\phi_0/2} \frac{\sin(N\phi_0/2)}{\sin(\phi_0/2)} \quad (22)$$

L'ampiezza dell'onda risultante è quindi scrivibile in funzione dell'ampiezza delle diverse onde piane come:

$$C_{\text{tot}} = C \frac{\sin(N\phi_0/2)}{\sin(\phi_0/2)} \quad (23)$$

Reincontreremo questo calcolo parlando dell'interferenza da N fenditure in Sezione 4.2. □

2.5 Equazione d'onda in tre dimensioni

Vediamo ora alcune generalizzazioni importanti dell'equazione d'onda (eq. (1)). In fisica abbiamo a che fare con uno spazio tridimensionale: in questo caso, alle derivate lungo la direzione x dobbiamo sommare anche le derivate lungo le due direzioni ortogonali. Definiamo dunque l'operatore differenziale *Laplaciano* come quello che in coordinate cartesiane (x, y, z) ha forma:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (24)$$

La generalizzazione tridimensionale dell'equazione d'onda è:

$$\nabla^2 f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad (25)$$

Questa equazione ha diverse soluzioni importanti. Le *onde piane* sono ancora quelle fondamentali, con le quali possiamo costruire tutte le altre soluzioni. Ovviamente in tre dimensioni abbiamo molte più onde piane; questo è dovuto al fatto che se in 1D la direzione è fissata in 3D si ha libertà sulla direzione in cui si propaga l'onda piana.

Per le onde piane dirette lungo l'asse x non abbiamo alcuna modifica rispetto al caso 1D, infatti

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(\mathbf{r}, t) = C \cos(kx - \omega t + \phi)$$

continua ad essere soluzione; questo si capisce facilmente una volta che ci si accorge che le derivate lungo y e z sono nulle e l'equazione d'onda si riduce a quella unidimensionale.

È altrettanto facile scrivere quelle che si propagano lungo y e z :

$$\psi(\mathbf{r}, t) = C \cos(ky - \omega t + \phi)$$

$$\psi(\mathbf{r}, t) = C \cos(kz - \omega t + \phi)$$

Possiamo allora immaginare di costruire quelle in direzione generica come

$$\psi(\mathbf{r}, t) = C \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \phi)$$

Se inseriamo $\psi(\mathbf{r}, t)$ dentro l'eq. (25) risulta che deve valere

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2/c^2$$

Introducendo il vettore $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ possiamo riscrivere la funzione d'onda e la relazione di dispersione per un'onda piana:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = C \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi)$$

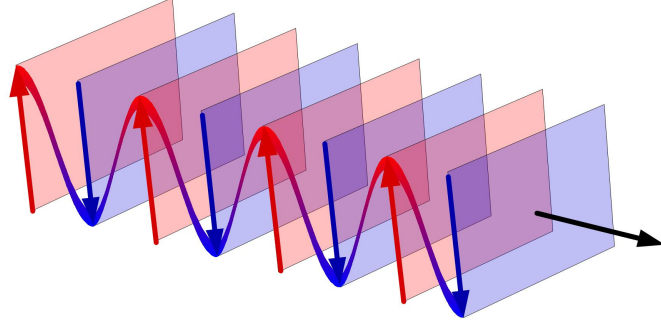


Figura 5: La freccia nera indica il vettore d'onda $\mathbf{k}$, i piani sono quelli a fase costante.

$$\omega(k)^2 = c^2 |\mathbf{k}|^2 \quad (26)$$

$\mathbf{k}$ è detto vettore d'onda ed è la generalizzazione tridimensionale del numero d'onda.

Ci chiediamo ora: in quale direzione si propaga tale onda? per rispondere a questa domanda basta individuare nello spazio (a tempo fissato) i piani a fase costante, cioè quelli in cui la funzione ψ è costante; si vede abbastanza velocemente che questi sono quelli perpendicolari al vettore $\mathbf{k}$, quindi abbiamo scoperto che un'onda piana in tre dimensioni sarà semplicemente un'onda unidimensionale che si propaga lungo la direzione $\hat{\mathbf{k}}$ (Fig.5). Anche per le onde piane 3D introduciamo la notazione complessa:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = C \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi) = C e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) + i\phi} \quad (27)$$

dove per brevità abbiamo sottinteso l'operazione di parte reale.

Esistono anche altre soluzioni semplici e molto ricorrenti nel caso dell'equazione d'onda in tre dimensioni (eq. (27)). Notiamo che queste altre soluzioni sono in linea di principio superflue. Una somma di onde piane con diversi vettori d'onda $\mathbf{k}$, infatti, come nel caso 1D può descrivere tutte le altre soluzioni; detto più esplicitamente ogni funzione d'onda tridimensionale si può scrivere come (passiamo anche in questo caso alla più comoda notazione complessa):

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int C(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) + i\phi(\mathbf{k})} d^3\mathbf{k} \quad (28)$$

Tuttavia, altre soluzioni diverse dalle onde piane possono essere utili perché, rispettando particolari simmetrie. Le possiamo considerare quando l'equazione descrive sistemi particolarmente semplici. È il caso delle *onde sferiche*.

Un'onda sferica ha la forma:

$$\psi(r, t) = \frac{C}{r} e^{i(kr - \omega t)} \quad (29)$$

(r è la coordinata radiale $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e k è il modulo del vettore $\mathbf{k}$) questo tipo di onde è molto utile per la descrizione dell'emissione di radiazione elettromagnetica da parte di una sorgente puntiforme. In questa lezione accenneremo molto brevemente a queste particolari soluzioni (oppure alle analoghe *onde cilindriche*) e alla fine ci ridurremo sempre a considerare onde piane; la ragione è che un'onda sferica è ben approssimabile da un'onda piana se ci mettiamo a distanze molto grandi dal centro ($r \gg \lambda$).

2.6 Equazione d'onda nel caso vettoriale e polarizzazioni

In fisica le quantità si dividono in *scalari* e *vettoriali* (non consideriamo oggetti più complessi). Gli scalari sono le quantità che non variano cambiando sistema di riferimento. Quando scriviamo un'equazione per ψ (con ψ quantità fisica significativa, per esempio la densità ρ oppure la pressione P) intendiamo implicitamente che quella quantità è uno scalare.

I vettori, invece, sono quelle quantità che si comportano, quando ruotiamo il nostro sistema di riferimento, in maniera analoga al vettore posizione $\mathbf{r} = (x, y, z)$. In elettromagnetismo, e dunque in ottica fisica, abbiamo spesso a che fare con vettori e non con quantità scalari (per esempio i campi elettrici e magnetici $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$). Questo ci costringe a considerare *equazioni vettoriali*, cioè equazioni la cui incognita è un vettore $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$. Nel caso dell'equazione d'onda ciò significa che:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (30)$$

Non dobbiamo lasciarci spaventare da quest'equazione. Basta infatti scrivere il vettore in componenti, e considerare separatamente le equazioni per le diverse componenti. Otteniamo quindi tre equazioni differenti, le cui soluzioni sono sempre somme di onde piane e la generica onda piana nel caso vettoriale ha la forma:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_0 e^{i\phi} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (31)$$

In sostanza, le soluzioni non cambiano nel passare dal caso scalare a quello vettoriale. È per questo che spesso in elettromagnetismo si usa l'*approssimazione scalare*: se non siamo interessati alla natura vettoriale dei campi (perché ad esempio sono tutti nella stessa direzione), possiamo considerare solo i moduli dei vettori e trattare tutte le equazioni come se fossero scalari.

Nel caso vettoriali c'è un'importante proprietà che hanno le onde piane: si tratta della *polarizzazione*. Possiamo sempre scomporre il vettore $\mathbf{A}_0$ in eq. (31) in una componente lungo la direzione di propagazione $\hat{\mathbf{k}}$ e in una componente ortogonale.

Possiamo dunque distinguere due tipi di onde: le *onde longitudinali* sono le onde per le quali il vettore $\mathbf{A}_0$ è parallelo alla direzione di propagazione; le *onde trasversali*, invece, sono quelle per le quali il vettore $\mathbf{A}_0$ è perpendicolare alla direzione di propagazione. Chiaramente, esistono due direzioni indipendenti perpendicolari al vettore $\hat{\mathbf{k}}$: si dice che esistono due possibili *polarizzazioni trasversali* indipendenti dell'onda (Fig.6). Allo stesso identico modo si può parlare di polarizzazione per un'onda qualunque che si propaga in una specifica direzione $\hat{\mathbf{n}}$ ⁷; tuttavia se per le onde piane esiste una direzione ben definita in cui oscilla $\mathbf{A}$, per onde più complicate non è detto. In particolare se la direzione di $\mathbf{A}$ varia con la posizione si dice che l'onda non è linearmente polarizzata.

Infine, come è facile immaginare, nel caso vettoriale, l'intensità totale in un certo punto dello spazio è la somma delle intensità delle tre diverse componenti, cioè:

$$I = \frac{1}{2} |\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)|^2$$

3 Onde elettromagnetiche

Le equazioni di Maxwell prevedono che i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ in *assenza di sorgenti*, cioè nel vuoto, soddisfino un'equazione identica ad eq. (30):

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (32)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (33)$$

c rappresenta in questo caso la velocità della luce. È stato il più grande risultato della fisica dell'800 l'identificazione di queste perturbazioni del campo elettromagnetico come onde luminose.

La particolarità delle onde elettromagnetiche è per l'appunto che si propagano nel vuoto (a differenza di tutte le onde di materia) e sono un'oscillazione

⁷Cioè una qualsiasi somma di onde piane che hanno $\mathbf{k}$ parallelo ad $\hat{\mathbf{n}}$, ossia:

$$\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{n}} \quad \text{e} \quad k > 0$$

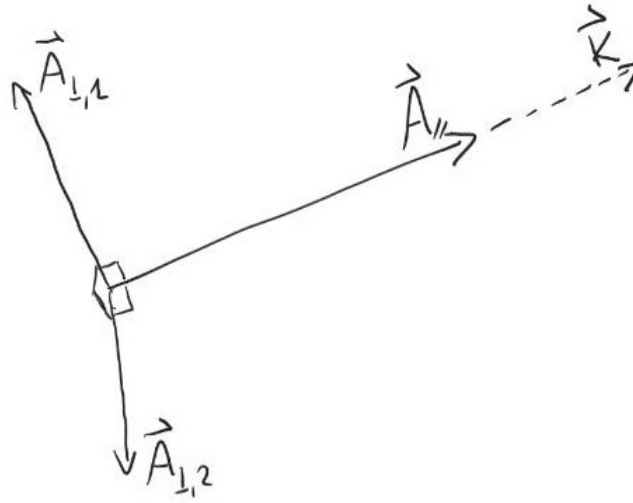


Figura 6: un esempio delle tre polarizzazioni possibili dato il vettore d'onda $\mathbf{k}$

accoppiata di entrambi i campi: non si può avere un campo elettrico oscillante senza un campo magnetico.

Onde Piane EM Veniamo ora alle onde piane elettromagnetiche: un'onda piana di questo tipo sarà descritta da

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i\phi} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i\phi} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (34)$$

tutte le caratteristiche di queste onde, che enunciamo ora, derivano dalle equazioni di Maxwell a cui esse devono giustamente obbedire.

- $\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0 \perp \mathbf{k}$: i campi non hanno componenti nella direzione di propagazione;
- $|\mathbf{E}_0| = c|\mathbf{B}_0|$;
- vale anche $\mathbf{E}_0 \perp \mathbf{B}_0$, più precisamente:

$$\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0 = c\mathbf{B}_0$$

quindi $\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{k}$ sono una terna mutuamente ortogonale;

- i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, come si è scritto nell'eq. (34), oscillano in fase e di conseguenza vale più in generale in tutti i punti dello spazio

$$|\mathbf{E}| = c|\mathbf{B}|$$

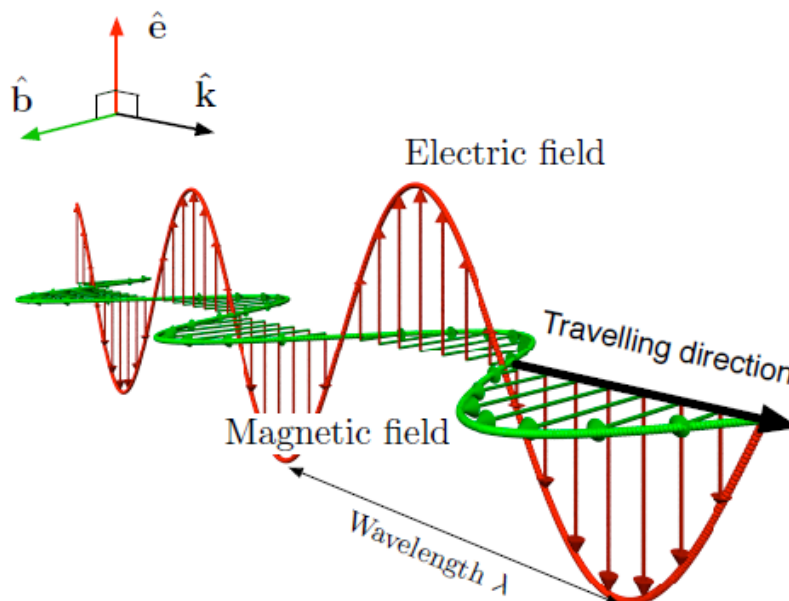


Figura 7

sottolineiamo che il fatto che oscillino in fase **non** è così scontato a priori;

(In Fig.7 sono riassunte le caratteristiche appena dette)

La prima deriva dal fatto che $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ devono avere flusso nullo⁸ in ogni regione dello spazio.

Le ultime tre sono un po' più difficili e derivano tutte dalla Legge dell'induzione elettromagnetica. La dimostrazione dettagliata di queste quattro proprietà verrà data nella lezione di Elettrodinamica. Si può mostrare abbastanza facilmente che continuano a valere per un'onda qualunque che si propaga nella direzione $\hat{n}$.

Le onde EM essendo onde vettoriali sono caratterizzate da polarizzazioni. Per convenzione, si fa coincidere la polarizzazione con la direzione in cui oscilla il campo elettrico (se questa esiste). Per quanto detto sopra si possono avere solo le due polarizzazioni trasversali.

L'intensità di un'onda EM può essere definita come il modulo del vettore di Poynting

$$I = |\mathbf{S}| = \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{E} \times \mathbf{B}|$$

⁸Visto che siamo nel vuoto, l'assenza di carica impone che il flusso del campo $\mathbf{E}$ sia nullo.

Per una qualunque onda che si propaga nella direzione $\hat{\mathbf{n}}$, per quanto detto sopra, $\mathbf{B}$ è perpendicolare ad $\mathbf{E}$ e $|\mathbf{E}| = c|\mathbf{B}|$. Segue allora **per questo tipo di onde EM** che l'intensità

$$I = \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{E} \times \mathbf{B}| \propto |\mathbf{E}|^2$$

è proporzionale al modulo quadro del campo $\mathbf{E}$ come si era detto nella sezione 4.

Prima passare a trattare l'interferenza tra onde, concludiamo la sezione analizzando come cambia l'intensità per onde EM (vettoriali) quando le si polarizza in una certa direzione.

3.1 Polarizzatori

Alcuni materiali assorbono la radiazione in modo diverso a seconda della polarizzazione. Un'applicazione comune di questi consiste nei polarizzatori che idealmente bloccano in modo totale la radiazione con una certa polarizzazione e lasciano passare indisturbata quella con polarizzazione perpendicolare.

Supponiamo di avere un'onda piana polarizzata in una direzione che forma un angolo θ con l'asse del polarizzatore (l'asse è la direzione in cui è polarizzato l'onda uscente). Quanto vale l'intensità dell'onda uscente se quella entrante aveva intensità I ? Solo la componente del campo elettrico parallela all'asse passa; questa vale in modulo

$$E \cos \theta$$

l'intensità è proporzionale al modulo quadro del campo elettrico, quindi l'intensità dell'onda uscente vale

$$I_{\text{out}} = I_{\text{in}} \cos^2 \theta$$

questa è la Legge di Malus (vediamo che torna nei due casi limite in cui passa tutta o non passa nulla).

Per polarizzare un fascio di luce con polarizzazione casuale, esattamente metà dell'energia del fascio iniziale viene sprecata.

Esempio 3.1 (Polarizzatori in serie). Se si mettono due polarizzatori (ideali) a una certa distanza l'uno dall'altro, paralleli e con assi perpendicolari, succede che qualunque onda mandata in ingresso non ottenga nulla in uscita.

1. se però invio un'onda polarizzata lungo l'asse del primo polarizzatore dopo averne introdotto un terzo nel mezzo parallelo ai due precedenti posso fare in modo che passi qualcosa alla fine. In quale direzione va messo il terzo polarizzatore se si vuole massimizzare l'intensità trasmessa?

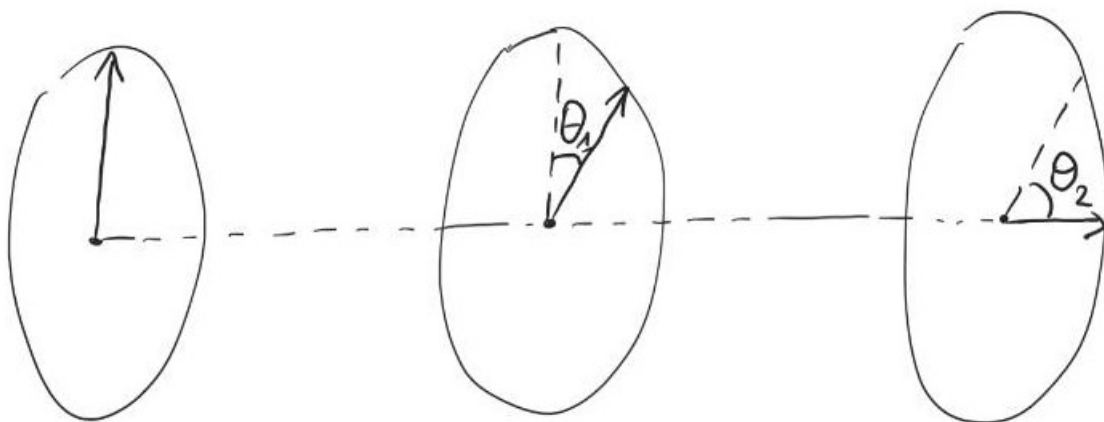


Figura 8

2. se si inseriscono $N - 1$ (con $N \gg 1$) polarizzatori, paralleli ai primi due tutti ruotati rispetto al precedente, dello stesso angolo

$$\Delta\theta = \frac{\pi}{2N}$$

quanto vale l'intensità del fascio uscente (al primo ordine nel parametro $1/N$), se come prima invio un'onda polarizzata lungo l'asse del primo?

Soluzione 3.1. 1. Se chiamiamo con θ_1 e θ_2 l'angolo tra gli assi di polarizzatori adiacenti (Fig.8), si ha che l'intensità uscente è

$$I_{\text{out}} = \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 I_{\text{in}}$$

vale $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ da cui

$$\cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 = \cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_1 = \frac{1}{4} \sin^2(2\theta_1)$$

il massimo si ha per $\theta_1 = \theta_2 = \pi/4$

$$I_{\text{out}} = \frac{1}{4} I_{\text{in}}$$

Un'analogia può essere ottenuta sostituendo l'onda con una pallina (la direzione della sua velocità rappresenta la polarizzazione) e i polarizzatori con dei muri che dissipano, quando la pallina ci sbatte contro, tutto l'impulso perpendicolare al muro lasciando inalterato quello parallelo. L'intensità diventa l'energia della pallina.

La serie dei due polarizzatori è rappresentata in questo modo da due muri perpendicolari (Fig.9) Mentre quella col terzo polarizzatore è mostrato in figura (Fig.10)

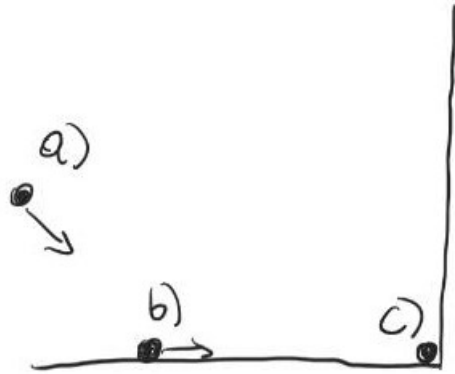


Figura 9: Due polarizzatori ortogonali: a) pallina con impulso iniziale = polarizzazione dell'onda incidente; b) pallina con impulso parallelo al muro = onda incidente dopo il primo polarizzatore; c) la pallina è ferma = l'intensità dell'onda uscente è nulla.

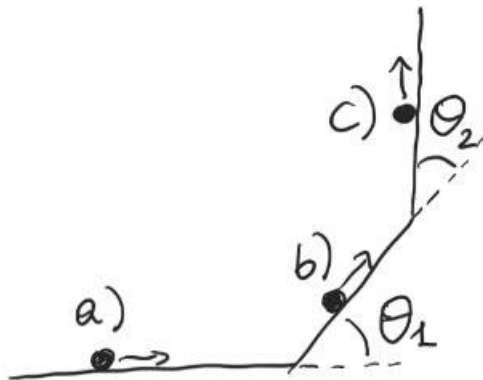


Figura 10: Serie di tre polarizzatori: a) dopo il primo polarizzatore; b) dopo il secondo polarizzatore; c) la velocità della pallina è non nulla, dopo il terzo polarizzatore si ha un'intensità non nulla.

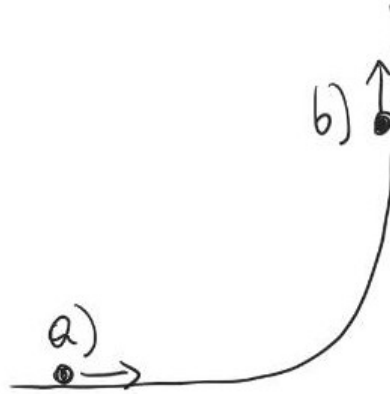


Figura 11: Serie di polarizzatori infinita: a) onda incidente; b) la pallina alla fine ha la stessa energia di quella iniziale = l'intensità dell'onda uscente è uguale all'intensità di quella entrante.

2. L'intensità uscente vale ora

$$I_{\text{out}} = (\cos^2(\Delta\theta)) I_{\text{in}} \simeq \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{2}\right)^{2N} I_{\text{in}} \simeq (1 - N\Delta\theta^2) I_{\text{in}} = \left(1 - \frac{\pi^2}{4N}\right) I_{\text{in}}$$

per $N \rightarrow \infty$, $I_{\text{out}} = I_{\text{in}}$ e l'unico effetto della serie di polarizzatori è quello di ruotare la polarizzazione entrante.

Secondo l'analogia mostrata al punto precedente questo caso corrisponde alla Fig.11

4 Interferenza

Come abbiamo detto tutti i fenomeni di interferenza derivano dal fatto che prese due onde in un punto non sono le intensità a sommarsi linearmente ma le $\psi_i(x, t)$. Mostreremo alcuni esempi lavorando per semplicità con onde monocromatiche scalari.

È bene chiarirsi cosa succede nel caso più semplice: l'interferenza tra due onde piane monocromatiche.

Esempio 4.1 (Interferenza tra due onde). Date due onde monocromatiche

$$e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - i\omega t} \quad e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} - i\omega t + i\phi}$$

trovare l'intensità media in un punto qualsiasi dello spazio.

1. Cosa succede se hanno frequenze diverse?

2. Cosa succede se la prima ha ampiezza A diversa dalla seconda?

$$Ae^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - i\omega t} \quad e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} - i\omega t + i\phi}$$

3. Cosa succede se le due onde non sono scalari ma vettoriali e polarizzate?

$$\mathbf{A}_1 e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - i\omega t} \quad \mathbf{A}_2 e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} - i\omega t + i\phi}$$

Soluzione 4.1.

$$\psi = e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - i\omega t} + e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} - i\omega t + i\phi} = e^{-i\omega t} \left(e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}} + e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} + i\phi} \right)$$

Se $\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ e $\Delta\mathbf{k} = \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$ si può scrivere

$$e^{i(\mathbf{K} + \phi)/2 - i\omega t} \left(e^{i(\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \phi)/2} + e^{-i(\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \phi)/2} \right) = 2e^{i(\mathbf{K} + \phi)/2 - i\omega t} \cos\left(\frac{\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \phi}{2}\right)$$

Per l'intensità basta prendere il modulo quadro e ricordarsi che l'esponenziale complesso mediato temporalmente diventa 1/2.

$$I = 2 \cos^2\left(\frac{\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \phi}{2}\right)$$

I massimi si hanno se

$$\frac{\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \phi}{2} = n\pi$$

Notare che i massimi si dispongono su piani perpendicolari a $\Delta\mathbf{k}$, se questo è nullo allora l'intensità ha valore costante come ci si aspetta e dipende esclusivamente dallo sfasamento ϕ .

1. Se le due onde hanno frequenza diversa

$$\cos(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \omega_1 t) + \cos(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} - \omega_2 t)$$

L'intensità totale contiene il termine di interferenza dato dal doppio prodotto delle due;

$$I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2\langle \cos(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \omega_1 t) \cos(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} - \omega_2 t) \rangle$$

vediamo che la media temporale su un tempo T di questo prodotto tende ad annullarsi quando $T \rightarrow \infty$.

$$\langle \cos(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \omega_1 t) \cos(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} - \omega_2 t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t) dt$$

Abbiamo lasciato solo la parte rilevante nell'argomento dei coseni; quando faccio la media temporale tutto il resto conta come fase e non cambia la sostanza del risultato. Ricordando che

$$\cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t) = \frac{1}{2} (\cos((\omega_1 - \omega_2)t) + \cos((\omega_2 + \omega_1)t))$$

si esegue facilmente l'integrale sopra e il termine più grande per tempi T lunghi è

$$\frac{\cos(\Delta\omega T) - 1}{2|\Delta\omega|T}$$

$$(\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1)$$

Questo tende a zero quando $T \gg 1/|\Delta\omega|$. Supponiamo che l'apparato con cui misuriamo l'intensità abbia un tempo di integrazione $T = T_I$:

- se $T_I \gg 1/|\Delta\omega|$ allora non rileva alcun termine di interferenza e misura la somma delle intensità delle due onde;
- se invece $T_I \ll 1/|\Delta\omega|$ il termine di interferenza c'è ed è uguale al caso di prima, cioè le frequenze si possono considerare uguali per tempi t molto minori di $1/|\Delta\omega|$.

Come si deduce, le caratteristiche dell'apparato con cui si fa la misura influiscono sul risultato.

2. Il trucchetto per arrivare in fondo ai conti è simile a prima ma leggermente più elaborato. Quello che ci si aspetta di trovare è che l'intensità mediata sul ciclo vari nello spazio da un massimo di $(A + 1)^2$ a un minimo di $(A - 1)^2$. Come vedremo è quello che succede.

$$\begin{aligned} \psi &= A e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - i\omega t} + e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} - i\omega t + i\phi} = e^{-i\omega t} \left[A e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}} + e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} + i\phi} \right] = \\ e^{-i\omega t} &\left[\frac{A+1}{2} \left(e^{i(\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \phi)/2} + e^{-i(\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \phi)/2} \right) + \frac{A-1}{2} \left(e^{i(\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \phi)/2} - e^{-i(\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \phi)/2} \right) \right] = \\ e^{i(\mathbf{K} + \phi)/2 - i\omega t} &\left[(A+1) \cos\left(\frac{\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \phi}{2}\right) + i(1-A) \sin\left(\frac{\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \phi}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

ora

$$I = [\psi]^2 = \frac{1}{2} [A^2 + 1 + 2A \cos(\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \phi)]$$

si vede che se $A = 1$ riottengo la formula di prima. I massimi si hanno per $\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \phi = 2n\pi$, anche questa è uguale a prima.

3. Se nel punto $\mathbf{x}$ si mette un filtro che misura l'intensità solo lungo la direzione data dal versore $\mathbf{n}$ allora il problema diventa lo stesso del punto 2 dove le due ampiezze sono date da $\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{n}$ e $\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{n}$.

Se invece misuro l'intensità totale, si può ragionare nel seguente modo: scompongo $\mathbf{A}_2$ in due componenti, una parallela e l'altra perpendicolare ad $\mathbf{A}_1$.

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_{2\parallel} + \mathbf{A}_{2\perp}$$

in questo modo l'onda si può scrivere come

$$\psi = [\mathbf{A}_1 \cos(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - \omega t) + \mathbf{A}_{2\parallel} \cos(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} - \omega t + \phi)] + \mathbf{A}_{2\perp} \cos(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} - \omega t + \phi)$$

il prodotto del termine dentro parentesi quadre con l'ultimo è nullo, per il fatto che sono perpendicolari. Quindi l'intensità è la somma delle intensità date dai due termini: l'intensità del primo si calcola come al punto 2 quella del secondo è immediata.

La cosa importante è che polarizzazioni perpendicolari non fanno interferenza fra di loro e quindi si possono trattare come problemi separati.

□

4.1 Esperimento di Young

Procederemo ora all'analisi di un esperimento classico detto di Young che storicamente mostrò la natura ondulatoria della luce. Consideriamo un'onda piana monocromatica che incide su una parete su cui sono state praticate due sottili fenditure molto vicine distanti d , quanto sottili sia necessario farle per osservare l'effetto lo si discuterà a posteriori.

L'onda dietro la parete colpisce le fenditure e passa attraverso, così che le due fenditure possono essere viste come sorgenti monocromatiche in fase. Scegliamo l'origine del sistema di coordinate in mezzo alle due fenditure e guardiamo l'intensità in un punto $\mathbf{r} = (D, y)$ con $D \gg d$ (Fig.12). Le onde che arrivano dalle sorgenti 1 e 2 le approssimiamo ad onde piane della stessa ampiezza, discuteremo meglio alla fine la validità di quest'approssimazione. L'ampiezza totale nel punto $\mathbf{r}$ vale

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{ikr_1} + e^{ikr_2}$$

r_1, r_2 sono le distanze tra la sorgente 1, 2 e il punto $\mathbf{r}$.

Abbiamo tralasciato la dipendenza temporale $e^{-i\omega t}$ dell'ampiezza, infatti quando si è interessati alla media dell'intensità su ciclo come si è visto nell'esempio precedente questa diventa irrilevante.

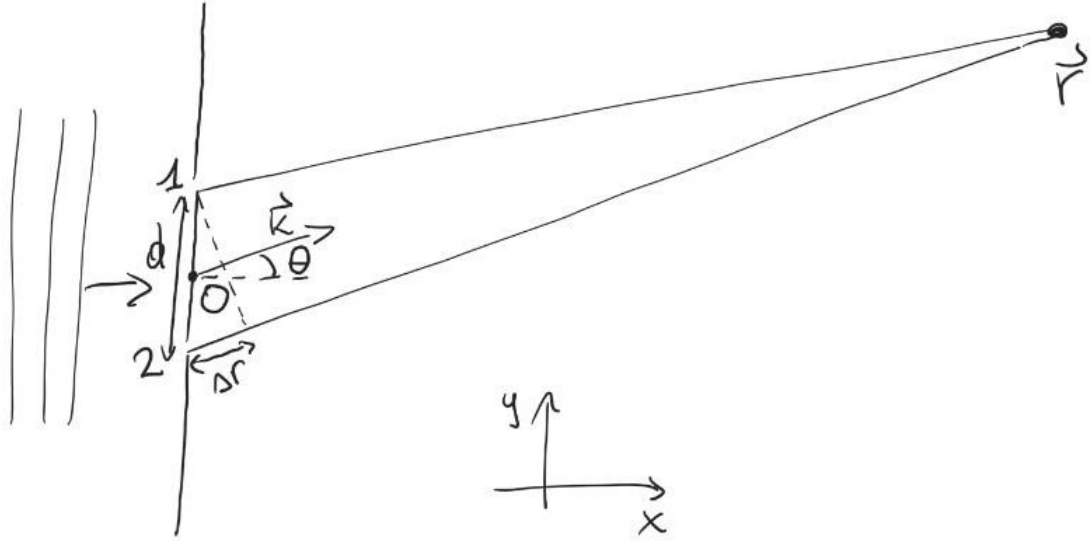


Figura 12

Nel seguito indicheremo con $\mathbf{k}$ il vettore di modulo k che punta nella direzione $\mathbf{r}$, chiamiamo θ l'angolo tra $\mathbf{k}$ e l'asse x .

$$\psi(\mathbf{r}) = 2e^{ik(r_1+r_2)/2} \cos\left(\frac{k(r_2 - r_1)}{2}\right)$$

Se $D \gg d$, $\Delta r = r_2 - r_1$ si può approssimare al primo ordine (nel parametro d/D) come

$$\Delta r = d \sin \theta$$

sostituendo nell'espressione sopra si ottiene

$$\psi(\mathbf{r}) = 2e^{ik(r_1+r_2)} \cos\left(\frac{kd \sin \theta}{2}\right) = 2e^{ik(r_1+r_2)} \cos\left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{d}}{2}\right)$$

ricordando come si converte l'esponenziale complesso per ottenere l'intensità mediata sul ciclo si ha

$$I = 2 \cos^2\left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{d}}{2}\right)$$

(Se non si facesse la media su ciclo $I(t)$ avrebbe una dipendenza temporale proporzionale a $\propto \cos^2(\omega t)$)

I massimi si hanno quando

$$\frac{\mathbf{k}_{\max} \cdot \mathbf{d}}{2} = n\pi \implies \sin \theta_{\max} = \frac{n\lambda}{d}$$

per piccoli θ vale l'approssimazione $\sin \theta \simeq \theta$. Si può ricavare molto velocemente questa formula considerando che la differenza di cammino ottico tra i raggi uscenti dalle due aperture deve essere un numero intero di lunghezze d'onda per avere interferenza costruttiva. Qualitativamente l'equazione sopra dice che se restringo le fenditure i massimi si allargano e si distanziano viceversa se aumento d .

I massimi presenti sono quelli per cui $(n\lambda)/d < 1$, è possibile che si veda anche solo il massimo centrale se ad esempio $\lambda/d > 1$.

Esempio 4.2 (Esperimento di Young con onda incidente inclinata). Trovare le nuove posizioni angolari dei massimi se il vettore d'onda dell'onda piana incidente forma un angolo ϕ con la perpendicolare al muro.

Soluzione 4.2. Le due fenditure ora si comportano come due sorgenti sfasate:

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i(kr_1 + kd \sin \phi)} + e^{ikr_2}$$

portando avanti i calcoli in modo praticamente identico a quello precedente, si ottiene per la posizione angolare dei massimi

$$\sin \theta_{\max} = \frac{n\lambda}{d} + \sin \phi$$

è interessante notare che per piccoli angoli la posizione angolare dei massimi subisce la stessa variazione ϕ , per il massimo centrale questo fatto resta vero anche per ϕ non piccoli.

Se immaginassimo di proiettare la figura di diffrazione su uno schermo a distanza D su uno schermo parallelo al muro, si avrebbe la seguente relazione per la corrispondenza tra l'angolo θ e la posizione y sullo schermo:

$$\theta = \arctan(y/D)$$

se per piccoli θ sullo schermo si vede circa una funzione $\cos^2(Ay)$, per angoli più grandi si ha una distorsione e la funzione esatta che descrive l'intensità in funzione di y , per $\phi = 0$, è

$$I = 2 \cos^2 \left(\frac{kd}{2} \sin(\arctan(y/D)) \right)$$

In Figura 13 è mostrato il grafico di questa funzione. Per grandi angoli, come si capisce qualitativamente

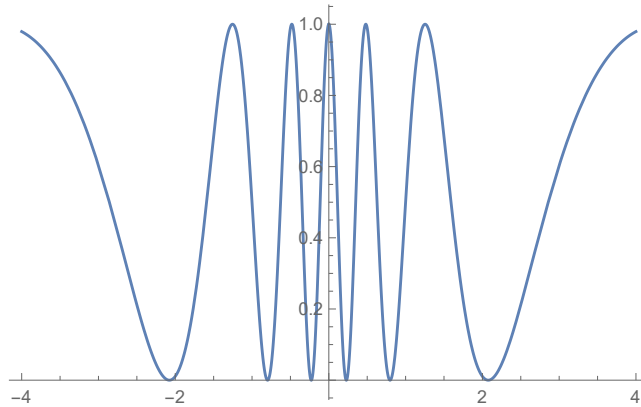


Figura 13: è riportato il grafico dell'intensità in funzione di y , come vista su uno schermo nell'esperimento delle due fenditure

Precisazioni Concludiamo chiarendo due punti:

1. La condizione $D \gg d$ in realtà è vaga e può non essere sufficiente. A un certo punto si è fatta l'approssimazione

$$\Delta r \simeq d \sin \theta$$

in questo modo abbiamo trascurato un piccolo termine ϵ che farebbe tornare l'uguaglianza

$$\Delta r = d \sin \theta + \epsilon$$

quando è lecito trascurare questo termine?

la risposta giusta è quando produce nell'esponente complesso una differenza di fase molto piccola:

$$e^{ik\Delta r} = e^{ikd \sin \theta} e^{ik\epsilon}$$

si può trascurare se

$$e^{ik\epsilon} \simeq 1 \quad \text{cioè se} \quad k\epsilon \ll 1$$

per esplicitare meglio questa condizione dobbiamo stimare quanto è vale all'incirca ϵ . A tal fine possiamo calcolare Δr per il punto a $(D, d/2)$ leggermente spostato verso la fenditura 1. Questo punto si trova in prima approssimazione a $\theta = 0$, quindi:

$$d \sin \theta \simeq 0$$

allora ϵ vale circa

$$\Rightarrow \epsilon = \Delta r = \sqrt{D^2 + d^2} - D = D \left(\sqrt{1 + \frac{d^2}{D^2}} - 1 \right) \simeq D \left(\frac{d^2}{2D^2} \right) = \frac{d^2}{2D}$$

e

$$k\epsilon \simeq \frac{kd^2}{2D} \sim \frac{d^2}{\lambda D}$$

quindi la condizione precedente diventa:

$$\frac{d^2}{\lambda D} \ll 1$$

Negli esperimenti di interferenza spesso si ha che $d \gg \lambda$, in questo caso $D \gg d$ non assicura che sia soddisfatta la condizione. La regione per cui vale $D \leq d^2/\lambda$ si chiama zona di Fraunhofer, ed è quella in cui vale l'approssimazione fatta per trattare l'interferenza.

2. Discutiamo meglio il motivo per cui consideriamo le due sorgenti con ampiezza uguale e costante. Nella realtà ovviamente si ha sempre una dipendenza dell'ampiezza dal punto che si va a guardare, per cui sarebbe corretto scrivere

$$\psi(\mathbf{r}) = A(r_1, \theta)e^{ikr_1} + A(r_2, \theta)e^{ikr_2}$$

si può porre negli argomenti delle ampiezze $r_1 \simeq r_2 \simeq r$, ottenendo

$$\psi(\mathbf{r}) = A(r, \theta)e^{ikr_1} + A(r, \theta)e^{ikr_2}$$

la ragione per cui è possibile fare questa approssimazione nelle ampiezze ma non negli esponenziali complessi è che nel primo caso ci perdiamo un termine proporzionale al parametro adimensionale $\Delta r/r$, mentre nel secondo trascureremmo un termine nell'argomento dell'esponenziale dell'ordine $\Delta r/\lambda$. Se per le assunzioni fatte

$$\Delta r/r \ll 1$$

non si può dire lo stesso per $\Delta r/\lambda$.

Infine se siamo interessati unicamente a come le due sorgenti interferiscono, cioè se costruttivamente o distruttivamente, possiamo dimenticarci della dipendenza dell'ampiezza da r e θ e porla per semplicità costante e uguale a 1.

Anche gli esempi successivi verranno trattati con le stesse approssimazioni.

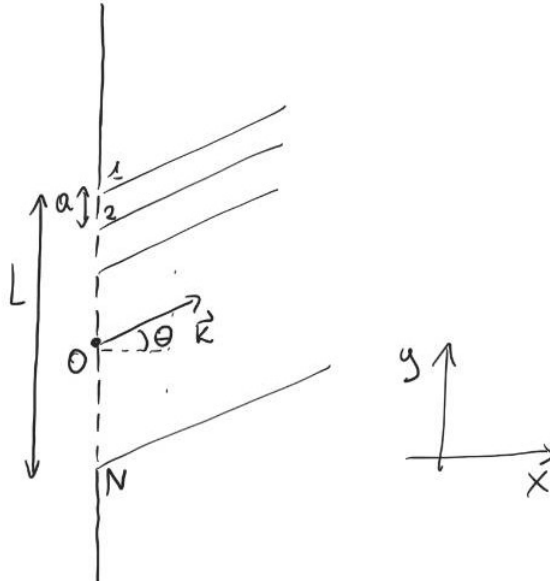


Figura 14

4.2 N fenditure

Generalizziamo il discorso di prima al caso in cui abbiamo N fenditure con un passo a tra una e l'altra e con $Na = L$ (Fig.14).

Quindi abbiamo sempre un'onda piana monocromatica che incide su uno schermo con le N fenditure che a causa di ciò si comportano come N sorgenti in fase.

L'ampiezza in un punto qualsiasi $\mathbf{r} = (D, y)$ sempre con $D \gg L$ e con le approssimazioni fatte prima sull'ampiezza delle singole sorgenti, vale

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{ikr_1} + \dots + e^{ikr_n}$$

come prima si possono approssimare le distanze tra il punto $\mathbf{r}$ e le N sorgenti al primo ordine (nel parametro $\frac{L}{D}$)

$$r_n = \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \mathbf{a}(n-1) + r_1$$

e riscrivere l'ampiezza come

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) &= e^{ikr_1} \left(1 + e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}} + \dots + e^{i(N-1)\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}} \right) = e^{ikr_1} \frac{1 - e^{iN\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}}}{1 - e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}}} = \\ &= e^{ikr_1} e^{i(N-1)\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}}{2}} \frac{\sin\left(\frac{N\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}}{2}\right)} \end{aligned}$$

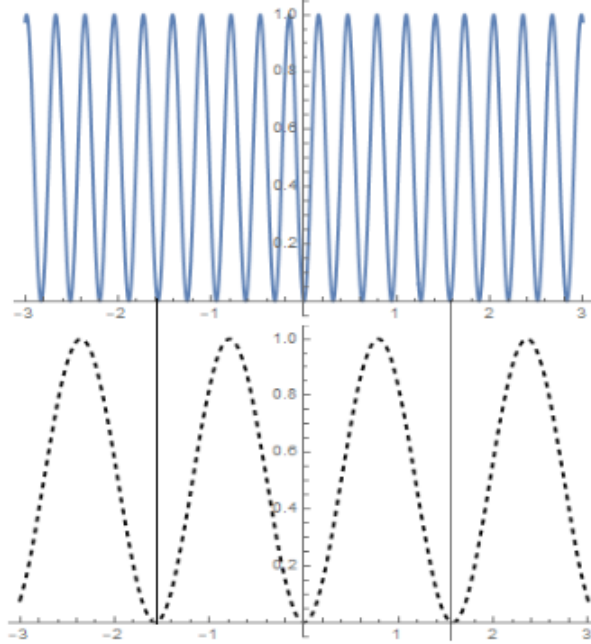


Figura 15: (sull'asse x abbiamo $\sin \theta$) Sopra compare il grafico del numeratore dell'eq.(35), sotto, il denominatore. La posizione dei massimi principali è indicata dalle tre linee verticali: dove si annulla sia il numeratore che il denominatore; nel mezzo il denominatore modula il numeratore che ha $N - 2$ picchi.

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \left(\frac{N \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}}{2} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}}{2} \right)} \quad (35)$$

Un modo semplice di capire l'andamento di I è fare il grafico del numeratore in funzione di $\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}}{2}$ insieme a quello del denominatore (Fig.15).

I massimi principali sono dati da dove si azzera il denominatore, ossia

$$\frac{\mathbf{k}_{\max} \cdot \mathbf{a}}{2} = n\pi \Rightarrow \frac{ka \sin \theta_{\max}}{2} = n\pi \Rightarrow \sin \theta_{\max} = \frac{n\lambda}{a} = \frac{n\lambda}{L} N$$

rispetto a prima se prendo $a = d$ i massimi sono distanti uguali (angolarmente) ma sono più stretti di un fattore N rispetto a prima (lo si vede dal numeratore).

Anche qua i massimi principali si possono ricavare velocemente imponendo che la differenza di cammino ottico tra i raggi uscenti da due fenditure adiacenti, sia un numero intero di lunghezze d'onda. Tra i massimi principali sono presenti $N-2$ “massimini” intermedi meno intensi, questi sono originati da una parziale ma non perfetta interferenza costruttiva delle N sorgenti; si

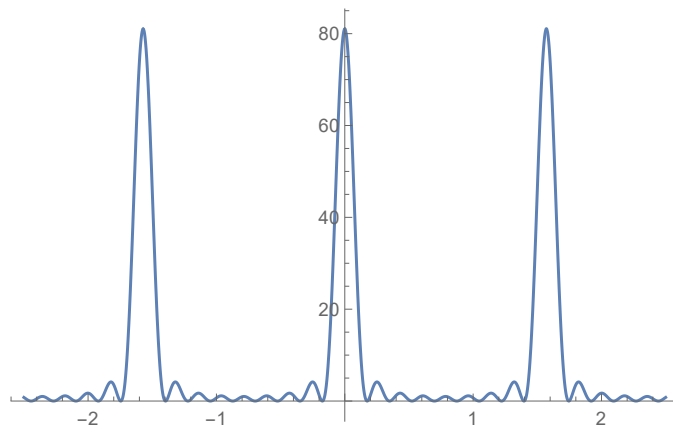


Figura 16: Grafico $I(\sin \theta)$ per $N = 9$ fenditure; i massimi principali sono larghi il doppio.

hanno quando il numeratore dell'eq. (35) è $\simeq 1$. Il max principale è largo il doppio di quelli intermedi, come si vede anche in Fig.16.

Per l'intensità del massimo principale basta vedere quella del massimo centrale che è

$$\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}}{2} \rightarrow 0 \implies I \simeq \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{N\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}}{2}\right)^2}{\left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} N^2$$

Per $N = 2$ vediamo che l'intensità si riduce, giustamente, a quella del caso precedente.

Esempio 4.3. Come cambia qualitativamente la figura di interferenza se passo da N a $N + 1$ fenditure mantenendo il passo a inalterato?

Soluzione 4.3. I massimi principali non si spostano ma crescono di intensità e si restringono (aumenta la definizione); inoltre spunta un nuovo massimo intermedio tra un max principale e l'altro (Fig.17).

4.3 Diffrazione da foro

La diffrazione è il fenomeno per cui un'onda attraversando una piccola apertura da origine a delle frange luminose a intensità variabile a causa dell'interferenza con se stessa.

Ci proponiamo di ottenere questa figura di diffrazione per un foro largo L a partire dalle N fenditure. Come lo facciamo? Prendiamo il limite per $N \rightarrow \infty$; in pratica stiamo bucando il segmento L sempre di più fino a che diventa assimilabile a un foro (18).

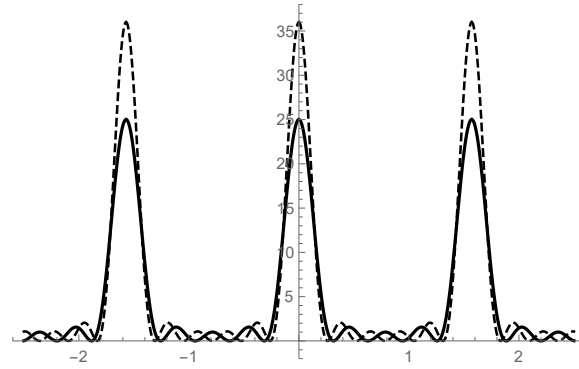


Figura 17: Grafico $I(\sin \theta)$. Linea continua $N = 5$, linea tratteggiata $N = 6$.

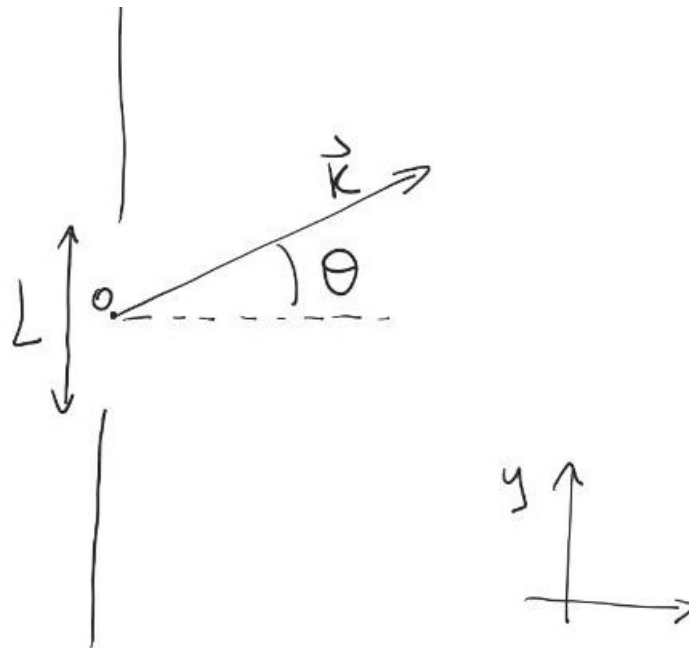


Figura 18

Bisogna prestare un minimo di attenzione nel fare questo limite:

- si è detto che L va tenuto costante, quindi aumentando N tocca diminuire il passo a

$$a = L/N$$

- bisogna anche correggere l'ampiezza delle N sorgenti via via che aumenta il numero, altrimenti l'intensità divergerebbe. Come si fa? Per tenerla costante si divide l'ampiezza delle N sorgenti per N

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{N} \left(e^{ikr_1} + \dots + e^{ikr_n} \right)$$

per capirlo si può ragionare in analogia al fatto che una sorgente è identica a due in fase posizionate nello stesso punto con ampiezza dimezzata.

L'intensità diventa

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \left(\frac{N\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}}{2} \right)}{N^2 \sin^2 \left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}}{2} \right)}$$

per N sufficientemente grandi posso approssimare il seno al denominatore con il suo argomento

$$I \simeq \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \left(\frac{N\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}}{2} \right)}{N^2 \left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}}{2} \right)^2} = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{L}}{2} \right)}{\left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{L}}{2} \right)^2}$$

Questa è la figura di diffrazione da un foro largo L . I massimi sono nei punti in cui il numeratore è uguale a 1 più il punto centrale in cui il denominatore si annulla.

$$\frac{\mathbf{k}_{\max} \cdot \mathbf{L}}{2} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \quad \text{e} \quad \frac{\mathbf{k}_{\max} \cdot \mathbf{L}}{2} = 0$$

Il punto centrale rende il max centrale di larghezza doppia rispetto agli altri. I massimi più distanti dal centro diventano via via meno intensi. Il processo di limite avviene in maniera continua, quindi questi massimi laterali devono avere un corrispettivo nel problema delle N fenditure, qual è?

questi massimi sono l'evoluzione dei "massimini" intermedi nelle N fenditure; per convincersene basta notare che derivano dal numeratore e sono traslati di $\pi/2$ rispetto a prima (Fig.19)

Ribadiamo anche in questo caso che se la direzione dell'onda piana dietro il muro forma un piccolo angolo ϕ rispetto alla perpendicolare al muro, allora

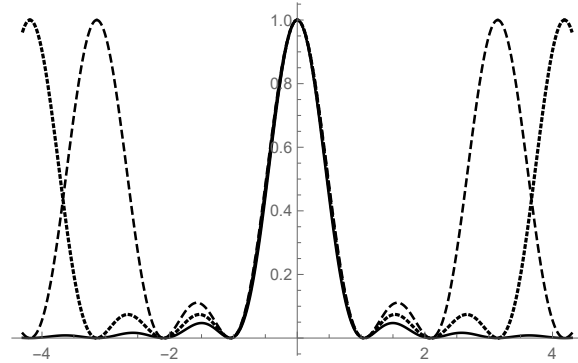


Figura 19: grafico intensità I in funzione di $\sin \theta$. La curva continua è la figura di diffrazione nel limite $N = \infty$, quella tratteggiata è per $N = 3$ mentre quella a puntini per $N = 4$. Aumentando N , i “massimini” intermedi approssimano sempre meglio la figura di diffrazione e il primo max principale laterale scompare spostandosi all’infinito

la figura di diffrazione trasla rigidamente dello stesso angolo ϕ . Per il massimo centrale questo fatto continua a restare vero per ϕ non piccoli. Intuitivamente per un foro è il comportamento che ci aspettiamo, cioè che la luce si propaghi attraverso il muro (trascurando effetti diffrattivi) in linea retta.

Ricaviamo la stessa formula tramite un secondo procedimento, praticamente uguale nella sostanza che usa il principio di Huygens

Principio di Huygens. *Ogni elemento dx di un fronte d’onda l si può considerare formalmente come una sorgente secondaria di onde in fase con la primaria e di ampiezza proporzionale a quella dell’onda primaria e alla lunghezza dx . La perturbazione prodotta in un punto dello spazio si può sempre ottenere come sovrapposizione di tutte le onde secondarie che raggiungono quel punto.*

Facendo uso di questo principio nel nostro problema la somma su tutte le sorgenti infinitesime diventa un integrale sul foro

$$\psi(\mathbf{r}) = \int_{-L/2}^{L/2} e^{ikr} \frac{dx}{L}$$

la solita approssimazione con $L \ll D$ ci dice che

$$r = r_0 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}{k}$$

dove r_0 è la distanza tra $\mathbf{r}$ e l’origine.

Sostituendo si esegue facilmente l'integrale

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{ikr_0} \int_{-L/2}^{L/2} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{dx}{L} = e^{ikr_0} \frac{\sin\left(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{L}}{2}\right)}{\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{L}}{2}}$$

A questa ampiezza corrisponde la stessa intensità (mediata su ciclo) di prima

$$I = \frac{1}{2} \frac{\sin^2\left(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{L}}{2}\right)}{\left(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{L}}{2}\right)^2}$$

L'intensità al centro è $1/2$. Se $L \rightarrow 0$, l'intensità I diventa costante e abbiamo così il limite in cui il foro si comporta da sorgente puntiforme, più precisamente questo limite si ha se $L \ll \lambda$, infatti L/λ è l'unico parametro da cui dipende l'intensità. In questo caso la luce non ha possibilità di interferire distruttivamente con se stessa perché ha origine da una zona troppo piccola rispetto alla lunghezza d'onda. Ecco un criterio sulla larghezza delle fenditure nell'esperimento di Young.

L'apertura angolare occupata dal primo massimo è $2\lambda/L$; Se $L \gg \lambda$ i massimi sono molto più appiccicati. In Figura 20 è riportata una simulazione numerica della diffrazione da foro mentre in Figura 21 è riportato un esperimento fatto con laser.

Esempio 4.4. Dedurre la posizione dei minimi nella figura di diffrazione con ragionamenti semplici guardando la differenza di cammino tra i vari raggi.

Soluzione 4.4. Una volta fatto il ragionamento per il primo minimo per gli altri è uguale. Si divide il foro in due: x positive e x negative; a questo punto si mostra che i contributi derivanti dalle due parti si elidono completamente se $\frac{L}{2} \sin \theta$ è pari a mezza lunghezza d'onda (Fig.22). Infatti in tal caso la "sorgente" infinitesima posizionata in $x > 0$ si cancella con quella posizionata in $x - L/2$ e così per ogni x positivo fino a che non è rimasto più nulla e si deduce che il foro non irraggia nulla in tale direzione.

Questo ragionamento si può ripetere dividendo il foro in $2n$ segmenti, e scegliendo θ in modo tale che il segmento sopra e il successivo si cancellino esattamente in termini di contributi.

Esempio 4.5 (Esperimento di Young con due fori). Supponiamo di sostituire nell'esperimento di Young le fenditure sottili con due fori di larghezza L i cui centri distano uno dall'altro $d > L$. Trovare l'intensità in funzione dell'angolo per punti $\mathbf{r} = (D, y)$ con $D \gg d$. Discutere infine i casi limite che si possono avere.

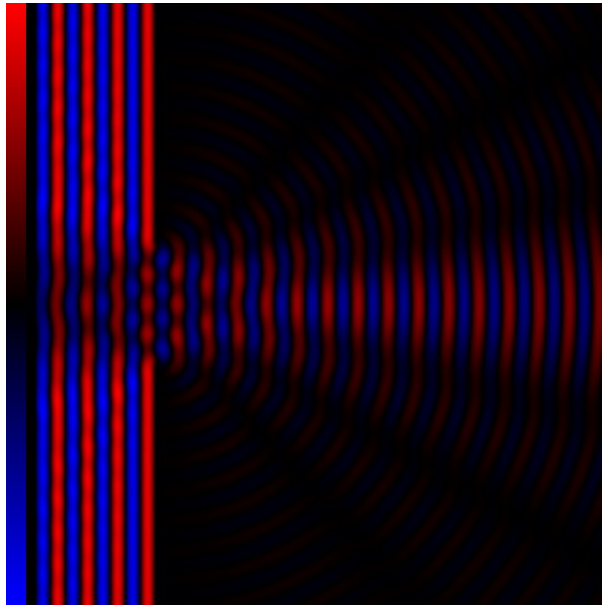


Figura 20

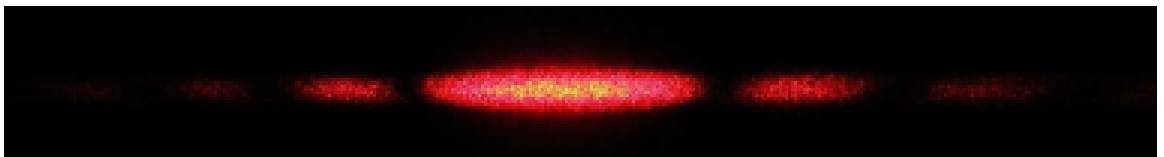


Figura 21

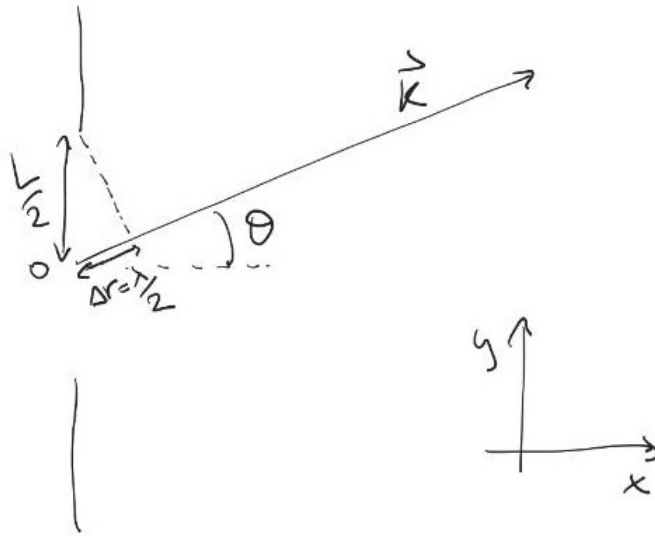


Figura 22

Soluzione 4.5. Da Huygens sappiamo l'ampiezza nel punto $\mathbf{r}$

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{ikr_1} \frac{\sin\left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{L}}{2}\right)}{\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{L}}{2}} + e^{ikr_2} \frac{\sin\left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{L}}{2}\right)}{\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{L}}{2}}$$

r_1, r_2 sono in questo caso le distanze dei punti medi dei due fori dal punto $\mathbf{r}$.

$$\psi(\mathbf{r}) = \left(e^{ikr_1} + e^{ikr_2}\right) \frac{\sin\left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{L}}{2}\right)}{\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{L}}{2}}$$

Quindi si vede che gli effetti derivanti dalla diffrazione e dall'interferenza fra le due sono fattorizzati, di conseguenza l'intensità sarà il prodotto delle intensità trovate prima.

$$I = 2 \cos^2\left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{d}}{2}\right) \frac{\sin^2\left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{L}}{2}\right)}{\left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{L}}{2}\right)^2}$$

Possiamo vedere cosa succede in alcuni casi

- $\lambda \gg d, L$: l'intensità è circa costante per ogni θ ;
- $L \ll \lambda < d$: la diffrazione è trascurabile, e come già detto prima si vede solo l'effetto dell'interferenza tra due fenditure;

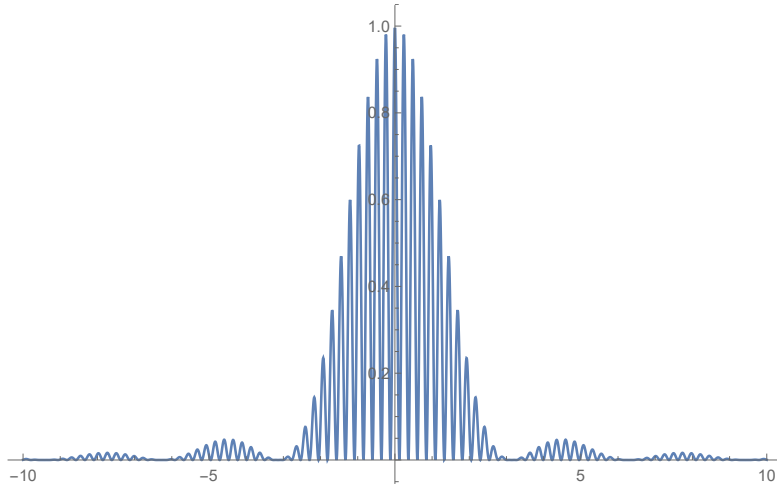


Figura 23: grafico dell'intensità I in funzione di $\sin \theta$

- $d = L$: in questo caso si ha un foro grande il doppio $2L$ con ampiezza doppia, quindi ci si aspetta per l'intensità il valore

$$I = 2 \frac{\sin^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{L})}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{L})^2}$$

effettivamente è quello che succede;

- $d \gg L > \lambda$: in questa situazione il termine

$$\cos^2\left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{d}}{2}\right)$$

oscilla molto più velocemente del resto, perciò il resto può essere visto come una modulazione per questo termine oscillante, vedere Fig.23.

Riportiamo infine in Figura 24 un esperimento fatto con laser diffratto da un numero di fori variabile.

5 Sorgenti Reali

Negli esperimenti trattati fino ad ora abbiamo trovato la figura di interferenza utilizzando per semplicità una sorgente perfettamente monocromatica.

Nella vita reale le sorgenti monocromatiche non esistono e sono solo un'idealizzazione. Le sorgenti reali non sono perfettamente monocromatiche,

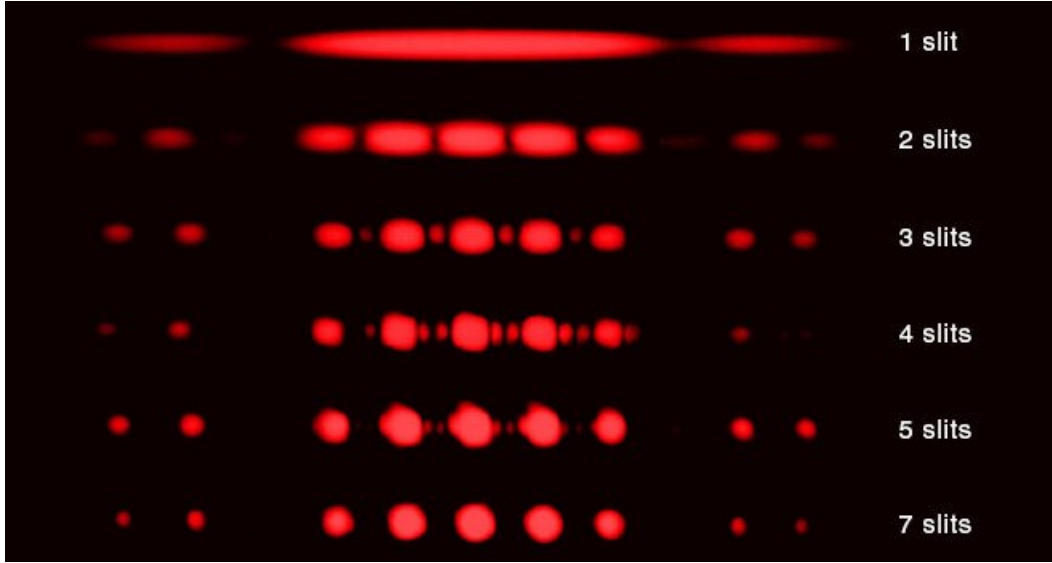


Figura 24

per dare un'idea qualitativa si può immaginare un'onda piana 1D prodotta da una sorgente reale come una sinusoide della forma

$$\psi(r, t) = \sin(kr - \omega t + \varphi(r - ct)) \quad (36)$$

$\varphi(r_0 - ct)$ guardata in un punto fisso r_0 , rappresenta una fase che varia in modo *casuale* lentamente nel tempo: nel senso che subisce variazioni dell'unità in un tempo caratteristico τ_c , che è molto più lungo del periodo dell'onda, $\tau_c \gg T$. viceversa se vista come funzione di r a tempo fissato t_0 , $\varphi(r - ct_0)$ subisce variazioni dell'unità quando si percorre una distanza $l_c = c\tau_c \gg \lambda$. L'onda non può essere monocromatica perché a causa della variazione, anche se piccola, di $\varphi(r - ct_0)$ i nodi della sinusoide si trovano a distanza variabile, questo intuitivamente ci dice che l'onda contiene diverse lunghezze d'onda (o equivalentemente vista come funzione di t che contiene frequenze differenti).

Quando l'onda subisce variazioni di fase dell'ordine dell'unità e dimentica il suo rapporto di fase, si dice che l'onda ha perso la coerenza temporale. τ_c , per questo motivo, viene chiamato il tempo di coerenza che non definiremo in maniera più rigorosa (la descrizione precedente ci dice giusto il suo ordine di grandezza). La lunghezza $l_c = c\tau_c$ invece si chiama lunghezza di coerenza.

Si può definire il tempo di coerenza anche tra due sorgenti diverse, che vale come ordine di grandezza il tempo che ci mette la differenza di fase tra le due onde a cambiare dell'ordine dell'unità.

Vediamo adesso nell'esempio della doppia fenditura cosa succede alla

figura di interferenza se usiamo come sorgente al posto dell'onda piana monocromatica l'onda data dalla (36).

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i(kr_1 + \varphi(r_1 - ct))} + e^{i(kr_2 + \varphi(r_2 - ct))}$$

Abbiamo tralasciato la dipendenza temporale $e^{-i\omega t}$ dell'ampiezza, anche in questo caso non importante.

$$\psi(\mathbf{r}) = 2e^{ik(r_1 + r_2)} e^{i(\varphi(r_1 - ct) + \varphi(r_2 - ct))/2} \cos\left(\frac{k(r_2 - r_1) + \varphi(r_1 - ct) + \varphi(r_2 - ct)}{2}\right)$$

come prima $|r_2 - r_1| \simeq \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{d}}{k}$ per l'intensità mediata sul ciclo tenendo a mente che la fase φ sul singolo periodo è circa costante possiamo calcolarla come abbiamo sempre fatto, cioè:

$$I = 2 \cos^2\left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{d} + \varphi(r_1 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{d}/k - ct) + \varphi(r_1 - ct)}{2}\right)$$

se $|r_2 - r_1| \ll l_c$ allora

$$\varphi(r_1 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{d}/k - ct) + \varphi(r_1 - ct) \ll 1$$

e l'intensità rimane quella trovata precedentemente, si formano cioè le solite frange di interferenza. Se invece $|r_2 - r_1| \sim l_c$ allora l'intensità varia in un tempo tipico τ_c e anche se $\tau_c \gg T$ spesso risulta comunque molto piccolo se confrontato con i tempi della vista umana e riusciamo a percepire solo la media temporale dell'intensità

$$\langle I \rangle = 1$$

in questo caso si dice che l'incoerenza della sorgente distrugge l'interferenza (ad occhio nudo).

Vediamo quindi che in questo esperimento il parametro importante che ci dice se c'è interferenza o meno è la lunghezza di coerenza.

Giusto per dare un'idea forniamo la lunghezza di coerenza per alcune sorgenti luminose:

$$\text{Lampadina a incandescenza} = 1.2 \mu\text{m}$$

$$\text{Luce del sole} = 0.6 \mu\text{m}$$

$$\text{lampada al mercurio} = 0.03 \text{ cm}$$

$$\text{laser} > 100 \text{ m}$$

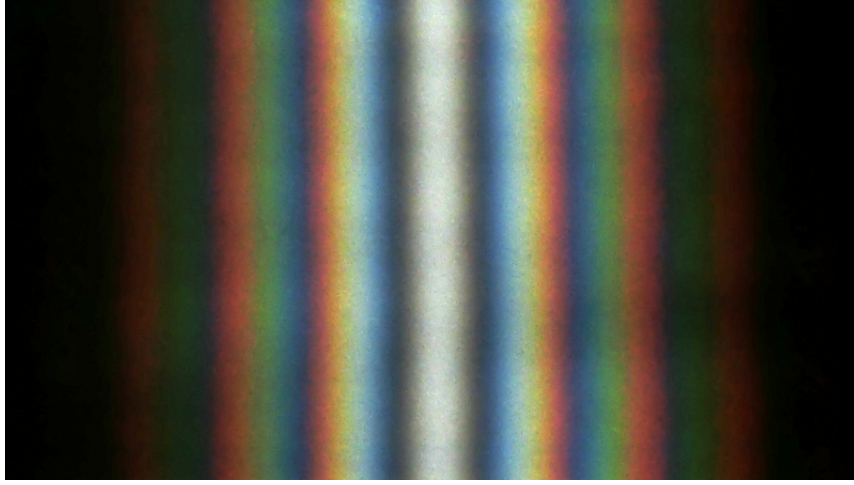


Figura 25: la figura a causa dell'incoerenza risulta globalmente meno nitida; notare la disposizione dei massimi in base al colore (lunghezza d'onda)

è interessante notare che l'esperimento originale fatto da Young fu realizzato con la luce solare (Fig. 25), può sorprendere la riuscita dell'esperimento vista la lunghezza di coerenza, il fatto è che non serve prendere $d \leq l_c$, poichè per angoli piccoli

$$\frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{k}}{k} \ll d$$

e il centro della figura di interferenza anche in casi in cui $d \gg l_c$ può rimanere intatta.

Esempio 5.1 (N sorgenti incoerenti). Supponiamo di avere N sorgenti nello spazio, approssimativamente monocromatiche e tutte con la stessa frequenza. Ognuna di esse produce nel punto $\mathbf{r}$ un'onda del tipo (36):

$$\psi_i(\mathbf{r}, t) = A_i \sin(+\varphi_i(r - ct) - \omega t) \quad 1 \leq i \leq N$$

Se le sorgenti sono tutte incoerenti fra di loro, quanto vale l'intensità media misurata nel punto $\mathbf{r}$?

Soluzione 5.1.

$$\psi_{\text{tot}}(\mathbf{r}, t) = \sum_i A_i \sin(\varphi_i(r - ct) - \omega t)$$

$$\langle I \rangle = \langle [\psi_{\text{tot}}(\mathbf{r}, t)]^2 \rangle$$

la questione si semplifica notando che la media dei prodotti misti fa zero

$$\left\langle \sin(\varphi_i - \omega t) \sin(\varphi_j - \omega t) \right\rangle = 0$$

per vederlo si riscrive il prodotto misto usando le formule di somma dei coseni:

$$\left\langle \frac{\cos(\varphi_i - \varphi_j) - \cos(\varphi_i + \varphi_j - 2\omega t)}{2} \right\rangle$$

essendo le variazioni delle fasi φ_i, φ_j casuali e *indipendenti* (per l'incoerenza), questi due termini hanno media nulla.

Di conseguenza la media dell'intensità totale misurata, per sorgenti incoerenti fra loro, è semplicemente la somma delle intensità delle singole sorgenti (medie sul periodo)

$$\langle I \rangle = \sum_i I_i$$

6 Potere Risolutivo

6.1 Diffrazione da foro circolare

Vogliamo generalizzare il discorso precedente della diffrazione a tre dimensioni per un foro circolare di raggio R .

Scegliamo l'origine nel centro del foro e vogliamo calcolare l'ampiezza in un punto $\mathbf{r}$ molto distante rispetto al raggio R .

Il procedimento è identico a prima usando Huygens:

$$\psi(\mathbf{r}) = \int_S e^{ikr} \frac{dA}{\pi R^2} \simeq e^{ikr_0} \int_S e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \frac{dA}{\pi R^2} = e^{ikr_0} \frac{\sin\left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{L}}{2}\right)}{\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{L}}{2}}$$

ora lavoriamo con aree infinitesime che fanno da sorgenti, r indica la distanza di ognuna di queste dal punto $\mathbf{r}$. L'integrazione è estesa a tutta la superficie del foro che si è indicata con S , r_0 come prima è la distanza tra $\mathbf{r}$ e l'origine. Si è fatta al secondo passaggio la stessa approssimazione di prima.

I calcoli in questo caso sono decisamente più complicati e non presentano alcun interesse fisico, per questo motivo non li svolgiamo; le cose importanti sono che:

- ci aspettiamo delle frange a simmetria sferica come effettivamente accade (Fig. 26).
- la posizione angolare del primo minimo misurata rispetto alla direzione da cui proviene la luce, è data da:

$$\sin \theta_{\min} \simeq 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

dove D è il diametro dell'apertura.

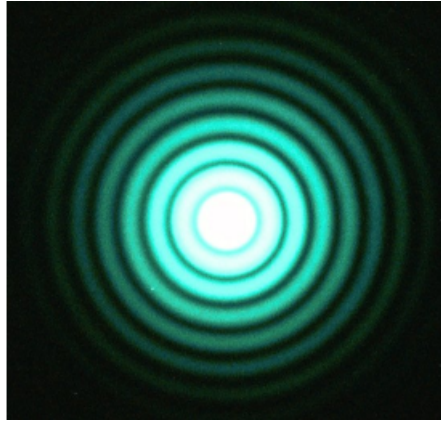


Figura 26: Immagine di diffrazione di un foro circolare: è nota come disco di Airy

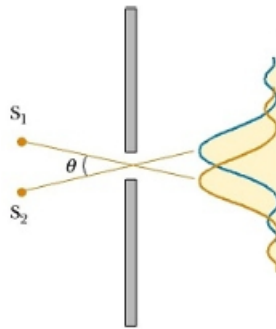


Figura 27

6.2 Criterio di Rayleigh

Consideriamo uno strumento ottico, trascuriamo l'effetto di ingrandimento dovuto alla presenza di lenti, esso si può immaginare costituito da un'apertura circolare di diametro D che raccoglie la luce su uno schermo (Fig. 27).

I due punti luminosi (che supporremo con buona approssimazione monocromatici) sono le nostre sorgenti, assumiamo che siano incoerenti tra di loro; da questo segue che la figura di diffrazione totale sullo schermo appare semplicemente come la somma delle singole figure di diffrazione prodotta da ciascuna sorgente. Le onde che arrivano a monte sull'apertura sono fuori asse ottico: se θ è l'apertura angolare tra i due punti, è anche la distanza angolare tra i centri dei dischi di Airy (nome della figura di diffrazione da un foro circolare) che costituiscono le immagini dei due punti sullo schermo, se quest'angolo è piccolo possiamo approssimare: $\sin \theta \simeq \theta$. Il criterio di Rayleigh asserisce che i due punti sono distinguibili se il primo massimo

di una figura di diffrazione non entra entro al primo minimo della seconda. Nella situazione limite la distanza tra i centri è esattamente il semidiametro angolare del disco. Secondo questo criterio la minima distanza angolare che uno strumento può risolvere quindi è:

$$\theta_{\min} = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

7 Principio di Complementarità di Babinet

Supponiamo di inviare un'onda piana monocromatica

$$e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

da sinistra contro un muro ($y = 0$) opaco in direzione y perpendicolare ad esso; quello che succede è che il muro assorbe l'onda e perciò a destra non si vede nulla.

$$\psi(y > 0) = 0$$

possiamo vederla anche nel seguente modo: gli elettroni del muro sentono il campo elettrico dell'onda piana incidente, a causa di questo iniziano a oscillare e a loro volta producono tutti insieme un'onda ψ_e ⁹ A destra del muro si avrà per sovrapposizione lineare l'onda incidente più l'onda prodotta dagli elettroni

$$\psi(y > 0) = \psi_e + e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

Se il muro è opaco cioè assorbe tutta la radiazione incidente, deve essere

$$\psi_e = -e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

quindi gli elettroni assorbono energia dall'onda senza violare la conservazione dell'energia totale; infatti la sottraggono ad essa grazie all'interferenza distruttiva.

Supponiamo ora di praticare un foro nel muro. Un dubbio che può sorgere è questo: se sono gli elettroni le vere sorgenti di onde secondarie che interferendo con quella incidente danno origine alla figura di diffrazione, che senso ha il principio di Huygens?

Questo principio non ha alcun senso fisico, calcola la propagazione di un'onda assumendo sorgenti dove in realtà non ci sono. Per un foro largo

⁹cariche accelerate irradiano, in particolare cariche oscillanti generano onde elettromagnetiche alla stessa frequenza a cui oscillano

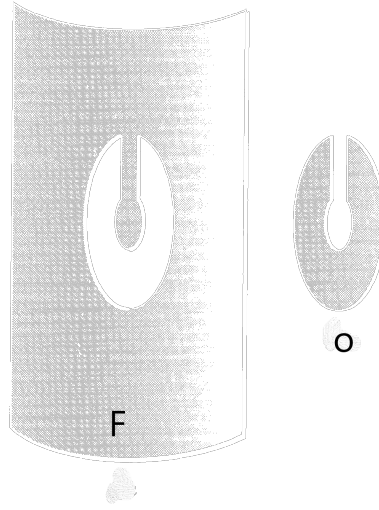


Figura 28

questo è evidente, tuttavia continua a rimanere totalmente infondato anche per fenditure sottili o puntiformi.

Quello che è vero è che Huygens alla fine dei calcoli fornisce il risultato giusto per l'intensità. Dunque come si spiega?

La validità di Huygens discende dal principio di Babinet che mostriamo ora.

Il muro opaco completo si può vedere come somma di due parti (Fig. 28):

- Il muro in cui è stato praticato il foro, che chiamiamo F .
- Un ostacolo opaco che ha la stessa forma del foro e che chiamiamo O .

quando l'onda incide sul muro, gli elettroni di ciascuna delle due parti, oscillando, producono un'onda secondaria: chiamiamo ψ_f è quella prodotta da F e ψ_o quella prodotta da O . Segue subito

$$\psi_o + \psi_f = \psi_e = -e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

Ora consideriamo l'esperimento in cui facciamo incidere l'onda su F e osserviamo la figura di diffrazione a destra del muro.

Chiaramente la ψ che stiamo guardando è sempre per sovrapposizione lineare, l'onda incidente più l'onda prodotta dagli elettroni di F

$$\psi = \psi_f + e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

Se usiamo l'equazione precedente si ha

$$\psi(\text{foro}) = -\psi_o \quad (37)$$

Ci stiamo avvicinando ad Huygens, con questa equazione si sta dicendo che è possibile generare la stessa figura di diffrazione con sorgenti distribuite in O .

Huygens come descritto prima discende assumendo che gli elettroni rispondano con onde perfettamente sferiche e quindi che

$$\psi_o = - \int_O \frac{e^{ikr}}{r} \frac{dx dz}{A}$$

è da notare che per ricavare la relazione (37) non abbiamo usato il fatto che l'onda incidente fosse un'onda piana.

In generale per qualsiasi tipo di onda ψ_{inc} che arriva da sinistra succede che

- La figura di diffrazione vista a destra quando è presente il muro col foro F è

$$\psi(\text{foro}) = -\psi_o$$

- La figura di diffrazione vista a destra quando si pone l'ostacolo O in mezzo è

$$\psi(\text{ostacolo}) = \psi_{\text{inc}} + \psi_o$$

Se il fascio è collimato, come succede nei casi reali, possiamo immaginare che ψ_{inc} vada a zero allontanandosi dall'asse y e valga lontano dalla direzione del fascio incidente

$$\psi(\text{foro}) = -\psi(\text{ostacolo})$$

il pattern di diffrazione creato da un muro opaco con un foro è lo stesso di quello creato da un ostacolo opaco con la forma del foro. Questo è quello che viene chiamato principio di Babinet e sottolineiamo che non vale dove ψ incidente è sensibilmente diversa da zero.

8 Reti di diffrazione

Con reticolo di diffrazione intendiamo qui un componente ottico con struttura periodica. I reticoli di diffrazione possono lavorare per trasmissione o per riflessione. Un reticolo di diffrazione in trasmissione può essere semplicemente una rete a maglia molto sottile o una superficie su cui sono stati praticati fori in modo periodico, un esempio che abbiamo già visto sono le N fenditure equispaziate. Per realizzare i reticoli di diffrazione in riflessione si depositano

su un substrato dei punti micrometrici che fungono da centri diffusori. Questi sono caratterizzati da come rispondono i punti alla luce, noi supporremo che ogni elemento del reticolo risponda con un'onda sferica quando colpito da radiazione elettromagnetica.

8.1 Reticolo 1D

Se il reticolo è 1D con passo $\mathbf{a}$ e N punti, allora valgono i calcoli svolti nella sezione precedente per la diffrazione da fenditura multipla. Cioè se $\mathbf{k}$ è il vettore d'onda, ciò che indica la direzione dell'onda piana incidente, e $\mathbf{k}'$ è la direzione in cui guardiamo l'intensità diffratta dal reticolo abbiamo trovato precedentemente che si ha interferenza costruttiva se

$$(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{a} = \Delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{a} = 2\pi n$$

da cui deduciamo che quello che conta è solo la differenza tra i vettori d'onda.

Se ruoto il reticolo continuando a guardare nella stessa direzione, la figura di diffrazione cambia perché cambia $\mathbf{a}$ visto che ruota insieme al reticolo, mentre $\Delta \mathbf{k}$ resta lo stesso.

8.2 Retioli 2D

Un reticolo bidimensionale periodico di $N_1 \times N_2$ può essere descritto dando le coordinate dei punti cioè

$$\mathbf{r}_i = n\mathbf{a}_1 + m\mathbf{a}_2 \quad \text{per } n, m \text{ interi con } 0 \leq n \leq N_1 - 1 \text{ e } 0 \leq m \leq N_2 - 1$$

Il reticolo è mostrato in Figura 29.

Siamo interessati a trovare le posizioni angolari dei max principali, cioè di quelli in cui *tutto* il reticolo interferisce costruttivamente. A tal fine possiamo riutilizzare i risultati del punto precedente: per far sì che tutti i punti appartenenti a una singola striscia unidimensionale qualsiasi del reticolo interferiscano costruttivamente tra di loro, devono sicuramente valere le due condizioni

$$\Delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_1 = 2\pi l \tag{38}$$

$$\Delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_2 = 2\pi p \tag{39}$$

con l, p interi.

La domanda a questo punto è se queste due condizioni siano sufficienti per dire che due punti qualsiasi del reticolo interferiscono costruttivamente tra di loro. La risposta è affermativa e diventa più facile vederlo se si pensa che due punti interferiscono costruttivamente quando la differenza di cammino è

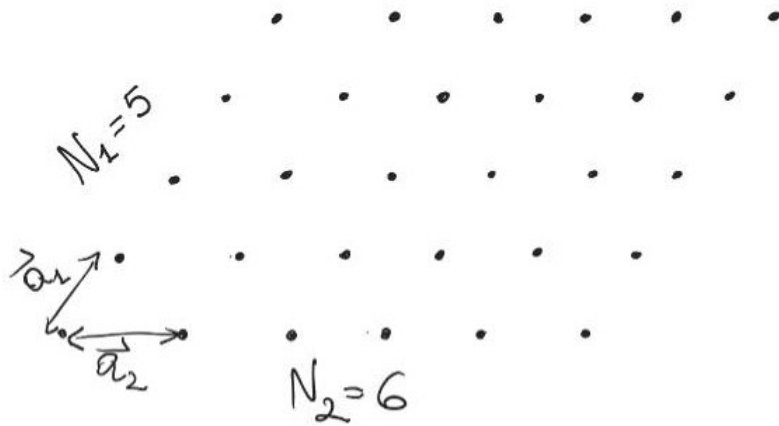


Figura 29: reticolo bidimensionale periodico descritto da $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$

pari a un numero intero di lunghezze d'onda. La differenza di cammino tra due punti distanti nel reticolo, è la somma di tante differenze di cammino tra punti contigui, ma quest'ultime sono un numero intero di lunghezze d'onda per le equazioni (38) e (39).

Le simmetrie con cui sono disposti i centri diffusori sul reticolo si riflettono nelle simmetrie della figura di diffrazione (spesso in maniera non banale). Un manifestazione di questo si vede nel seguente esempio.

Esempio 8.1. Supponiamo di avere un reticolo quadrato nel piano xy :

$$\mathbf{r}_i = n\mathbf{\hat{x}} + m\mathbf{\hat{y}} \quad \text{per } n, m \text{ interi con } 0 \leq n \leq N-1 \text{ e } 0 \leq m \leq N-1$$

e immaginiamo di inviarci contro un'onda piana monocromatica, perpendicolarmente ad esso. Se si pone uno schermo parallelo al reticolo a distanza $D \gg Na$, come si dispongono i primi massimi di luminosità su di esso?

Soluzione 8.1. Se $\mathbf{k}$ individua la direzione in cui stiamo guardando sullo schermo, le due condizioni precedenti diventano

$$\mathbf{k} \cdot (a\mathbf{\hat{x}}) = 2\pi l$$

$$\mathbf{k} \cdot (a\mathbf{\hat{y}}) = 2\pi p$$

se guardiamo solo i massimi più vicini a quello centrale possiamo fare l'approssimazione di angoli piccoli

$$ka\theta_x \simeq 2\pi l$$

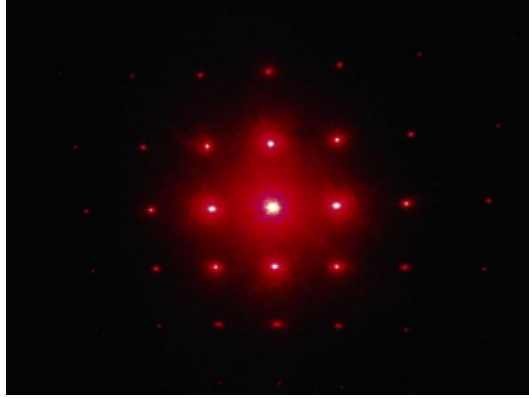


Figura 30: Massimi per un reticolo quadrato

$$ka \theta_y \simeq 2\pi p$$

La posizione di questi massimi sullo schermo è

$$(x, y) = D(\tan \theta_x, \tan \theta_y) \simeq D(\theta_x, \theta_y) = \frac{\lambda D}{a}(l, p)$$

cioè anche essi si dispongono in un reticolo quadrato come il reticolo che li ha prodotti. La Fig. 30 mostra un esperimento di diffrazione da reticolo quadrato con laser. $\square$

Per i reticoli 3D il discorso è analogo: per descrivere il reticolo serve un vettore aggiuntivo $\mathbf{a}_3$ che ci dica il passo nella terza dimensione. Alle due condizioni precedenti per avere i massimi se ne aggiunge una terza analoga

$$\Delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_3 = 2\pi q$$

con q intero.

9 Problemi finali

Problema 9.1 (Pacchetto Gaussiano). Nell'eq. (9) porre

$$C(k) = e^{-(k-k_0)^2 \Delta^2} \quad \text{e} \quad \phi(k) = 0$$

e svolgere l'integrale per ottenere

$$\psi(x, t) \propto e^{-\frac{(x-ct)^2}{4\Delta^2}} \sin(k_0 x - \omega_0 t)$$

cioè una sinusoide di frequenza $\omega_0 = c k_0$ modulata da una Gaussiana di larghezza $\sim \Delta$.

Problema 9.2 (Interferenza fra due sorgenti). Si prendano due sorgenti puntiformi nello spazio, nei punti

$$\mathbf{r}_1 = (d/2, 0, 0) \quad \mathbf{r}_2 = (-d/2, 0, 0)$$

entrambe irradiano alla stessa frequenza a grande distanza (nella zona di Fraunhofer) con un'ampiezza

$$\frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r}$$

dove r è la distanza dalla sorgente.

Trovare il pattern di diffrazione su una sfera di raggio R nella zona di Fraunhofer al variare di λ/d .

Problema 9.3 (Griglia triangolare). Si consideri un foglio opaco nel quale sono presenti dei piccoli buchi disposti come una griglia triangolare di passo d (figura 31). Il foglio è illuminato perpendicolarmente con luce laser monocromatica di lunghezza d'onda λ : quale figura di diffrazione si osserva su uno schermo posto parallelo al foglio e a distanza L da esso? Si assuma $L \gg d \gg \lambda$.

Problema 9.4 (Reticolo di diffrazione modificato). Si consideri un sistema di fenditure parallele (equivalente a un reticolo di diffrazione 1d) con la seguente particolarità: le distanze tra due fenditure consecutive non sono costanti, ma sono alternativamente d e $3d$. La larghezza di tutte le fenditure è costante ed è molto minore di d . Se una radiazione monocromatica di lunghezza d'onda λ incide perpendicolarmente sul reticolo, che figura di diffrazione si forma su uno schermo posto a distanza $L \gg d$ da questo?

Problema 9.5 (Una pellicola di acqua saponata). Un fascio di luce bianca investe, con un angolo di 30° , la superficie di una pellicola di acqua saponata; la luce riflessa presenta un colore verde predominante, di lunghezza d'onda $\lambda_0 = 500\text{nm}$. L'indice di rifrazione del liquido di cui è costituita la pellicola è $n = 1.33$.

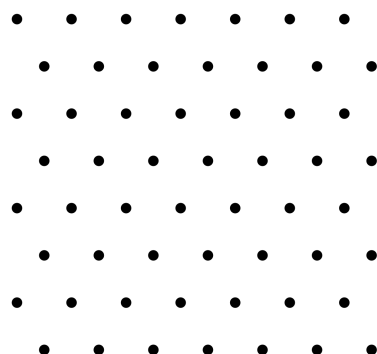


Figura 31: Griglia triangolare. Il passo d è la distanza tra due punti qualsiasi della griglia.

1. Qual è il minimo spessore possibile della pellicola?
2. Di quale colore appare la pellicola illuminata perpendicolarmente alla sua superficie?

Hint: Si tenga conto del cambiamento di fase pari a π subito dall'onda luminosa nella riflessione sulla superficie di un mezzo di indice di rifrazione maggiore di quello dell'aria circostante.

Problema 9.6. Si esamina una particolare linea spettrale usando una griglia di diffrazione con 300 linee al mm. Si osserva che per un angolo pari a 24.46° la linea contiene sia il rosso ($640 - 750$ nm) che il blu/violetto ($360 - 490$ nm). Esistono altri angoli per cui si osserva la stessa cosa?.

Problema 9.7. Si considerino tre fenditure sottili praticate su uno schermo aventi distanze relative pari ad a e b (che sono in rapporto razionale). Sulle fenditure incide un'onda monocromatica. Si trovi la condizione su a e b perché i minimi della figura di diffrazione abbiano intensità nulla.

Problema 9.8. Un fascio laser sottile e monocromatico incide perpendicolarmente su una griglia di diffrazione di passo d . Come cambia la figura di interferenza che si osserva su uno schermo posto a distanza $L \gg d$ se la griglia è ruotata di un angolo ϕ attorno a uno dei seguenti assi:

1. l'asse parallelo alle fenditure della griglia?
2. l'asse perpendicolare alle fenditure della griglia?

9.1 Soluzioni

Soluzione 9.1. Sostituiamo $C(k)$ e $\phi(k)$ nell'espressione

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(k) \sin(kx - \omega t + \phi(k)) dk$$

e passiamo in notazione complessa visto che l'integrale è una somma e quindi un'operazione lineare. Si ottiene

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(k-k_0)^2 \Delta^2} e^{i(kx - \omega t + \pi/2)} dk$$

per ogni k, ω che entrano nell'integrale vale la relazione di dispersione $\omega = ck$, quindi

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= e^{-i\pi/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(k-k_0)^2 \Delta^2} e^{ik(x-ct)} dk \\ &= e^{i[k_0(x-ct) - \pi/2]} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(k-k_0)^2 \Delta^2} e^{i(k-k_0)(x-ct)} dk \end{aligned}$$

a questo punto per eseguire l'integrale è conveniente completare il quadrato, cioè

$$\psi(x, t) = e^{-\frac{(x-ct)^2}{4\Delta^2}} e^{i[k_0(x-ct) - \pi/2]} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-[(k-k_0)\Delta + i\frac{x-ct}{2\Delta}]^2} dk$$

sapendo che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$, si trova

$$\psi(x, t) = \sqrt{\frac{\pi}{\Delta}} e^{-\frac{(x-ct)^2}{4\Delta^2}} e^{i[k_0(x-ct) - \pi/2]}$$

Prendiamo la parte reale e otteniamo in fine

$$\psi(x, t) = \sqrt{\frac{\pi}{\Delta}} e^{-\frac{(x-ct)^2}{4\Delta^2}} \sin(k_0 x - \omega_0 t)$$

Soluzione 9.2. Se guardiamo in direzione individuata da $\mathbf{k}$ su una sfera di raggio molto grande rispetto a d , possiamo approssimare l'onda (come specificato nelle dispense nella sezione dell'esperimento di Young) con

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} + \mathbf{d}/2) - i\omega t}}{|\mathbf{r} + \mathbf{d}/2|} + \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{d}/2) - i\omega t}}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}/2|} \simeq \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} + \mathbf{d}/2) - i\omega t}}{r} + \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{d}/2) - i\omega t}}{r}$$

Visto che ci interessa la media temporale, come già fatto nella lezione possiamo tralasciare la dipendenza dal tempo; raccogliamo in oltre la parte comune ai due esponenziali ottenendo

$$\psi(\mathbf{r}, t) = 2 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{d}/2) \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t}}{r}$$

l'intensità vale

$$\psi^2 = \frac{2 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{d}/2)}{r^2}$$

Chiaramente si ha simmetria per rotazione attorno all'asse che collega le due sorgenti e le frange di interferenza formano degli anelli perpendicolari a tale asse.

Se $\lambda \gg d$ allora per qualunque angolo si ha interferenza praticamente costruttiva e possono essere trattate a tutti gli effetti come un'unica sorgente di ampiezza doppia e intensità quadrupla.

Se $\lambda \ll d$ le frange si fanno sempre più vicine e strette, in particolare circa in metà dei punti della sfera si avrà interferenza costruttiva e nell'altra metà distruttiva; effettivamente facendo il conto l'intensità media sulla sfera è proprio la somma delle intensità delle due sorgenti.

Soluzione 9.3. Scegliamo come origine delle coordinate un foro qualsiasi praticato sul foglio, come asse x, y rispettivamente quello orizzontale e verticale in figura 31 e come asse z quello perpendicolare al foglio.

La posizione dei fori che formano la griglia può essere scritta come

$$\mathbf{r} = n\mathbf{a}_1 + m\mathbf{a}_2$$

$$\text{con } \mathbf{a}_1 = d(1, 0, 0)$$

$$\text{e } \mathbf{a}_2 = d(1/2, \sqrt{3}/2, 0)$$

al variare degli interi n ed m .

I massimi di interferenza si trovano nelle direzioni individuate dai $\mathbf{k}$ tali che

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_1 = 2\pi l$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_2 = 2\pi p$$

con l, p interi.

Le componenti di $\mathbf{k}$ le indichiamo con

$$\mathbf{k} = k(\theta_x, \theta_y, \sqrt{1 - \theta_x^2 - \theta_y^2})$$

Le condizioni scritte prima per i massimi di interferenza diventano

$$kd\theta_x = 2\pi l$$

$$kd\left(\frac{1}{2}\theta_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\theta_y\right) = 2\pi q$$

da queste si ottiene

$$\theta_{x,\text{Max}} = \frac{2\pi}{kd}l$$

$$\theta_{y,\text{Max}} = \frac{2\pi}{kd} \frac{\sqrt{3}}{3}(2q - l)$$

Guardare in direzione $\mathbf{k}$ equivale a guardare sullo schermo a distanza L il punto

$$\left(\frac{L\theta_x}{\sqrt{1 - \theta_x^2 - \theta_y^2}}, \frac{L\theta_y}{\sqrt{1 - \theta_x^2 - \theta_y^2}} \right)$$

visto che $d \gg \lambda$ possiamo concentrarci sui primi massimi che saranno ad angoli piccoli, in questo modo si può approssimare al primo ordine la posizione dei Max sullo schermo come

$$L(\theta_{x,\text{Max}}, \theta_{y,\text{Max}})$$

cioè

$$\frac{2\pi L}{kd} \left(l, \frac{\sqrt{3}}{3}(2q - l) \right)$$

al variare di q ed l interi. Riuscite a capire a che disposizione corrisponde questa?

Soluzione 9.4. Si può trovare la soluzione di questo problema con tanto di figure nel libro "200 More Puzzling Physics Problems: With Hints and Solutions" di Péter Gnädig, Gyula Honyek, Máté Vigh; si tratta del problema numero 123.

Soluzione 9.5. Un raggio di luce che incide sulla pellicola nel punto A viene in parte riflesso e in parte trasmesso; il raggio trasmesso subisce una rifrazione e giunge sulla superficie inferiore della pellicola nel punto B dove, nuovamente, viene parzialmente riflesso per emergere finalmente nel punto C della superficie superiore della pellicola dove subisce una nuova rifrazione. Un raggio parallelo al precedente che incide sulla pellicola nel punto C viene ugualmente in parte riflesso: si osserva l'interferenza dei due raggi provenienti dal punto C. Bisognerà calcolare la differenza di fase tra il raggio riflesso direttamente in C e quello che è stato riflesso dalla superficie inferiore della pellicola. La differenza di fase dipende dalla differenza di cammino ottico dei due raggi e quindi dallo spessore della pellicola e dalla lunghezza d'onda della luce. A seconda dello spessore della pellicola, le componenti di diverso color subiranno interferenza costruttiva o distruttiva.

La condizione per avere interferenza costruttiva è che la differenza tra i due cammini ottici contenga un numero intero di lunghezze d'onda. I raggi

incidenti sono in fase nei due punti A e D. La differenza dei percorsi geometrici dei due raggi è

$$\bar{AB} + \bar{BC} - \bar{DC} = \frac{2d}{\cos \beta} - 2d \tan \beta \sin \alpha$$

La lunghezza d'onda della luce verde nel liquido è $\frac{\lambda_0}{n}$. Il numero di lunghezze d'onda nel tratto $AB + BC$ è quindi:

$$\frac{2nd}{\lambda_0 \cos \beta}$$

Il numero di lunghezze d'onda in DC è:

$$\frac{2d \tan \beta \sin \alpha}{\lambda_0} = \frac{2d \sin \beta \sin \alpha}{\lambda_0 \cos \beta}$$

Si deve inoltre tener conto del fatto che la riflessione sulla superficie superiore, che separa l'aria dal mezzo otticamente più denso, determina uno sfasamento di mezza lunghezza d'onda e il numero di lunghezze d'onda nel tratto DC , immediatamente dopo la riflessione, diventa:

$$\frac{2d \sin \beta \sin \alpha}{\lambda_0 \cos \beta} + \frac{1}{2}$$

La condizione di interferenza costruttiva dei due raggi si ha se viene soddisfatta la seguente equazione:

$$\frac{2nd}{\lambda_0 \cos \beta} - \frac{2d \sin \beta \sin \alpha}{\lambda_0 \cos \beta} - \frac{1}{2} = k$$

con k numero intero. La legge di Snell afferma $\sin \alpha = n \sin \beta$ e sostituendo nella relazione precedente si trova:

$$\frac{2nd}{\lambda_0 \cos \beta} (1 - \sin^2 \beta) - \frac{1}{2} = k$$

Tenendo conto che $\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}$ e $\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta}$, la condizione di interferenza costruttiva può essere scritta nella forma

$$d = \frac{4d}{\lambda_0} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = 2k + 1$$

Il colore predominante dipende dunque dall'indice di rifrazione e dallo spessore della pellicola. Risolvendo l'equazione precedente rispetto a d si ottiene

$$d = \frac{\lambda_0}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} (2k + 1)$$

Poiché viene richiesto lo spessore minimo si pone $k = 0$. Sostituendo i valori dati per la lunghezza d'onda del colore verde, l'indice di rifrazione dell'acqua saponata e l'angolo di incidenza, si trova lo spessore della pellicola:

$$d = \frac{500 \text{ nm}}{4\sqrt{(1.33)^2 - 0.25}}$$

In questo caso $\alpha = 0$. Il colore predominante in direzione perpendicolare alla pellicola ha lunghezza d'onda che si può ricavare ponendo $k = 0$ e introducendo il valore già noto dello spessore d .

$$\lambda_1 = 4dn = 540 \text{ nm}$$

Soluzione 9.6. Si può trovare la soluzione di questo problema nel libro "200 Puzzling Physics Problems: With Hints and Solutions" di Péter Gnädig, Gyula Honyek, K. F. Riley; si tratta del problema numero 127.

Soluzione 9.7. Considero il problema nelle stesse approssimazioni con cui si è trattato Young durante la lezione. Prendo come riferimento di fase l'onda piana che arriva dalla fessura centrale. Le due sopra hanno un cammino differente rispetto a questa che si manifesta nell'interferenza sullo schermo. Scrivo l'onda in arrivo su un generico punto di esso:

$$\psi = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \left(1 + e^{+ika \sin \theta} + e^{-ikb \sin \theta} \right)$$

Se calcoliamo l'intensità dell'onda otteniamo:

$$I \propto |\psi|^2 = 3 + 2 \left[\cos(kax) + \cos(kbx) + \cos(k(a+b)x) \right]$$

dove $x = \sin \theta$ è l'angolo che la perpendicolare allo schermo forma con la congiungente tra la prima fenditura e il punto di osservazione.

Da questa forma si vede che se T è il periodo della figura di diffrazione deve essere:

$$aT = 2\pi m$$

$$bT = 2\pi n$$

con n ed m interi. Vediamo che anche la terza funzione $\cos(kbx)$ è periodica. Dunque concludiamo dicendo che la richiesta perché vi sia periodicità è che $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$.

Il problema richiede di trovare per quali valori di a e b si può verificare $I = 0$ in qualche punto. $I \propto |\psi|^2$ e quindi $I = 0$ implica $|\psi|^2 = 0$, ma questo può succedere solo se in quel punto $\psi = 0$. Essendo ψ proporzionale alla somma di 3 fasi essa si può annullare solo se $1 + e^{+ika \sin \theta} + e^{-ikb \sin \theta} = 0$ dunque abbiamo che i tre fasori che rappresentano i numeri complessi devono trovarsi sui vertici di un triangolo equilatero. Perciò:

$$\begin{aligned} ka \sin \theta &= \frac{2}{3}\pi + 2\pi m \\ -kb \sin \theta &= -\frac{1}{3}\pi + 2\pi n \end{aligned}$$

questo porta alla scrittura:

$$\frac{a}{b} = \frac{1 + 3m}{-2 + 3n}$$

che si può verificare essere equivalente alla richiesta che il rapporto $\frac{a}{b} = \frac{i}{j}$ interi e $i - j$ multiplo di 3.

Soluzione 9.8. Si può trovare la soluzione di questo problema con tanto di figure nel libro "200 Puzzling Physics Problems: With Hints and Solutions" di Péter Gnädig, Gyula Honyek, K. F. Riley; si tratta del problema numero 128.