

Fluidodinamica

Massimo Bilancioni*, Daniele Battesimo Provenzano[†]

7 febbraio 2019

Sommario

Nella lezione si trattano alcuni argomenti base della fluidodinamica come l'idrostatica, i flussi ideali e incompressibili, il teorema di Bernoulli e il regime laminare per fluidi viscosi. Vengono inoltre forniti alcuni esempi per facilitare la comprensione.

1 Introduzione

Si definisce fluido un materiale che si deforma se sottoposto a uno sforzo di taglio, cioè uno stress (forza per unità di area) che ha direzione nel piano tangente alla superficie del fluido (Figura 1).

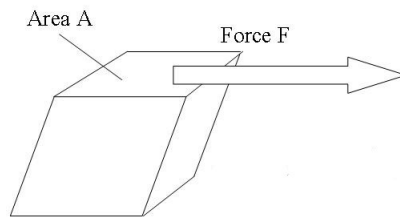


Figura 1: sforzo di taglio

Per studiarne il comportamento approssimiamo il fluido a qualcosa di continuo, cioè ogni punto del fluido sarà caratterizzato da una certa velocità / pressione / densità / etc . Questi punti che sono un'idealizzazione, corrispondono nella realtà a porzioni di fluido che, detto senza troppo rigore, devono essere sufficientemente grandi da poter trascurare la granularità della materia

*massimo.bilancioni@sns.it

[†]daniele.provenzano@sns.it

e allo stesso tempo abbastanza piccole da poter essere considerate come punti geometrici dello spazio. Chiameremo queste elementi fluidi nel seguito della lezione.

La dinamica di un fluido si può studiare da due differenti punti di vista:

- il primo consiste nel fissare l'elemento di fluido e guardare la sua evoluzione temporale (Lagrangiano)
- il secondo consiste nel scegliere un punto dello spazio occupato dal fluido e vedere come cambiano le grandezze fisiche nel tempo in questo particolare punto. (Euleriano)

Nella prossima sezione, partendo dalla descrizione Euleriana di un flusso “passiamo” al punto di vista Lagrangiano adatto a scrivere l'equazione del moto per l'elemento fluido.

1.1 Derivata materiale

Supponiamo di descrivere il moto del fluido dal punto di vista Euleriano. In questo modo abbiamo una funzione $\vec{v}(\vec{r}, t)$ che ci dice la velocità del fluido nella posizione $\vec{r}$ al tempo t . Con questa informazione ci poniamo l'obiettivo di trovare l'accelerazione del fluido in un punto generico a un istante t .

È da notare che $\vec{a}$ non è semplicemente $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$; per convincersene si pensi all'esempio di un flusso unidimensionale indipendente dal tempo in cui la velocità varia da punto a punto (ad esempio $\vec{v}(x) = \alpha x \hat{x}$), chiaramente l'accelerazione del fluido non può essere nulla ovunque, tuttavia in tutti i punti $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$.

Ciò che rappresenta $\frac{\partial \vec{v}(x, y, z, t)}{\partial t}$ è la differenza tra le velocità di due elementi fluidi diversi: cioè quelli che passano per $\vec{r}$ al tempo t e al tempo $t + dt$. Quello che invece interessa a noi è la variazione della velocità *dello stesso elemento fluido* nel tempo dt .

Per trovarla immaginiamo di lasciare evolvere il sistema per un tempo dt , l'elemento fluido che si trovava in $\vec{r} = (x, y, z)$ al tempo t , si trova in $\vec{r} + \vec{v} dt = (x + dx, y + dy, z + dz)$ al tempo $t + dt$; segue che l'accelerazione cercata è

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) - \vec{v}(x, y, z, t)}{dt} =$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \sum_i v_i \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i}$$

(nel primo passaggio si è applicata la chain rule) Questa viene chiamata derivata materiale (o convettiva) e si indica con $\frac{D\vec{v}}{Dt}$.

Esempio 1.1. Si consideri un rubinetto aperto che si trova ad altezza h da cui esce un getto costante a velocità v_0 . Sapendo che la velocità dell'acqua ad un'altezza z vale

$$v_z = \sqrt{2g(h - z) + v_0^2}$$

(si ottiene imponendo la conservazione dell'energia per la singola porzione di fluido) trovare l'accelerazione in ogni punto.

Soluzione 1.1. Il flusso è indipendente dal tempo, di conseguenza l'accelerazione lungo z vale

$$a_z = v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = v_z \frac{-2g}{2v_z} = -g$$

Come ci si poteva aspettare è costante e uguale all'accelerazione gravitazionale.

Visto che tornerà fuori più avanti, diamo la definizione di linea di flusso: La linea di flusso è, fissato l'istante t , quella linea tangente in ogni punto alla velocità $\vec{v}$; se il flusso è stazionario (indipendente dal tempo), questa coincide con le traiettorie degli elementi fluidi. Una conseguenza della definizione è che due linee di flusso non possono mai incrociarsi se non in punti in cui la velocità è nulla, altrimenti nel punto di intersezione la velocità non sarebbe definita.

È da notare che lo stesso discorso si applica a una generica grandezza $f(\vec{r}, t)$ funzione della posizione e del tempo, come la densità, l'energia cinetica, la temperatura, etc. Se siamo interessati a conoscere come varia f nel tempo per un certo elemento fluido abbiamo

$$\frac{Df}{Dt}(\vec{r}, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(\vec{r}, t) + \sum_i v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{r}, t) \quad (1)$$

dove v_i è la componente i -esima della velocità dell'elemento fluido. Come visto prima nel caso dell'accelerazione, il secondo termine a destra (moltiplicato per dt) rappresenta la variazione di f quando ci si sposta di $\vec{v} \cdot dt$ lungo la linea di flusso a tempi fissati.

Quello che abbiamo trovato con la (1), visto in altri termini, è come si passa dalle derivate nella rappresentazione Euleriana alla derivata Lagrangiana (derivata materiale).

Esempio 1.2. Consideriamo in due dimensioni un fluido con velocità $\vec{v} = \alpha(x, -y)$, in cui è presente un inquinante con concentrazione (per unità di area) $c = \beta x^2 y e^{-\alpha t}$.

- Trovare le traiettorie degli elementi fluidi
- Preso un certo elemento fluido, dire come varia nel tempo la concentrazione dell'inquinante all'interno di tale elemento.

Soluzione 1.2. Sappiamo che

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x \quad \frac{dy}{dt} = -\alpha y$$

per trovare le traiettorie eliminiamo il tempo prendendo il rapporto delle due equazioni. Si ottiene

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} \implies x dy + y dx = 0 \implies d(xy) = 0 \implies xy = k$$

quindi gli elementi fluidi si muovono su iperboli.

La variazione nel tempo della concentrazione è la derivata materiale di quest'ultima

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + v_x \frac{\partial c}{\partial x} + v_y \frac{\partial c}{\partial y} = -\alpha c + 2\alpha c - \alpha c = 0$$

che quindi è nulla.

Per il flusso del nostro problema vale la seguente proprietà (che non dimostriamo): l'area di un elemento fluido che evolve nel tempo è costante¹. Questo implica che anche la quantità di inquinante contenuta in ogni elemento fluido è costante nel tempo e una possibile interpretazione fisica di quello che sta accadendo è che l'inquinante viene trasportato dal fluido.

Se scegliamo di vederla in questo modo, segue che anche la quantità totale di inquinante rimane fissa nel tempo (si sta solo spostando)

$$\int c \, dx \, dy = \text{const.}$$

tuttavia dall'espressione di c la concentrazione diminuisce in ogni punto del piano al passare del tempo. Come è possibile?

¹Equivale a dire che la densità dell'elemento non varia nel tempo perchè la stessa quantità di materia continua a occupare lo stesso spazio.

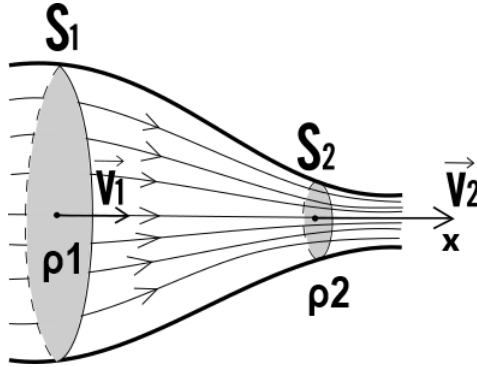


Figura 2: tubo con sezione variabile.

1.2 Conservazione della materia

Si immagini un tubo con asse lungo x e sezione $A(x)$ variabile (Figura 2). Vogliamo scrivere la conservazione della materia per un fluido che ci scorre all'interno con velocità $v_x(x)$ ² e densità $\rho(x)$ indipendenti dal tempo.

Quello che va imposto, detto a parole è che presa la zona di tubo compresa tra x_1 e x_2 generici, tanta materia entra quanta ne esce (infatti la quantità di materia nella zona compresa è costante), che si traduce in: il flusso di materia attraverso la sezione $A(x)$ deve essere costante e quindi indipendente da x . Questo si scrive come:

$$\Phi(m) = \frac{dm}{dt} = \frac{\rho A dx}{dt} = \rho A v_x = \text{const.}$$

Il ragionamento resta valido se la velocità dipende dal tempo. Provare a convincersene.

Esempio 1.3. Riprendendo l'esempio 1.1 (del rubinetto) trovare la sezione del flusso in funzione dell'altezza se il foro da cui esce l'acqua ha sezione A_0 .

Soluzione 1.3. Dato che la densità è costante, vale

$$v_z A(z) = v_0 A_0 \quad \Rightarrow \quad A(z) = \frac{v_0 A_0}{v_z} = \frac{A_0}{\sqrt{2 \frac{g(h-z)}{v_0^2} + 1}}$$

abbassandosi la sezione minore è dovuta all'aumento della velocità.³

²Le altre componenti della velocità sono non nulle se la sezione è variabile, a noi però interessa solo quella lungo x .

³Dato che la sezione diminuisce la componente radiale della velocità v_ρ è non nulla, a rigore uno dovrebbe tenere conto anche di questa quando impone la conservazione dell'energia per trovare v_z ; tuttavia $v_\rho \ll v_z$ se v_0 è abbastanza grande e quindi si trascura (siete invitati a quantificare questo "abbastanza grande").

Il risultato trovato invece non vale se ρ a dipendere dal tempo, infatti a differenza di prima in questo caso si può avere un accumulo temporaneo di materia nella regione tra x_1 e x_2 . Quello che siamo in grado di dire ora è, detta M la quantità di materia compresa in questa regione, la sua variazione nel tempo è uguale al flusso netto entrante:

$$\frac{dM}{dt} = \Phi_1(m) - \Phi_2(m)$$

Cioè

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho A dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} A dx = \rho(x_1, t) A(x_1) v(x_1) - \rho(x_2, t) A(x_2) v(x_2)$$

1.3 Equazione del moto

Vogliamo scrivere l'equazione del moto per l'elemento fluido, cioè l'equivalente di $\vec{F} = m\vec{a}$. Sappiamo dalla sezione precedente come si scrive l'accelerazione. Per quanto riguarda le forze distinguiamo innanzitutto tra i due tipi possibili:

- *le forze di volume*, l'intero volume dell'elemento ne risente. Un esempio è la forza gravitazionale.
- *le forze di contatto*, interessano sola la superficie dell'elemento fluido. Degli esempi sono le forze dovute alla pressione e all'attrito tra elementi contigui.

Indichiamo con $\vec{f}$ la forza per unità di volume dovuta alle forze di volume (nel caso gravitazionale $\vec{f} = \rho\vec{g}$).

A questo punto vogliamo scrivere il termine dovuto alle forze di contatto. Per il momento assumiamo che il fluido sia ideale, cioè che la sua viscosità sia nulla; di conseguenza dobbiamo calcolare solo la forza esercitata dalla pressione. Lo facciamo per un cubetto⁴ di lato dl che sarebbe il nostro elemento fluido (Figura 3), con spigoli orientati lungo gli assi cartesiani. Il contributo alla forza di due facce opposte, visto che dl è molto piccolo, è ⁵:

$$- [P(x_i + dl) - P(x_i)] (dl^2) \hat{x}_i = - \frac{P(x_i + dl) - P(x_i)}{dl} (dl)^3 \hat{x}_i = - \frac{\partial P}{\partial x_i} dV \hat{x}_i$$

⁴il risultato che si ottiene è generale e vale anche se la forma dell'elemento fluido è diversa da un cubetto (infatti questa si può approssimare con tanti cubettini)

⁵Qui non si sta dicendo che la pressione sulle facce opposte è costante, ma che la differenza di pressione punto per punto è approssimabile a costante.

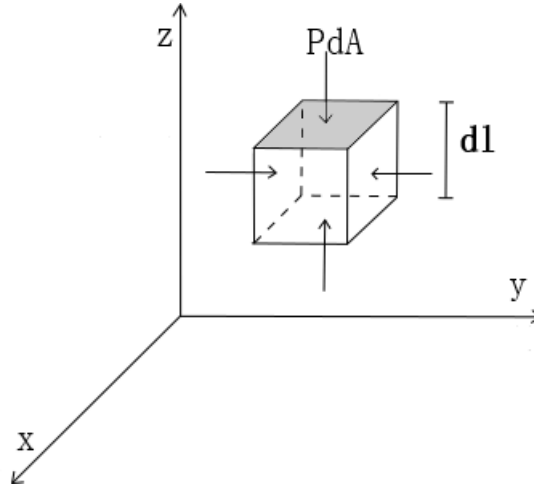


Figura 3: cubetto di fluido.

quindi per il cubetto la forza dovuta alla pressione si può riscrivere come ⁶

$$\vec{F}_P = - \sum_i \frac{\partial P}{\partial x_i} dV \hat{x}_i$$

Notiamo per chi è familiare, che il termine a destra è proporzionale al gradiente della pressione (per il resto della lezione assumerò che voi non lo conosciate):

$$\vec{F}_P = -\vec{\nabla} P dV$$

Ora, inserendo i vari termini siamo pronti a scrivere l'equazione del moto

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \vec{F} \\ \rho dV \frac{D\vec{v}}{Dt} &= \vec{f} \cdot dV + \vec{F}_P \\ \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} &= \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \sum_i v_i \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} \right) = \vec{f} - \sum_i \frac{\partial P}{\partial x_i} \hat{x}_i \end{aligned} \quad (2)$$

⁶Per un corpo macroscopico dove non possiamo fare le stesse approssimazioni questa forza si scrive come

$$\vec{F}_P = - \int_S P \cdot \hat{n} dA$$

dove S è la superficie del corpo, $\hat{n}$ è il versore uscente e ortogonale alla superficie in ogni punto e il segno negativo sta a indicare che il verso della forza è quello entrante.

1.4 Idrostatica

Partiamo dal caso più semplice, ossia il fluido è fermo in ogni punto. L'equazione (2) si riduce a

$$\vec{f} = \sum_i \frac{\partial P}{\partial x_i} \hat{x}_i \quad (3)$$

che equivale a dire che la forza su ogni volumetto deve essere nulla e questo implica automaticamente che il momento torcente su un volume di forma arbitraria V del fluido è nullo.

Se la forza di volume è proporzionale alla massa si può scrivere $f_i = \rho E_i$ e se la forza per unità di massa $\vec{E}$ è conservativa, si può vedere come derivata di un potenziale $E_i = -\frac{\partial \phi_i}{\partial x_i}$ e la (3) si riscrive per la singola componente:

$$-\rho \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial P}{\partial x_i} \quad (4)$$

Ora applichiamo l'equazione a un fluido immerso in campo gravitazionale, si ha

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad \implies \quad P(z) = P(z_0) - g \int_{z_0}^z \rho(z) dz$$

Il potenziale associato alla forza gravitazionale è $\phi = gz$. Nel caso particolare in cui ρ non dipenda da z otteniamo la nota legge di Stevino

$$P(z) - P(z_0) = -\rho g(z - z_0)$$

Esempio 1.4. Mostrare che nell'ipotesi precedente sulle superfici equipotenziali la pressione è costante. *hint*: se ci fosse una variazione di pressione il liquido potrebbe essere in equilibrio? Si consideri un tubo a U con due liquidi di densità diversa in equilibrio sotto la presenza di gravità. In generale P non è costante ad altezza fissata, dove fallisce la dimostrazione precedente?

Soluzione 1.4. Se P non fosse costante ci sarebbe una forza non nulla parallela alla superficie dovuta alla differenza di pressione che non potrebbe essere bilanciata in alcun modo dalla forza di volume (che ha componente nulla sulla superficie equipotenziale) e quindi non saremmo in una situazione di equilibrio. Nel ragionamento precedente abbiamo implicitamente usato il fatto che la superficie di interesse immersa nel liquido fosse connessa, cosa che invece non succede quando confrontiamo le due estremità del tubo.

Oltre a P anche ρ è costante su una superficie equipotenziale connessa. Riuscite a fare un ragionamento nello spirito di quello precedente che mostri

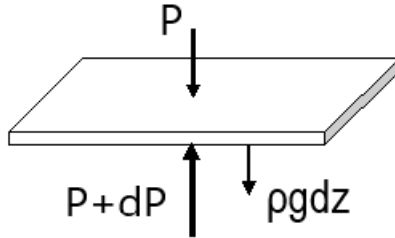


Figura 4: la forza dovuta alla differenza di pressione controbilancia la forza peso dello straterello (Esempio 1.5)

che è vero? (*hint*: Come è l'energia potenziale del liquido se questo è in equilibrio?)

Nel generico problema di idrostatica, supponendo di conoscere il potenziale ϕ , abbiamo l'equazione (3) con le due incognite P e ρ , per arrivare in fondo è necessaria una seconda equazione, ad esempio una che legghi pressione e densità.

Esempio 1.5. Se consideriamo una colonna d'aria non troppo estesa, possiamo supporre che la temperatura in essa sia omogenea. Supponendo inoltre che l'aria sia formata da molecole di massa μ e che obbedisca all'equazione di stato dei gas perfetti:

$$P = \frac{N}{V}kT$$

Trovare la pressione in funzione dell'altezza.

Soluzione 1.5.

$$\rho = \frac{P\mu}{kT}$$

Per Stevino $\partial_z P = -\rho g$, allora segue che

$$\partial_z P = -P \frac{\mu g}{kT} \Rightarrow P(z) = P(0) \exp\left(-\frac{\mu g}{kT} z\right)$$

per come abbiamo ricavato Stevino questo procedimento è equivalente a bilanciare le forze che agiscono sullo straterello ad altezza z (Figura 4).

Esempio 1.6. Consideriamo un cilindro rotante con velocità angolare Ω , contenente all'interno un liquido di densità ρ .

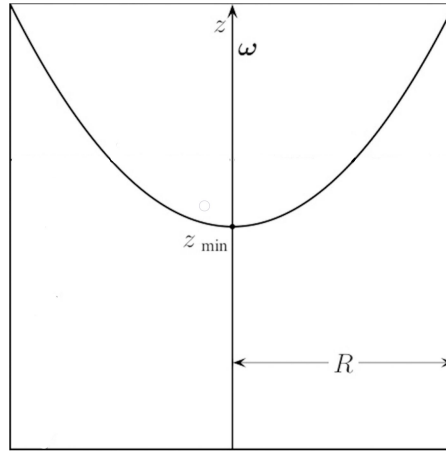


Figura 5: cilindro rotante dell'esempio 1.6

- Trovare lo stato stazionario e in particolare la forma della superficie del liquido
- Cosa cambia nel caso ci siano due liquidi di densità diverse?

Soluzione 1.6. Nello stato stazionario, raggiunto grazie all'attrito, tutto il liquido ruota alla velocità angolare del cilindro. In questo caso si ha, mettendosi nel sistema rotante, che il liquido è fermo e di conseguenza diventa un problema idrostatico. Il potenziale in questo sistema è

$$\phi = -\frac{\Omega^2 r^2}{2} + gz$$

dove il primo termine rappresenta il potenziale centrifugo.⁷

Le superfici equipotenziali sono isobare, in particolare la superficie del liquido sarà quella per cui $P = P_{\text{atm}}$ e sarà della forma

$$z = z_{\text{min}} + \frac{\Omega^2 r^2}{2g}$$

se z_{min} per il dato volume di liquido, si trova sotto la superficie inferiore del cilindro cosa succede?

Nel caso di due liquidi di densità diverse, sappiamo che la densità è stratificata come il potenziale ϕ , in modo da minimizzare l'energia. Di conseguenza il liquido più denso si dispone sotto quello meno denso, cioè ad

⁷Notare che la forza di Coriolis non entra mai in gioco perchè è tutto fermo e questo ci permette di scrivere il potenziale nel sistema rotante.

un ϕ minore e la superficie di separazione tra i due liquidi è un paraboloide (identico alla superficie di separazione liquido-aria ma traslato più in basso). In generale, se ho un liquido di densità non omogenea, la densità aumenta al diminuire di ϕ .

Se i due liquidi hanno densità molto diverse, dopo che il cilindro è stato messo in rotazione, ci potrebbe essere un transiente iniziale nel quale il liquido meno denso è già entrato in rotazione mentre quello più denso è praticamente fermo; in questa situazione qualitativamente succede che il liquido sopra schiaccia ai bordi (dove la pressione è maggiore) quello sottostante e la concavità della superficie di separazione è opposta rispetto a quella nella situazione stazionaria.⁸

Supponiamo di avere un oggetto *completamente circondato* da liquido (che è fermo), in una certa posizione e il tutto in presenza di gravità. Ci chiediamo quale sia la forza che il liquido esercita sul corpo (la forza è dovuta all'effetto della pressione sulla superficie del corpo S). Un modo di procedere è quello di considerare la situazione parallela in cui al posto dell'oggetto c'è dentro la superficie S un volume equivalente di liquido in equilibrio con quello circostante. Dato che la pressione in un generico punto della superficie S è la stessa nelle due situazioni anche la forza esercitata attraverso la superficie è la stessa (non ha importanza cosa ci sia all'interno) e quindi la forza che agisce sul corpo è la stessa che agirebbe sulla massa di liquido spostata (notare che non si richiede che la densità del liquido sia costante). Detta M_l la massa del liquido spostato, la forza vale

$$\vec{F} = M_l g \hat{z}$$

Nel caso l'oggetto non sia completamente circondato da liquido bisogna prestare attenzione: se il corpo è galleggiante basta considerare la parte immersa, tuttavia esistono situazioni meno banali che saranno illustrate nei problemi (caso di una sfera che tappa un foro circolare del contenitore).

Esempio 1.7. Si consideri la situazione precedente. Si vuole trovare il momento torcente che il liquido esercita sul corpo

Soluzione 1.7. Facendo un ragionamento identico a quello sopra, si trova che il momento torcente è uguale al momento torcente $\vec{\tau}$ esercitato sulla massa di liquido spostato ma questo momento torcente, essendo tutto in equilibrio, deve annullare quello gravitazionale:

$$\vec{\tau} + \vec{r}_{\text{cm}} \times M \vec{g} = 0 \implies \vec{\tau} = -\vec{r}_{\text{cm}} \times M \vec{g}$$

⁸Per chi è interessato <https://www.millersville.edu/physics/experiments/061/index.php>

dove $\vec{r}_{\text{cm}}$ è la posizione del centro di massa del volume di liquido spostato.

Discutiamo infine il galleggiamento di un corpo uniforme in un liquido di densità costante con il seguente esempio

Esempio 1.8. Si consideri un un corpo di forma arbitraria, volume V e densità ρ_0

- Qual è il volume immerso?
- Tra tutte le possibili configurazioni in cui il volume immerso del corpo è quello trovato al punto precedente, come faccio a trovare quella che si realizza in pratica? (hint: pensare in termini energetici)
- la posizione di equilibrio può cambiare in base alla densità del liquido?

Soluzione 1.8. Il volume immerso si trova uguagliando la massa del liquido spostata e la massa del corpo. Si ottiene

$$V_i = \frac{\rho_0}{\rho} V$$

Le posizioni di equilibrio si possono ricavare imponendo che il momento torcente sul corpo sia nullo, tuttavia è molto complicato ragionando in termini del solo momento torcente, capire se si tratta di equilibri stabili. Per questo motivo ragioniamo in termini energetici. Sappiamo che una posizione d'equilibrio stabile è sicuramente quella per cui l'energia potenziale del corpo è minima⁹, cerchiamo quindi di trovare la posizione che la minimizza.

L'energia potenziale del corpo sarà la somma delle energie potenziali della parte fuori dal liquido e della parte immersa. La prima è semplicemente l'energia potenziale gravitazionale. Scegliendo $z = 0$ in corrispondenza della superficie del liquido, questa vale

$$\int_{V_{\text{out}}} \rho_0 g z \, dV$$

Per la seconda facciamo il seguente ragionamento: una piccola sferetta a una profondità z ($z < 0$) risente di una forza

$$(\rho - \rho_0)g \, dV = \rho_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) g \, dV = m \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) g$$

⁹Ce ne potrebbero essere altre per cui l'energia potenziale del corpo è un minimo locale.

questo equivale a dire che nel liquido la gravità efficace per la sferetta è $g_{\text{eff}} = (1 - \frac{\rho}{\rho_0})g$. La sua l'energia potenziale è

$$u = -m\left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right)gz$$

e quindi il contributo della parte immersa del corpo

$$- \int_{V_{\text{in}}} (\rho - \rho_0)gz \, dV$$

l'energia potenziale da minimizzare è la somma:

$$U = \int_{V_{\text{out}}} \rho_0 gz \, dV - \int_{V_{\text{in}}} (\rho - \rho_0)gz \, dV$$

il secondo integrale dà contributo positivo essendo $z < 0$ per la parte immersa.

Se supponiamo di conoscere la posizione verticale del centro di massa della parte immersa e di quella fuori dal liquido che indichiamo rispettivamente con z_{in} e z_{out} , possiamo andare ancora avanti. Infatti

$$U = \rho_0 g V_{\text{out}} z_{\text{out}} - (\rho - \rho_0) z_{\text{in}} V_{\text{in}}$$

ma $V_{\text{in}} = \rho_0/\rho V$ e $V_{\text{out}} = (1 - \rho_0/\rho)V$. Sostituendo

$$U = \rho_0 g V \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) (z_{\text{out}} - z_{\text{in}}) = Mg \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) (z_{\text{out}} - z_{\text{in}})$$

$z_{\text{out}} - z_{\text{in}}$ rappresenta la distanza verticale tra i due centri di massa ($z_{\text{in}} < 0$); la posizione in cui questa distanza è minima è una posizione di equilibrio stabile. Qualitativamente questa posizione è quella per cui il corpo riesce a disporre la maggior parte del suo volume nei pressi di $z \approx 0$.

Per questa posizione la condizione di equilibrio richiede che il baricentro della parte immersa e il centro di massa siano sulla stessa verticale, altrimenti il momento torcente sul corpo sarebbe non nullo. Per un corpo uniforme questo significa che il centro di massa della parte emersa ed immersa si trovano sulla stessa verticale.

Pensiamo a un corpo che galleggia non simmetrico per ribaltamento, come ad esempio un tetraedro regolare; se ρ_0 è di poco inferiore a ρ , possiamo immaginare che la posizione in cui galleggia è quella per cui è quasi completamente immerso con la base poco sopra la superficie e parallela ad essa.

Se ora alziamo la densità del liquido al valore tale che il volume immerso sia esattamente il complementare del precedente, cioè $V'_{\text{in}} = V - V_{\text{in}}$, la nuova posizione di equilibrio stabile è esattamente quella di prima ma ribaltata rispetto al piano $z = 0$. Per il valore speciale $\rho = 2\rho_0$, cioè quando $V_{\text{in}} = V_{\text{out}}$, la posizione di galleggiamento ribaltata è ancora d'equilibrio stabile.

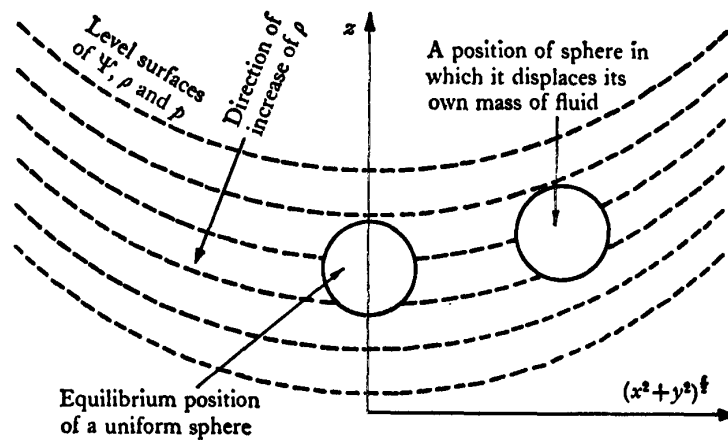


Figura 6: sferetta dell'esempio 1.9

Esempio 1.9. Tornando all'esempio del cilindro rotante, cosa succede se introduco una piccola sferetta galleggiante di densità uniforme, ossia dove si va a posizionare? Se la sferetta galleggiante è non uniforme può cambiare la risposta?

Soluzione 1.9. Se mettiamo una sferetta galleggiante di densità uniforme nel contenitore, questa si posiziona in modo tale da annullare sia la componente verticale che quella radiale della forza agente su di essa. Per annullare la forza lungo z si immerge spostando una quantità di acqua corrispondente alla propria massa. A questo punto deve annullare la forza radiale, ma questo può farlo solo sull'asse di rotazione, infatti al di fuori la forza centrifuga sul fluido spostato è sempre maggiore di quella che agisce sulla sferetta, dato che il fluido ha la stessa massa e si trova mediamente più lontano dall'asse di rotazione a causa dell'inclinazione della superficie. Quindi una sfera di densità uniforme cade nel minimo del paraboloide.

Se invece la sfera è più densa da una parte e meno dall'altra, è possibile che la forza centrifuga agente su di essa sia maggiore di quella agente sul volume di fluido spostato. In tal caso la sfera si muoverà verso l'alto, fino a quando non sbatte contro la parete del contenitore (Figura 6).

Per concludere questa sezione notiamo che se un fluido ideale in ogni punto ha velocità nulla in una direzione (o costante muovendosi in quella direzione), l'equazione del moto (proiettata lungo tale direzione) è la stessa che si avrebbe nel caso idrostatico. Detta in altri termini: accelerazione nulla implica forza nulla.

Quindi ad esempio nel caso del cilindro rotante, se ci mettiamo nel sistema del laboratorio in cui il liquido ruota, possiamo comunque applicare Stevino

(infatti $v_z = 0$) e trovare la pressione in ogni punto del liquido:

$$P(z, r) = P_{\text{atm}} + \rho g \left(z_{\text{min}} + \frac{\Omega^2 r^2}{2g} - z \right)$$

In questo caso, la cosa era evidente anche mettendosi nel sistema rotante.

Un altro esempio è quando la velocità è della forma $\vec{v} = v(x, y)\hat{z}$ (che come vedremo è il caso di un flusso laminare) dove si hanno le equazioni del caso idrostatico sia lungo x che y .

1.5 Equazione di Bernoulli

In questo paragrafo ricaviamo l'equazione di Bernoulli lungo la linea di flusso a partire dalla (2).

Le ipotesi sotto cui lo ricaviamo sono:

- fluido ideale e densità costante
- flusso *stazionario*, cioè $\vec{v}(x, y, z)$ è indipendente dal tempo, questo implica ad esempio che se cambiamo sistema e ne scegliamo uno inerziale rispetto al primo, Bernoulli non vale più.

La seconda ipotesi ci dice che il termine $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ è nullo; quello che facciamo ora è moltiplicare entrambi i membri della (2) per $\vec{v}$

$$\vec{v} \cdot \left(\sum_i v_i \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} \right) = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \hat{x}_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} \hat{x}_i \right) \cdot \vec{v}$$

che diventa, ricordando che la densità è costante:

$$\begin{aligned} \sum_i v_i \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} &= \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\phi - \frac{P}{\rho} \right) \\ \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v^2}{2} \right) &= \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\phi - \frac{P}{\rho} \right) \end{aligned}$$

portando infine tutto a sinistra e moltiplicando per ρ si ottiene

$$\sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \phi + P \right) = 0$$

ma questa, in base a quanto detto nella sezione 1.1, rappresenta la derivata della grandezza $B = \rho v^2/2 + \rho \phi + P$ lungo la linea di flusso, che essendo nulla ci dice che B è costante. Questo non implica in alcun modo che il valore di

B sia costante in tutto il fluido. Si pensi all'ultimo esempio di prima, cioè un flusso con una velocità della forma $\vec{v} = v(x, y)\hat{z}$, se il potenziale ϕ nullo, B deve variare spostandosi lateralmente perchè la pressione è costante nel piano xy mentre la velocità no.

Notiamo inoltre che Bernoulli non è solo una conservazione dell'energia (cinetica + potenziale) per il singolo elemento fluido, cioè si riduce a questo nel caso di P costante (come nell'esempio 1.1 del rubinetto), esso infatti tiene conto anche del lavoro svolto sull'elemento da eventuali differenze di pressione.

Esempio 1.10. Torniamo all'esempio del cilindro rotante con liquido all'interno, vogliamo ottenere la forma della superficie utilizzando Bernoulli.

- Si supponga ingenuamente che nello stato stazionario B sia costante in tutto il fluido, con questa informazione si trovi come dovrebbe essere la superficie del fluido. Il risultato è realistico?
- C'è un sistema di riferimento in cui si può dire che B è costante in tutto il fluido? In tal caso applicare Bernoulli e verificare che il risultato coincide con quanto precedentemente trovato.

Soluzione 1.10. Partendo da Bernoulli si ricava la superficie del liquido su cui $P = P_{\text{atm}}$:

$$z = \frac{B - P_{\text{atm}}}{\rho g} - \frac{v^2}{2g}$$

nel nostro caso $v = \Omega r$ e quindi

$$z = \text{const.} - \frac{\Omega^2}{2g} r^2$$

ma questa rappresenta una parabola con la concavità sbagliata che non può essere evidentemente la soluzione corretta.

Nel sistema rotante il fluido è fermo, ed essendo fermo la linea di flusso lungo cui applico Bernoulli può essere scelta a piacere.¹⁰ Di conseguenza B deve avere lo stesso valore ovunque.

Nel sistema rotante il potenziale diventa la somma di quello gravitazionale più quello centrifugo

$$\phi_{\text{rot}} = gz - \frac{1}{2}\Omega^2 r^2$$

¹⁰Per dimostrare Bernoulli abbiamo moltiplicato entrambi i lati per $\vec{v}$ ma nel nostro caso $\vec{v} = 0$; per aggiustare il ragionamento basta moltiplicare invece che per $\vec{v}$ per $d\vec{l}$ che rappresenta uno spostamento infinitesimo lungo la linea di flusso, si provi a farlo come esercizio.

Applicando a questo punto Bernoulli si ricava:

$$z = \frac{B - P_{\text{atm}}}{\rho g} + \frac{\Omega^2 r^2}{2g}$$

Che ha la concavità giusta.

1.6 Analogia con l'Elettrostatica

L'incomprimibilità ¹¹ di un flusso pone dei vincoli sulla forma che deve avere $\vec{v}(x, y, z, t)$. Per fare un esempio $\vec{v}(\vec{r}, t) = -v\hat{r}$ non rappresenta un flusso incomprimibile perchè in questo caso la massa di fluido, col passare del tempo, si concentra nell'origine e la densità aumenta.

Restringiamo la nostra discussione al caso di un flusso incomprimibile con densità costante. La condizione che deve essere rispettata in assenza di sorgenti, è che preso un qualsiasi volume dello *spazio* il flusso di materia attraverso questo volume sia nullo. Detta S la sua superficie, deve allora valere:

$$\int_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \implies \quad \rho \int_S \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \implies \quad \int_S \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0$$

se ora mandiamo $\vec{v}$ nel campo elettrico $\vec{E}$, la condizione

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

è equivalente a richiedere che in tale volume non ci siano cariche.

Quindi preso un problema di elettrostatica con N cariche puntiformi nello spazio, questo si trasforma mandando $\vec{E} \rightarrow \vec{v}$ in un flusso incomprimibile con densità costante in tutto lo spazio, inoltre le cariche positive diventano sorgenti di materia mentre quelle negative pozzi.

Esempio 1.11. Si vuole trovare il flusso di un fluido incomprimibile che all'infinito ha velocità $\vec{u}$, sapendo che nell'origine si trova un ostacolo a forma di sfera con raggio R .

Per questo scopo partiamo dal seguente problema in elettrostatica: si ha un dipolo $\vec{p}$ nell'origine immerso in un campo esterno $\vec{E}_{\text{ext}} = E_0 \hat{x}$.

¹¹Un flusso è incomprimibile se la densità del *singolo* elemento fluido è costante durante il suo moto, questo non implica che la densità rimanga costante in un punto fissato dello spazio. Se però all'istante iniziale la densità è uguale in tutto il liquido, lo sarà anche negli istanti successivi.

- Ricordando che il campo elettrico di un dipolo è:

$$\vec{E}_p(\vec{r}) = \frac{3\hat{r}(\vec{p} \cdot \hat{r}) - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

si mostri che per una certa orientazione di $\vec{p}$ esiste una sfera di raggio a non intersecata dalle linee di forza del campo elettrico

- Si usi il fatto precedente per trovare una soluzione stazionaria per il fluido
- Calcolare la pressione del fluido sulla superficie della sfera a meno di una costante. Quali sono la direzione e il valore della forza esercitata dal fluido su di essa?

Soluzione 1.11. La condizione per cui le linee di forza del campo elettrico non intersecano la sfera è:

$$\begin{aligned} \vec{E}(a\hat{r}) \cdot \hat{r} &= 0 \\ \implies E_0\hat{r} \cdot \hat{x} + \frac{3(\vec{p} \cdot \hat{r}) - (\vec{p} \cdot \hat{r})}{4\pi\epsilon_0 a^3} &= 0 \\ \left(E_0\hat{x} + \frac{\vec{p}}{2\pi\epsilon_0 a^3}\right) \cdot \hat{r} &= 0 \end{aligned}$$

Visto che vale per ogni $\hat{r}$ il termine dentro la parentesi deve essere nullo, segue che $\vec{p} = -p\hat{x}$ e

$$a = \left(\frac{p}{2\pi\epsilon_0 E_0}\right)^{\frac{1}{3}}$$

La velocità del liquido deve rispettare la condizione di impenetrabilità dell'ostacolo $\vec{v}_\perp = 0$, visto che il campo elettrico trovato la rispetta proviamo a mandare $\vec{E}$ in $\vec{v}$. Innanzitutto riscrivo $\vec{E}$ in termini di $(E_0, a, \vec{r})$:

$$\vec{E} = E_0\left(\hat{x} - \frac{a^3}{2} \frac{3\hat{r}(\hat{x} \cdot \hat{r}) - \hat{x}}{r^3}\right)$$

ora facciamo la sostituzione $\vec{E} = k\vec{v}$ e $E_0 = ku$, si ottiene

$$\vec{v} = u\left(\hat{x} - \frac{a^3}{2} \frac{3\hat{r}(\hat{x} \cdot \hat{r}) - \hat{x}}{r^3}\right)$$

detto θ l'angolo tra la direzione $\hat{x}$ e il vettore $\vec{r}$, si può riscrivere come

$$\vec{v} = u \left(\hat{x} - \frac{a^3}{2} \frac{3 \cos \theta \hat{r} - \hat{x}}{r^3} \right)$$

Si veda la figura 7 per un grafico della soluzione Osservazione: Notare che la condizione di impenetrabilità su $\vec{v}$ per il generico ostacolo implica

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = k \int \vec{v} \cdot d\vec{A} = k \int \vec{v}_\perp \cdot d\vec{A} = 0$$

Ossia che l'analogo problema elettrostatico va cercato imponendo che la carica dentro l'ostacolo sia nulla, come effettivamente succede nel nostro caso.

Possiamo usare Bernoulli, per simmetria B è lo stesso sulle linee di flusso in contatto con la sfera.

$$P = B - \rho \frac{v^2}{2}$$

essendo

$$\vec{v}(a\hat{r}) = \frac{3}{2}(\hat{x} - \cos \theta \hat{r})$$

si ha

$$P = B - \frac{9}{8} \rho u^2 (1 - \cos^2 \theta)$$

Il massimo della pressione si ha nei punti in cui il fluido è fermo, dove $\vec{u}$ interseca la sfera.

La forza $\vec{F}$ cercata è nulla, essendo $P(\theta) = P(-\theta)$. Questo fatto va sicuramente contro l'esperienza comune ed è noto come paradosso di d'Alembert, è dovuto al fatto di considerare il fluido non viscoso.

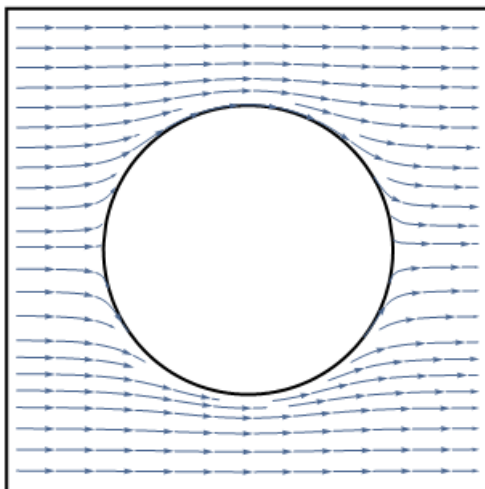


Figura 7: sezione delle linee di flusso dell'esempio 1.11

1.7 Cenni al caso viscoso

In fluidodinamica si parla di flusso laminare quando il moto del fluido avviene con scorrimento di strati infinitesimi gli uni sugli altri senza mescolamento laterale al livello degli elementi fluidi (Figura 8).

Questa è la situazione che andiamo a trattare nel caso viscoso. In particolare nel nostro problema avremo un flusso $\vec{v} = v_z(x, y, t)\hat{z}$ che data la forma è incomprimibile e con $\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$. Questo implica che

$$\sum_i v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

se guardiamo la componente z dell'equazione (2) abbiamo per questa classe di problemi:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{f_{\text{visc}}}{\rho dV}$$

vogliamo ora valutare f_{visc} per un piccolo volumetto dV *circondato* da liquido, che sarebbe la forza di attrito derivante dalla viscosità del liquido. Per farlo consideriamo il solito cubetto di lato dl con spigoli paralleli agli assi cartesiani e assumiamo che la forza sia proporzionale a quanto varia la velocità per unità di lunghezza (quindi alla derivata della velocità nella direzione perpendicolare

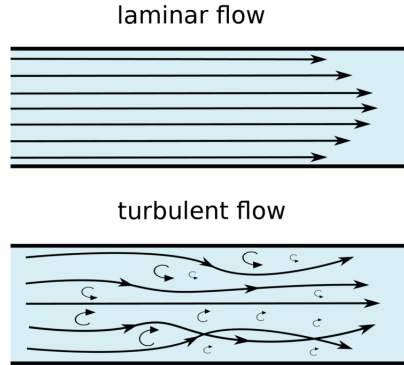


Figura 8: si vede qui, qualitativamente, la differenza tra flusso laminare e quello turbolento.

alla superficie)¹² e all'area della superficie di contatto¹³. Per le due facce perpendicolari all'asse x

$$f_{\text{visc},x} = \mu(dl)^2 \left[\frac{\partial v(x+dl)}{\partial x} - \frac{\partial v(x)}{\partial x} \right] = \mu(dl)^3 \frac{\frac{\partial v(x+dl)}{\partial x} - \frac{\partial v(x)}{\partial x}}{dl} = \mu dV \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

dove μ è la costante di proporzionalità (viscosità); analogamente $f_{\text{visc},y} = \mu dV \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ e l'equazione diventa

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (5)$$

con $\nu = \mu/\rho$ (viscosità cinematica).

Nel caso il flusso sia stazionario l'accelerazione del fluido è nulla in ogni punto e l'equazione si riduce a

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (6)$$

¹²Si può immaginare così a livello microscopico: due strati adiacenti si scambiano un certo numero di particelle (per unità di tempo e area), in particolare se questi hanno velocità diverse lo strato più lento acquista particelle più veloci e quindi accelera e lo strato più veloce acquista particelle più lente, di conseguenza rallenta. Si intuisce con questo semplice modellino perchè la forza di attrito sia proporzionale alla derivata della velocità.

¹³Notare la differenza con la forza di attrito per un blocco su un tavolo, l'area di contatto in questo caso non è rilevante.

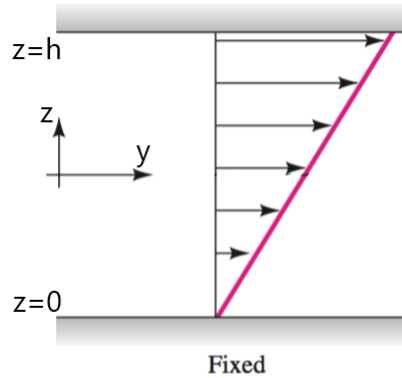


Figura 9: fluido che scorre tra due piani paralleli, di cui uno in movimento.

Con questa si sta dicendo che le forze dovute a pressione, gravità etc. devono controbilanciare le forze di attrito viscoso se si vuole che il flusso resti immutato nel tempo.

Infine dato che la forza dovuta alla viscosità è parallela alla velocità che è lungo z le componenti x e y dell'equazione (2), come anticipato, sono le stesse del caso idrostatico:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

In presenza di un ostacolo nel caso viscoso, si impone che la velocità del fluido sia nulla sulla superficie se l'ostacolo è fermo o uguale a quella della superficie se è in movimento.

Esempio 1.12. Un fluido viscoso di densità costante ρ scorre tra due piani paralleli, rispettivamente $z = 0$ e $z = h$. Il piano $z = 0$ è fermo mentre il secondo ha velocità $\vec{v} = v_y \hat{y}$ diversa da zero.

- Trascurando la gravità e assumendo che la pressione del fluido non vari lungo y , si trovi una soluzione stazionaria della forma $\vec{v} = v(z) \hat{y}$.
- Se la viscosità del liquido è μ , qual è invece la forza per unità di volume che agisce sul generico strato ad altezza $0 < z < h$? Qual è la forza per unità di area esercitata dai due piani sul liquido?

Soluzione 1.12. In questo caso è facile indovinare la soluzione, infatti sarà (Figura 9)

$$\vec{v} = \frac{z}{h} v_y \hat{y}$$

Vediamo di ottenerla anche a partire dalla (6) che applicata lungo y è

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

i primi tre termini sono nulli nel nostro problema, di conseguenza lo è anche l'ultimo:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \quad \implies \quad v = \alpha z + \beta$$

α e β li ricaviamo imponendo che la velocità per $z = 0$ e $z = h$ sia uguale a quella dei rispettivi piani. (l'equazione del moto lungo x e z ci dice solo che la pressione non varia muovendosi in queste direzioni).

Dato che ogni strato di fluido si muove a velocità costante, la forza complessiva agente su di esso è nulla: infatti uno strato ad altezza z viene trascinato con una certa forza in avanti dallo strato soprastante (che si muove più velocemente) e tirato indietro con una forza uguale e opposta dallo strato sottostante (che si muove più lentamente). Nel caso dello strato $z = 0$ è il piano a controbilanciare la forza esercitata dallo strato soprastante. Lo strato soprastante esercita una forza per unità di area

$$\frac{\vec{F}}{A} = \mu \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\mu}{h} \hat{y}$$

quindi il piano esercita sul liquido la forza opposta

$$\frac{\vec{F}}{A} = -\frac{\mu}{h} \hat{y}$$

Per il piano $z = h$ la forza è la stessa ma cambiata di segno, che segue dal fatto che la forza esterna totale applicata al liquido è nulla.

Esempio 1.13. Un fluido viscoso scorre su un piano inclinato di un angolo θ sotto l'effetto della gravità (Figura 10). Si trovi la soluzione laminare stazionaria, supponendo che l'altezza del fluido sopra il piano sia h .

Soluzione 1.13. Orientando l'asse y nella direzione perpendicolare al piano e l'asse x lungo il piano cerchiamo $\vec{v} = v(y)\hat{x}$. L'equazione del moto diventa lungo y :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g \cos \theta$$

che sarebbe la condizione idrostatica lungo questa direzione, mentre lungo x è

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + g \sin \theta$$

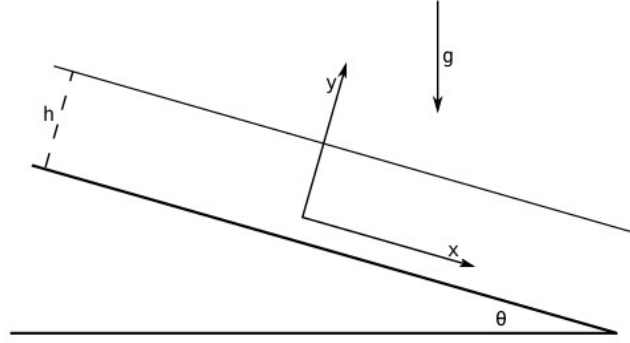


Figura 10: canale dell'esempio 1.13

Integrando la prima si ottiene:

$$P = -\rho g y \cos \theta + f(x)$$

Imponendo $P(y = h) = P_{\text{atm}}$ si ottiene

$$P = -\rho g (y - h) \cos \theta + P_{\text{atm}}$$

risulta allora $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ e la seconda equazione diventa

$$\nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -g \sin \theta$$

integrando

$$v(y) = -\frac{g \sin \theta}{2\nu} y^2 + \alpha y + \beta$$

la condizione $v(0) = 0$ si traduce in $\beta = 0$. Per determinare α serve una seconda condizione. Notiamo che la forza per unità di superficie esercitata sull'ultimo straterello di fluido compreso tra $h - dh$ e h è proporzionale a $\frac{\partial v}{\partial y}(h - dh)$ (e non alla derivata seconda) perchè non c'è nulla sopra a controbilanciare. Se per $dh \rightarrow 0$ fosse $\frac{\partial v}{\partial y}(h) \neq 0$ avremmo una forza finita su una massa nulla e di conseguenza accelerazione infinita. La condizione $\frac{\partial v}{\partial y}(h) = 0$ ci dà $\alpha = \frac{g \sin \theta}{\nu} h$ e quindi

$$v(y) = \frac{g \sin \theta}{\nu} (yh - y^2/2)$$

Per vedere un esempio numerico consideriamo il caso di un fiume con dislivello di 1 m per Km e altezza $h \sim 1$ m. Sapendo che per l'acqua $\nu \sim 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$ si ottiene che la velocità vicino alla superficie è $v \sim 10^3 \text{m/s}$ che è una stima palesemente irrealistica. Questo ci dice che in tale caso il regime laminare non è una approssimazione valida.

Vogliamo ora trovare la potenza dissipata dallo stesso cubetto di prima. questa è dovuta unicamente alla presenza di forze viscosse che sono quelle su cui ci concentriamo. Per farlo troviamo la potenza assorbita sulle quattro facce laterali; questa verrà in parte convertita in energia cinetica del cubetto e in parte dissipata. Va precisato che siamo interessati alla potenza dovuta alle forze viscosse visto che sono le uniche responsabili per la dissipazione di energia.

La potenza assorbita è la somma di $\vec{f} \cdot \vec{v}$ sulle quattro facce. Come prima è conveniente guardare il contributo di quelle opposte insieme, iniziamo da quelle perpendicolari all'asse x .

$$P_x = f(x + dl)v(x + dl) + f(x)v(x)$$

dove, per quanto già trovato

$$f(x + dl) = \mu(dl)^2 \frac{\partial}{\partial x} v(x + dl)$$

e

$$f(x) = -\mu(dl)^2 \frac{\partial}{\partial x} v(x)$$

Sostituendo si può riscrivere come

$$P_x = \mu dV \left[\frac{v(x + dl) \frac{\partial v(x + dl)}{\partial x} - v(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x}}{dl} \right]$$

Se aggiungo a questo punto il termine intermedio $v(x + dl) \frac{\partial}{\partial x} v(x)$ si ottiene

$$P_x = \mu dV \left[v(x + dl) \left(\frac{\frac{\partial v(x + dl)}{\partial x} - \frac{\partial v(x)}{\partial x}}{dl} \right) + \frac{\partial v(x)}{\partial x} \left(\frac{v(x + dl) - v(x)}{dl} \right) \right]$$

Nel limite di dl piccolo

$$P_x = \mu dV \left[v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]$$

P_y viene analogo.

Non ci rimane che sottrarre la potenza convertita in energia cinetica. Questa è

$$P_{\text{kin},x} = \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = v \frac{D(mv)}{Dt} = v f_{\text{visc},x} = \mu dV v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

segue che

$$P_{\text{diss},x} = \mu dV \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2$$

notare che è sempre positiva e nulla se $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ come è giusto che sia.

Se si vuole trovare la potenza totale dissipata in un volume V è sufficiente integrare la precedente espressione più il termine analogo in y

$$\int \mu \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dV$$

La potenza dissipata si traduce in un aumento della temperatura del fluido.

Esempio 1.14. Un piano infinito delimita un semispazio composto da fluido viscoso. Il piano è in moto secondo la legge $\vec{U} = U_0 \cos(\omega t)$. Cerchiamo soluzioni in regime laminare del tipo $v(y, t)\hat{x}$. Assumendo che la pressione non vari lungo y verificare che per opportuni A, k_1, k_2 una possibile soluzione è:

$$\vec{v}(y, t) = C e^{-k_1 y} \cos(k_2 y - \omega t) \hat{x}$$

si dia un'interpretazione.

In questo caso mostrare che la potenza media dissipata dal fluido è esattamente la potenza media fornita dal piano.

Soluzione 1.14. Se il piano coincide con xz e la velocità è della forma $\vec{v} = v(y)\hat{x}$ l'equazione da risolvere è:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

Se inseriamo la soluzione suggerita, semplificando il fattore C ottengo:

$$\omega e^{-k_1 y} \sin(k_2 y - \omega t) = \nu [(k_1^2 - k_2^2) e^{-k_1 y} \cos(k_2 y - \omega t) + 2k_1 k_2 e^{-k_1 y} \sin(k_2 y - \omega t)]$$

Per essere verificata ad ogni t è necessario che sia $k_1 = k_2 = k$ e

$$2\mu k^2 = \omega \implies k = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}$$

Infine la condizione a $z = 0$ impone

$$v(z = 0) = U_0 \cos(\omega t) \implies C = U_0$$

La forza che esercita una porzione del piano di area A sul fluido è l'opposto di quella che esercita il fluido su di essa

$$\vec{F} = -\mu A \frac{\partial v}{\partial y}(y = 0) \hat{x}$$

e la potenza fornita dal piano

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = -\mu A v \frac{\partial v}{\partial y}(y = 0)$$

la derivata della velocità vale

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -k U_0 e^{-ky} (\cos(k_2 y - \omega t) + \sin(k_2 y - \omega t))$$

quando facciamo la media temporale di P sopravvive solo il termine $\propto \cos^2(k_2 y - \omega t)$ (la media del termine misto è nulla) e visto che la sua media vale $1/2$ si ha

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \mu A k U_0^2$$

La potenza dissipata nella colonna di liquido sopra la nostra porzione di piano è

$$P_{diss} = \int_0^{+\infty} \mu A \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 dy$$

Come prima quando si guarda la potenza media dissipata nel tempo sopravvivono solo i termini $\propto \cos^2(k_2 y - \omega t)$ e $\propto \sin^2(k_2 y - \omega t)$. Quindi

$$\langle P_{diss} \rangle = \mu A k^2 U_0^2 \int_0^{+\infty} e^{-2ky} dy = \frac{1}{2} \mu A k U_0^2$$

2 Problemi

Problema 2.1. Una bolla d'aria viene immessa alla base di un cilindro chiuso (alto 10 metri) e pieno d'acqua. Al momento dell'immissione della bolla, la pressione sul fondo del cilindro è 1.1 atmosfere. La bolla inizia a salire finchè non raggiunge la sommità del cilindro. Quanto vale adesso la pressione sul fondo? Assumere che la pressione idrostatica di 10 metri di acqua sia esattamente 1 atmosfera.

Problema 2.2. Una piccola sfera di ferro di volume V affonda a velocità costante v in un recipiente chiuso completamente riempito di acqua. Qual'è la quantità di moto totale dell'acqua? Il contenitore si trova su un tavolo, durante la discesa della sferetta che forza esercita il tavolo su di esso?

Problema 2.3. Un carrello con dell'acqua all'interno si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato, con accelerazione $a\hat{x}$. Si trovi come si dispone l'acqua.

Problema 2.4. Si consideri il problema di galleggiamento di una nave in un bacino di carenaggio, semplificato nei seguenti termini: la vasca sia un parallelepipedo retto di larghezza a e lunghezza b e la nave sia un prisma retto della stessa lunghezza con base triangolare equilatera di lato $\frac{a}{2}$ e densità uniforme ρ di poco inferiore a quella dell'acqua. Si supponga inoltre che la faccia superiore del prisma sia orizzontale quando esso galleggia (in realtà tramite l'esempio 1.8 potete mostrare che questa è la configurazione stabile). Si calcoli il minimo volume di acqua (densità dell'acqua δ) che bisogna versare nella vasca per far galleggiare la nave.

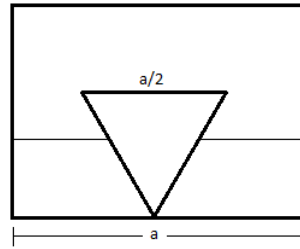


Figura 11: bacino di carenaggio.

Problema 2.5. Determinare che forma deve avere un recipiente a simmetria cilindrica in modo che in esso il livello dell'acqua si abbassi a velocità costante se sul fondo viene praticato un foro di dimensioni molto piccole.

Problema 2.6. Un secchio cilindrico di raggio R e altezza h è riempito di un liquido di densità ρ . Sia h_0 l'altezza del fluido nel secchio. Il secchio viene messo in rotazione attorno al suo asse a velocità costante ω e, dopo un breve periodo di transizione, raggiunge lo stato stazionario. Trovare h_M e h_m , rispettivamente altezza massima e minima della superficie del fluido rispetto alla base del cilindro. Determinare la pressione $p(l)$ sulla superficie del secchio cilindrico ad altezza l dalla sua base. Determinare poi la pressione $p_0(l)$ nei punti dell'asse di rotazione tali che $l < h_m$ e mostrare che il rapporto

$$\frac{p(l) - p_0(l)}{h_M - h_m}$$

è indipendente da ω , R , h_m e l .

Problema 2.7. Una palla di massa M e raggio R viene lanciata con una velocità $\vec{v}$ parallela al terreno e una velocità angolare $\vec{\omega}$ perpendicolare ad esso. Essa percorre una distanza L in aria (densità ρ). Stimare (grossolanamente) la deviazione orizzontale Δx della palla, trascurando gli effetti della gravità e assumendo $\Delta x \ll L$.

Problema 2.8. Un tubo verticale di diametro D (con l'estremità superiore aperta) viene riempito di acqua fino ad un'altezza h . L'estremità inferiore, di diametro d è chiusa da un tappo.

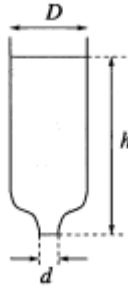


Figura 12: svuotamento di un tubo.

Idealmente, quando il tappo viene rimosso, l'acqua inizia a fuoriuscire con velocità $v = \sqrt{2gh}$. Ma in realtà ci vuole un tempo τ affinché venga raggiunta questa velocità. Stimare l'ordine di grandezza di τ . Trovare poi l'accelerazione dello strato d'acqua più basso nel momento in cui viene rimosso il tappo.

Problema 2.9. Sul fondo di un contenitore pieno d'acqua c'è un foro circolare di raggio r sigillato da una sfera di massa m e raggio $R > r$. L'altezza dell'acqua nel contenitore viene ridotta lentamente fino a quando la sfera si stacca dal fondo. Trovare il valore dell'altezza h_0 per cui ciò succede.

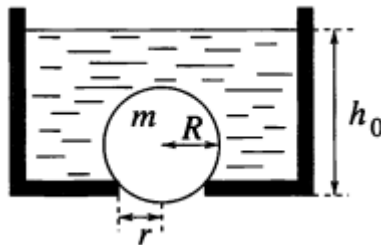


Figura 13: sollevamento di una sfera.

Problema 2.10. Si consideri un fluido (con coefficiente di viscosità μ) che scorre in un tubo cilindrico di lunghezza L e raggio R . Sia $\hat{z}$ la direzione dell'asse del tubo. Assumendo che la differenza di pressione tra le due estremità sia Δp , si trovi una soluzione in regime laminare lungo la direzione radiale, ossia del tipo $\vec{v} = v(r)\hat{z}$. Successivamente trovare la portata del fluido nel tubo (legge di *Poiseuille*). Si trascuri la gravità.

Problema 2.11. Un fluido viscoso (μ) di densità costante ρ scorre tra due piani paralleli, rispettivamente $z = 0$ e $z = h$. Entrambi i piani sono fermi. Trascurando la gravità e sapendo che c'è una variazione di pressione per unità di lunghezza costante spostandosi lungo y , si trovi una soluzione stazionaria della forma $\vec{v} = v(z)\hat{y}$. Trovare la portata per unità di area e confrontarla con la legge di *Poiseuille*.

Problema 2.12. Un palloncino si trova dentro un camion che a un certo punto accelera in avanti, il palloncino cosa fa nel sistema del camion?

Problema 2.13. Consideriamo la seguente pompa d'acqua: un tubo verticale di sezione S e lunghezza H collega una riserva (aperta) d'acqua ad un serbatoio cilindrico di raggio R e altezza trascurabile. Sulla superficie laterale del contenitore ci sono dei fori identici, la cui area totale è A .

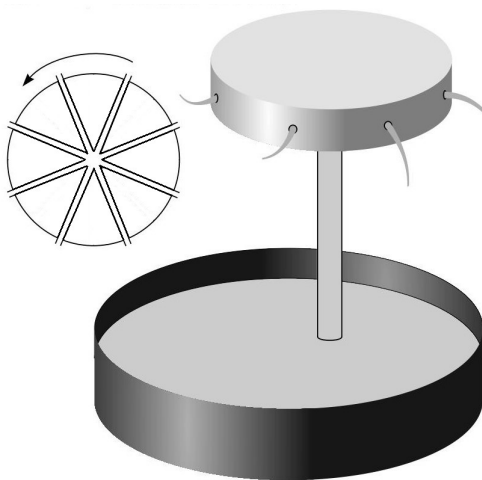


Figura 14: pompa d'acqua.

Un motore elettrico mantiene il serbatoio in rotazione attorno al suo asse, alla velocità angolare ω . Dentro il serbatoio ci sono dei sottili tubcini che collegano il centro con i fori alle estremità. Sia ρ la densità dell'acqua, P_0 la pressione atmosferica e P_s la pressione di vapore saturo. Si supponga che tubo e serbatoio siano sempre pieni d'acqua.

- Calcolare la pressione P_2 al bordo del cilindro se tutti i fori sono tappati.
- I fori vengono aperti: trovare la velocità di fuoriuscita dell'acqua dai fori rispetto a terra.
- Se il serbatoio ruota troppo velocemente, si verifica un fenomeno chiamato “cavitazione”: l'acqua inizia ad evaporare in alcune parti della pompa, perchè in esse la pressione è più bassa di P_s . Trovare il valore massimo di ω per cui non si ha cavitazione.
- Se la potenza della pompa è P , qual è la sua massima portata teorica? (volume di acqua pompata per unità di tempo)

Problema 2.14. Si consideri un barattolo (cilindrico) di alluminio (aperto superiormente) con all'interno una quantità d'acqua tale che questo galleggi (in acqua) con l'asse di simmetria verticale in equilibrio stabile.

Si toglie gradualmente acqua dal barattolo fino a quando si raggiunge la condizione per cui il sistema assume un equilibrio che si può giudicare “indifferente”: il barattolo può stare in equilibrio sia con l'asse verticale, sia con l'asse obliquo con un'inclinazione qualsiasi.

- Quando si verifica questa situazione di equilibrio indifferente?
- Come si spiega il fatto che proprio con questa quantità d'acqua il barattolo è in equilibrio, sia con l'asse verticale che inclinato?

trascurare lo spessore della parete e del fondo del barattolo rispetto alle altre dimensioni.

Problema 2.15. Prima di provare a fare questo problema si guardi l'esempio 1.11 e il problema 2.2.

Presa una sferetta di volume V che si muove con velocità $\vec{u}$ in un liquido fermo (all'infinito) di densità costante ρ , si può mostrare sfruttando l'Esempio 1.11 che l'energia cinetica totale del liquido è $K = \frac{1}{4}\rho u^2$. Si consideri la stessa sferetta che attaccata a una molla di costante elastica k compie oscillazioni al centro di un contenitore cubico contenente fluido ideale di densità ρ . Si trovi il periodo di oscillazione assumendo che il lato del contenitore sia molto grande rispetto al raggio della sfera e sia quindi possibile applicare la formula data sopra per l'energia cinetica del liquido.

Notando infine che tramite il Problema 2.2, conosciamo esattamente la quantità di moto del fluido, dire perchè è sbagliato scrivere che la forza agente sulla sferetta è:

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{molla}} - \frac{d\vec{P}_{\text{liq}}}{dt}$$

La densità della sferetta vale ρ_s ; si trascuri la gravità e la perturbazione al moto del fluido dovuta alla presenza della molla.

3 Soluzioni

Soluzione 3.1. Durante il processo di risalita della bolla, l'acqua può essere trattato come un fluido incompressibile e il suo volume rimane con buona approssimazione costante: una grande variazione della pressione comporta una variazione quasi nulla del volume. Di conseguenza anche il volume della bolla resta costante (anche la temperatura continua a essere la stessa dell'acqua) di conseguenza la pressione della bolla rimane uguale e cioè 1.1 atmosfere. Una volta arrivata alla sommità del cilindro, l'acqua in quel punto sarà alla pressione di 1.1 atmosfere e, conseguentemente, la pressione alla base sarà 2.1 atmosfere.

Grandi cambiamenti di pressione dovuti a piccole modifiche del sistema non devono sorprendere più di tanto, si pensi al classico esempio della botte di Pascal. Inoltre si provi a pensare a un'analogo meccanico in cui la bolla diventa una molla e la massa d'acqua diventa un'altra molla con sopra un blocco di massa M , il tutto contenuto all'interno di una scatola di una certa altezza, cosa succede se si scambia la loro posizione verticale? si può immaginare di misurare la pressione inserendo una mollettina di prova nel punto desiderato e vedere con quale forza viene compressa. (l'incompressibilità dell'acqua si può vedere come una molla molto rigida cioè con k grande)

Soluzione 3.2. Durante il moto della palla, cambia la distribuzione di massa del sistema acqua+sferetta. Al tempo t il centro di massa del sistema si è spostato della distanza

$$s = vt \frac{\rho_s V - \rho_a V}{M}$$

dove M è la massa totale del sistema, V il volume della sferetta e ρ_s e ρ_a sono rispettivamente le densità della sferetta e dell'acqua. Ciò deriva da questo semplice ragionamento: se la sferetta si è spostata della quantità vt , possiamo pensare che una sferetta di acqua delle stesse dimensioni abbia preso il posto che essa precedentemente occupava. Quindi la quantità di moto totale del sistema vale

$$p_{\text{tot}} = \frac{Ms}{t} = v\rho_s V - v\rho_a V$$

dove il primo termine a destra rappresenta la quantità di moto della sfera di ferro e, conseguentemente, il secondo è la quantità di moto dell'acqua. Il segno meno è coerente col fatto che l'acqua tendenzialmente si muove verso l'alto.

Il centro di massa del recipiente scende a velocità costante, questo implica che la forza totale agente su di esso è nulla; di conseguenza la forza che il tavolo esercita sul contenitore è uguale ma opposta alla forza peso.

Soluzione 3.3. In questo caso si ha mettendosi nel sistema accelerato

$$\phi = \frac{v^2}{2} + gz + ax$$

ma, all'equilibrio, la velocità è nulla in tutti i punti del fluido. Allora le superfici equipotenziali (isobare) obbediscono all'equazione

$$z(x) = -\frac{a}{g}x$$

che rappresenta un piano, inclinato rispetto alla base del carrello.

Soluzione 3.4. La condizione di gallaggiamento è che la forza di Archimede sia appena maggiore della forza peso agente sulla nave. Supponiamo che in un certo momento l'altezza dell'acqua nella vasca sia h e che la nave tocchi il fondo. Il volume di acqua spostato è

$$V(h) = \frac{h^2 b}{\sqrt{3}}$$

La spinta di archimede uguaglia la forza peso quando

$$\delta g V(h) = M_{nave} g$$

da cui possiamo ricavare il valore di h per cui la nave si stacca dal fondo

$$h_m = \frac{a}{4} \sqrt{\frac{3\rho}{\delta}}$$

Allora il volume di acqua necessario sarà

$$V_A = abh_m - V(h) = \sqrt{\frac{3\rho}{\delta}} \left(\frac{a^2 b}{4} \right) \left(1 - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\rho}{\delta}} \right)$$

Soluzione 3.5. Sia A la superficie del foro. Per recipienti a simmetria cilindrica, la superficie del liquido ha area $S = \pi r^2(h)$ dove r è il raggio del cerchio alla quota h . Per la conservazione della portata:

$$S \left| \frac{dh}{dt} \right| = Av$$

dove v è la velocità di fuoriuscita dell'acqua dal foro, che per Bernoulli vale $v = \sqrt{2gh}$. Noi vogliamo che l'acqua si abbassi ad un rate costante, quindi prendiamo $\frac{dh}{dt} = c$. Sostituendo si ottiene

$$c\pi r^2 = A\sqrt{2gh} \longrightarrow h(r) = kr^4$$

con k una costante. Questa curva è il frutto della rotazione di una quartica canonica (tipo $y = x^4$) attorno al suo asse.

Soluzione 3.6. Bisogna fare attenzione a due casi particolari che si verificano quando ω è abbastanza grande: il minimo del paraboloide corrispondente alla superficie di separazione si trova sotto il secchiello (in questo caso non c'è liquido al centro) per il dato volume il paraboloide corrispondente, ai bordi supera h (in tal caso fuoriesce una certa quantità di liquido). Vi lasciamo discutere questi casi e trattiamo unicamente quello "senza problemi"; nella lezione abbiamo visto che in questo caso la superficie del liquido in rotazione è un paraboloide di equazione

$$h(r) = h(0) + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

di conseguenza

$$h_M = h_m + \frac{\omega^2 R^2}{2g}$$

dove $h(0) = h_m$. Per trovare i valori è sufficiente uguagliare i volumi prima e dopo. Quello che si ottiene è

$$h_M = h_0 + \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

$$h_m = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

Passiamo adesso a valutare la pressione: i paraboloidi interni al fluido, di distanza costante nella direzione verticale rispetto alla base del secchio, sono isobari. Poiché la pressione sulla superficie del fluido è p_a , segue che la pressione nel paraboloide distante d dalla superficie è $p_a + d\rho g$, quindi

$$p(l) = p_a + (h_M - l)\rho g = p_a + \left(h_0 + \frac{\omega^2 R^2}{4g} - l\right)\rho g$$

Mentre per quanto riguarda la pressione nei punti dell'asse di rotazione si ha

$$p_0(l) = p_a + (h_m - l)\rho g = p_a + \left(h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g} - l\right)\rho g$$

Segue che

$$\frac{p(l) - p_0(l)}{h_M - h_m} = \rho g$$

(questo risultato finale è una conseguenza diretta di stevino nella direzione verticale)

Soluzione 3.7. Possiamo ricavare la dipendenza della forza dalle grandezze in gioco tramite l'analisi dimensionale. Le grandezze che influiscono sono la velocità di volo v , la velocità angolare ω , la sezione della palla $S = \pi R^2$ e la densità dell'aria ρ . Facendo ciò si ricava

$$F \propto \pi \rho \omega v R^3 = \rho \omega R v S$$

In realtà l'analisi dimensionale non dà una risposta univoca perchè con S e ω posso costruire dimensionalmente una velocità. Il ragionamento che si fa è il seguente: come scala la forza se raddoppio sia ω che v ? si può pensare questa nuova situazione come quella di partenza vista a velocità doppia¹⁴, in particolare il tempo che ci impiega a raggiungere lo stesso punto dimezza cioè $t_1 = t_0/2$, segue che la forza essendo proporzionale all'accelerazione che a sua volta è $\propto t^2$ quadruplica; se assumo infine che debba dipendere sia da ω che da v come è ragionevole aspettarsi (in effetti se una delle due è nulla ci si aspetta che la forza trasversale sia nulla) si ottiene il risultato di cui sopra. (il coefficiente di proporzionalità sarà generalmente dell'ordine dell'unità). Avendo una forza costante che agisce sulla sfera, ci aspettiamo un moto uniformemente accelerato, in prima approssimazione rettilineo ($\Delta x \ll L$):

$$\Delta x = \frac{F t^2}{2m}$$

Ma il tempo di volo è $t = \frac{L}{v}$, allora

$$\Delta x = \frac{\pi \rho \omega R^3 L^2}{m v}$$

dove l'uguaglianza va intesa come ordine di grandezza.

Soluzione 3.8. In un intervallo di tempo Δt il livello del liquido con accelerazione a diminuisce di $\Delta h = \frac{a}{2}(\Delta t)^2$, quindi dal contenitore fuoriesce la

massa $\Delta m = \frac{D^2 \pi}{4} \rho \Delta h$ e conseguentemente l'energia potenziale del sistema

diminuisce di $\Delta U = \Delta m g h = \frac{D^2 \pi}{4} \rho \Delta h g h$

D'altra parte, il liquido viene accelerato e raggiunge la velocità

$\Delta v = a \Delta t$, quindi l'energia cinetica della colonna di liquido aumenta di

$\Delta K = \frac{D^2 \pi}{2} h \rho (\Delta v)^2$ (quella dello straterello uscente è trascurabile anche se ha una velocità molto maggiore, perchè ha una massa infinitesima). Per la conservazione dell'energia si ha $\Delta U = \Delta K$, che restituisce $a = g$. Ciò

¹⁴questo ragionamento è vero entro certi limiti.

Ricordiamo che questo vale solo se la palla è totalmente sommersa dall'acqua. Se così non fosse, bisognerebbe sottrarre al volume appena calcolato il volume della calotta sferica superiore, che rimane fuori dall'acqua.

Soluzione 3.10. L'equazione del moto per i flussi laminari viscosi ci dice innanzitutto che la pressione è costante sulla sezione del tubo (e quindi ha senso parlare di differenza di pressione tra le estremità). Vorremmo poi applicarla lungo z per trovare $v(r)$, tuttavia prima andrebbe trasformata in coordinate cilindriche che sono le coordinate adatte al problema in questione. La trasformazione del termine viscoso non è banale, matematicamente bisognerebbe usare la chain rule. Noi preferiamo seguire un approccio più fisico che è quello di ricavare la forza viscosa a partire da zero. In pratica al posto di considerare un cubetto (come a lezione) lavoriamo con uno strato cilindrico di raggio r spessore dr e lunghezza L ; assumiamo sempre che la forza di attrito tra strati cilindrici adiacenti sia proporzionale alla superficie di contatto e alla variazione della velocità per unità di lunghezza. Allora questa forza vale

$$\vec{F}_v = \mu \left[2\pi L(r + dr) \frac{\partial v(r + dr)}{\partial r} - 2\pi Lr \frac{\partial v(r)}{\partial r} \right] \hat{z} = \mu(2\pi Lr dr) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \hat{z}$$

Nello stato stazionario si deve avere equilibrio tra le forze in gioco, cioè la forza di pressione deve bilanciare $\vec{F}_v$ (in pratica si costruisce l'equazione (6) per lo strato cilindrico). Se $p + \Delta p$ e p sono i valori della pressione rispettivamente all'estremità sinistra e destra del tubo come mostrato in Figura 15, la forza di pressione netta che agisce sullo strato cilindrico considerato è

$$\vec{F}_p = 2\pi r dr \Delta p \hat{z}$$

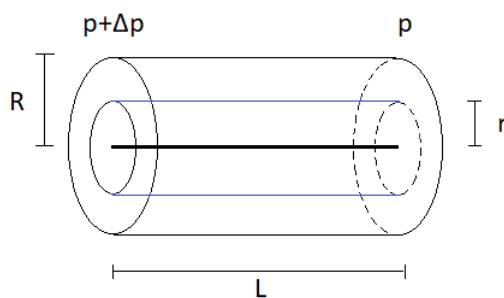


Figura 15

quindi deve essere

$$\vec{F}_v + \vec{F}_p = 0 \implies -\frac{r\Delta p}{\mu L} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right)$$

integrando una prima volta si ha

$$-\frac{r\Delta p}{2\mu L} + \frac{A}{r} = \frac{\partial v}{\partial r}$$

Se A fosse diverso da zero si otterrebbe una velocità infinita per $r = 0$. Per motivi fisici imponiamo allora $A = 0$. A questo punto integriamo una seconda volta:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{r\Delta p}{2\mu L} \implies v = -\frac{\Delta p}{4\mu L}(r^2 - k^2)$$

la costante k si trova ricordando che per $r = R$ la velocità è nulla.

$$\vec{v}(r) = \frac{\Delta p}{4\mu L}(R^2 - r^2)\hat{z}$$

La velocità è massima al centro del tubo e diminuisce quadraticamente avvicinandosi al bordo. Calcoliamo ora la portata

$$P = \int_0^R 2\pi r \rho v(r) dr = \frac{\pi}{8\mu} \frac{\rho \Delta p R^4}{L}$$

Soluzione 3.11. Usiamo l'equazione del moto per i fluidi viscosi in regime laminare. Grazie a questa abbiamo che la pressione non varia nelle direzioni x e z . Lungo y :

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

$$\text{se } \frac{\partial P}{\partial y} = k$$

$$\frac{k}{\mu} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \implies v = \frac{k}{2\mu} z^2 + \alpha z + \beta$$

α e β si trovano imponendo che la velocità sia nulla per $z = 0$ e $z = h$. Si ottiene

$$\beta = 0 \quad \text{e} \quad \alpha = -\frac{kh}{2\mu}$$

La velocità è una parabola con valore massimo al centro e che si annulla ai bordi.

Soluzione 3.12. Il palloncino è complessivamente meno denso dell'aria circostante. Di conseguenza, nel sistema del camion, la forza fittizia su di esso è minore che quella sul volume di fluido (aria) spostato; quindi viene spinto in avanti dalla pressione nella direzione in cui il camion accelera fino a che non incontra la parete. Il risultato è forse meno sorprendente se si ragiona in questi

termini: nel sistema accelerato è come se si avesse una gravità fittizia lungo x , in analogia al caso verticale in cui il palloncino essendo più leggero si sposta verso l'alto (nella direzione opposta a $\vec{g}$) qui si sposta nel verso opposto alla forza fittizia. Per lo stessa ragione, se il camion svoltasse a destra, nel sistema di riferimento del camion il palloncino si sposterebbe verso destra.

Soluzione 3.13. Anche se non esplicitamente detto nel problema si approssima il fluido a ideale. Punto 1: estremità immersa nella riserva del tubo verticale. Punto 2: un qualsiasi foro laterale del serbatoio cilindrico. Mettiamoci nel sistema di riferimento rotante e applichiamo l'equazione di Bernoulli tra i punti 1 e 2, entrambi fermi. In 1 la pressione è quella atmosferica e la velocità è nulla. In 2 la velocità è nulla e ci sono i potenziali gravitazionale e centrifugo. Segue che

$$P_2 = P_0 - \rho g H + \frac{1}{2} \rho \omega^2 R^2$$

Restando nel sistema di riferimento rotante, applichiamo nuovamente Bernoulli tra 1 e 2, l'acqua non è più ferma nel rotante ma possiamo comunque trascurare la forza di Coriolis perchè è perpendicolare alla velocità e quindi ai tubicini. Considerando che adesso $P_2 = P_0$ si trova che

$$v_{2,\text{rot}}^2 = \omega^2 R^2 - 2gH$$

Questa è la velocità nel sistema di riferimento rotante. Per tornare al sistema di riferimento fisso basta prendere la somma in quadratura di v_2 con la velocità periferica di rotazione, essendo perpendicolari. Segue che

$$v_2 = \sqrt{2(\omega^2 R^2 - gH)}$$

Per trovare il valore massimo della velocità angolare, bisogna individuare il punto della pompa in cui la pressione è minore ; è facile convincersi che il minimo si ha al centro del serbatoio cilindrico. Tuttavia bisogna prestare attenzione perchè in questo punto la pressione è discontinua, ossia il suo valore nei tubicini a $r \simeq 0$ è diverso dal valore assunto nel tubo verticale ad altezza $\simeq H$, infatti se S è diverso da A , nei due punti l'acqua ha velocità differenti e tramite Bernoulli ci si convince che la pressione deve essere diversa. In particolare nei tubicini a $r \simeq 0$ la pressione è:

$$p = P_0 - \rho g H - \frac{1}{2} \rho v_{2,\text{rot}}^2$$

e nel tubo verticale in prossimità di $z \simeq H$ la pressione vale:

$$p = P_0 - \rho g H - \frac{1}{2} v_{2,\text{rot}}^2 \frac{A^2}{S^2}$$

il valore più piccolo tra questi due dobbiamo imporlo $\geq P_s$ e in questo modo troviamo la velocità angolare massima.

La potenza deve uguagliare l'energia guadagnata dall'acqua per unità di tempo ossia:

$$\rho A v_{2,\text{rot}} \left(\frac{1}{2} v_2^2 + g H \right) = P$$

il volume di acqua prodotto per unità di tempo è $k = A v_{2,\text{rot}}$, riscrivendo in termini di k :

$$\rho k \left(\frac{k^2}{A^2} + g H \right) = P$$

il k che risolve corrisponde alla portata massima.

Soluzione 3.14. Questo problema corrisponde al punto 4 della prova sperimentale della gara nazionale (Senigallia 2016). Trovate la soluzione a questo link: <https://www.olifis.it/index.php/problemi-olifis/problemi-della-gara-nazionale/problemi-sperimentali>.

In ogni caso i punti chiave della soluzione da tenere bene a mente sono:

- Il liquido all'interno del barattolo è lo stesso che quello all'esterno; quindi tutti i ragionamenti si riducono al volumetto d'aria dentro il barattolo al di sotto del livello dell'acqua nel secchiello.
- Se il centro di massa del corpo immerso e il punto di applicazione della forza di Archimede (il baricentro della parte immersa come visto a lezione) coincidono, allora il momento torcente è nullo. Inoltre per il barattolo se coincidono quando questo è verticale continuano a coincidere anche quando esso è inclinato.

Soluzione 3.15. Mostriamo per prima cosa che effettivamente l'energia cinetica del liquido è $K = \frac{1}{4} \rho V u^2$ con V volume della sfera. Traslando la soluzione dell'esempio 1.11 nel sistema in cui la sfera si muove con velocità $\vec{v} = u \hat{x}$ e il suo centro coincide con l'origine nel dato istante si ha per la velocità del fluido:

$$\vec{v} = \frac{1}{2} u a^3 \frac{3 \hat{r} (\hat{x} \cdot \hat{r}) - \hat{x}}{r^3}$$

l'energia del volumetto infinitesimo dV di liquido sarà $dK = \frac{1}{2}\rho v^2 dV$, per trovare quella totale integro su tutto lo spazio occupato dal fluido.

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{\rho u^2 a^6}{8} \frac{3(\hat{x} \cdot \hat{r})^2 + 1}{r^6} = \frac{\rho u^2 a^6}{8} \frac{3 \cos^2 \theta + 1}{r^6}$$

in sferiche:

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

l'integrale da effettuare è:

$$K = \frac{\rho u^2 a^6}{8} \int_a^{+\infty} dr \frac{1}{r^4} \int_0^\pi d\theta (3 \cos^2 \theta + 1) \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

svolgendolo si ottiene il risultato di cui sopra.

Considerando il fluido come ideale, l'energia totale è costante:

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho V}{2} + M \right) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

dove M è la massa della sfera. Questo rappresenta un moto armonico con massa efficace $m = \rho V/2 + M$; di periodo $T = 2\pi \sqrt{m/k}$.

La quantità di moto del liquido cambia come conseguenza della forza che la sferetta esercita su di esso *ma anche come conseguenza della forza esercitata dalle pareti* (infatti la loro azione non è trascurabile anche se queste si trovano "molto lontano"). Risolvendolo invece, tramite discorsi energetici come abbiamo fatto sopra non serve tenere conto della presenza delle pareti, perchè queste essendo ferme non compiono alcun lavoro.