

Meccanica celeste

Giuseppe Bogna*, Veronica Sacchi†, Giovanni Maria Tomaselli‡

4 febbraio 2019

Sommario

In questa lezione vedremo in dettaglio il moto in campo centrale e il potenziale efficace, per poi specializzarci a problemi di meccanica celeste.

1 Moto in campo centrale

1.1 Coordinate polari

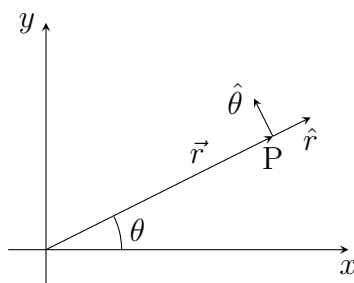


Figura 1: in coordinate polari ogni punto è univocamente determinato dai parametri r e θ .

Conosciamo tutti come individuare univocamente punti sul piano attraverso le coordinate cartesiane: per molti sistemi fisici tuttavia risulta più comodo e significativo utilizzare un altro sistema di coordinate, normalmente chiamate *coordinate polari*, in cui ogni punto è identificato da due parametri

*giuseppe.bogna@sns.it

†veronica.sacchi@sns.it

‡giovanni.tomaselli@sns.it

(siamo sempre su un piano, quindi avremo sempre due gradi di libertà!), di solito indicati con r (la distanza del punto in questione dall'origine) e θ (l'angolo orientato tra la congiungente punto-origine e l'asse x), come indicato in Figura 1. Risulta immediato verificare che è sempre possibile passare da coordinate polari a cartesiane mediante le relazioni:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\y &= r \sin \theta\end{aligned}$$

così come, viceversa, passare dalle cartesiane alle polari:

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right)^1\end{aligned}$$

Osserviamo che questa operazione non è altro che un cambio della base, ossia del sistema di versori, che utilizziamo per rappresentare i nostri vettori nel piano: se prima i nostri versori erano $\hat{x}$ ed $\hat{y}$ (vettori di modulo 1 diretti rispettivamente lungo l'asse x ed y), ora abbiamo scelto di considerare $\hat{r}$ (il versore radiale, un vettore di modulo 1 e diretto lungo la congiungente punto-origine) ed $\hat{\theta}$ (sempre di modulo 1 che possiamo considerare perpendicolare a $\hat{r}$ e diretto in modo che il verso positivo sia quello antiorario). In quest'ottica facciamo attenzione a non confonderci tra le *componenti* e i *versori*: questi ultimi, caratterizzati da una notazione con il “cappellino” (come $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{r}$, $\hat{\theta}$), sono vettori e ci dicono “in che direzione ci muoviamo” per trovare il punto, mentre le prime (indicate come x , y , r , θ associate ai rispettivi versori) sono degli scalari che ci dicono “di quanto ci muoviamo” in ciascuna direzione.

1.2 Vettori in coordinate polari

Ora che sappiamo cosa sono le coordinate polari e come usarle per descrivere i vettori vogliamo scoprire come operare su di essi: l'operatore più importante che non risulta di immediata formalizzazione in questo sistema è probabilmente quello di derivata temporale, che passiamo quindi ad illustrare (nel seguito utilizzeremo la notazione “puntata” per indicare la derivata rispetto al tempo dell'oggetto, ad esempio dx/dt sarà indicato con $\dot{x}$). Ricordando il formalismo di prima, un punto può essere individuato come:

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

¹Questa relazione in realtà vale solo per $x > 0$, mentre per le x negative diventa $\theta = \pi - \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

dove r è lo scalare che ci indica di quanto ci siamo allontanati dall'origine e $\hat{r}$ ci dice in che direzione. Ora, per effettuare la derivata temporale di $\vec{r}$ in realtà dobbiamo calcolare due derivate temporali diverse, che tengano conto delle due diverse quantità che possono cambiare nel tempo, ossia r ed $\hat{r}$, per poi combinarle tra loro (utilizzando la normale regola del prodotto):

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}}$$

Il primo termine è la derivata di una normalissima funzione scalare che moltiplica un vettore, mentre il secondo termine ci preoccupa un po' di più: come può cambiare un versore nel tempo?

Riflettiamo: il suo modulo non può cambiare (è fisso a 1 per definizione) e non risente di traslazioni del sistema poiché l'unica informazione che porta è una direzione; l'unico modo in cui si modifica l'informazione di cui si fa carico è una rotazione (l'unico modo di cambiare direzione, in un certo senso), che può essere rappresentata da un vettore $\vec{\Omega}$ di modulo Ω (la velocità angolare con cui ruota il vettore) e perpendicolare al piano del moto (quindi parallelo all'asse di rotazione).

Ruotando il versore di un angolo infinitesimo Ωdt , è facile convincersi che esso varia di un vettore infinitesimo di modulo Ωdt e perpendicolare a $\hat{r}$. Ciò può essere scritto compattamente con la formula

$$\dot{\hat{r}} = \vec{\Omega} \times \hat{r}$$

che prenderemo d'ora in poi per buona².

Dato che in questo caso stiamo assumendo che $\vec{r}$ sia sempre sul piano xy , il sistema di coordinate polari ci permette di scrivere:

$$\vec{\Omega} = \dot{\theta}\hat{z}$$

che con le dovute sostituzioni ci porta a:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{z} \times \hat{r}$$

Ossia, sviluppando $\hat{z} \times \hat{r} = \hat{\theta}$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \tag{1}$$

Derivando la velocità si ottiene l'accelerazione, e dunque, riapplicando l'operazione di derivata a $\dot{\vec{r}}$ si ottiene l'accelerazione espressa in coordinate polari:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{z} \times \hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}^2\hat{z} \times \hat{\theta} = \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} \end{aligned}$$

²Una dimostrazione rigorosa di questo fatto è riportata nell'Appendice A.

Vediamo ora un rapido esempio in cui utilizzeremo questo nuovo formalismo.

Consideriamo una molla vincolata nell'origine, con costante elastica k , alla cui estremità è agganciata una massa m libera di ruotare nel piano xy , come in Figura 2. La prima equazione della dinamica si scrive dunque, scomposta

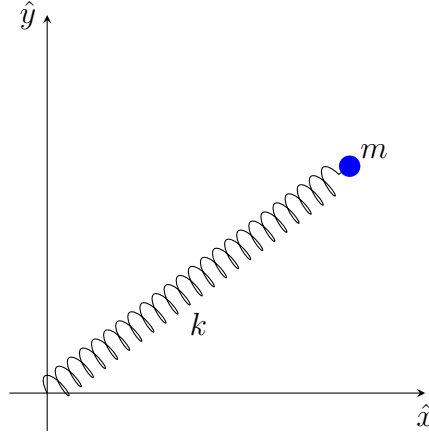


Figura 2: massa collegata a una molla.

nelle due componenti radiale e tangenziale:

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= -kr \\ m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) &= 0 \end{aligned}$$

Per trovare il raggio di equilibrio (quello per cui si ha un moto circolare) basterà imporre $\ddot{r} = \dot{r} = 0$ che riduce le equazioni di prima a:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^2 &= \frac{k}{m} \\ \ddot{\theta} &= 0 \end{aligned}$$

Con questo formalismo si inferisce immediatamente anche che in un campo di forze centrali il momento angolare (calcolato rispetto all'origine) si conserva; infatti dalla prima equazione della dinamica si ha che la componente tangenziale della forza è nulla, dunque

$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0$$

Moltiplicando per r si ottiene:

$$m(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}) = 0$$

in cui riconosciamo una derivata temporale:

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$$

da cui la quantità $L = mr^2\dot{\theta}$ risulta costante.

2 Potenziale coulombiano

Viene indicato come potenziale coulombiano (o gaussiano) un potenziale della forma

$$V(r) = \frac{k}{r}$$

dove k è una costante indipendente da r . L'aggettivo "gaussiano" è dovuto a una notevole proprietà: ogni campo associato a un potenziale di questo tipo rispetta un analogo della legge di Gauss valida per il campo elettrico (quindi anche la forza di gravità). Una dimostrazione rigorosa di questo fatto richiede strumenti troppo avanzati per poterla riproporre qui, tuttavia possiamo convincercene intuitivamente osservando che la forma "matematica" del potenziale è sempre la stessa, dunque se per il campo elettrico vale tale legge (che deriva proprio dalla sua struttura matematica), allora vale anche per qualunque altro campo che possieda questa struttura.

3 Potenziale efficace

Consideriamo una particella di massa m che si muove in un campo centrale descritto dal potenziale $V(r)$. La particella ha in linea di principio tre gradi di libertà spaziali, ossia servono tre coordinate per descrivere la sua posizione nello spazio. Tuttavia, le proprietà di un potenziale centrale ci permettono di ridurre il numero di gradi di libertà spaziali a uno soltanto: infatti, il momento angolare $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ è una costante del moto. Da questo segue che il moto in realtà è limitato al piano ortogonale a $\vec{L}$, quindi servono al più due coordinate per descrivere il moto della particella. Una delle due coordinate può essere eliminata in questo modo: sappiamo che l'energia della particella è un'altra costante del moto e vale

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2r^2 + V(r)$$

dove abbiamo indicato con $\dot{r}$ la velocità radiale e con $\dot{\theta}$ la velocità angolare. Il modulo del momento angolare è

$$L = m\dot{\theta}r^2$$

Dunque si ha

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \quad (2)$$

In quest'ultima espressione compare solo la variabile r e la sua derivata temporale $\dot{r}$, quindi abbiamo ridotto il moto a un problema unidimensionale. Il potenziale associato a questo moto *non* è $V(r)$, ma

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$$

ed è chiamato potenziale efficace. Si noti che generalmente i potenziali che ci interessano divergono per $r \rightarrow 0$ meno di r^{-2} , quindi l'aggiunta del termine con L , detto termine centrifugo, dà un andamento tipico per V_{eff} a piccole distanze. Dalla forma del potenziale efficace è inoltre possibile ricavare importanti proprietà sulle orbite percorse dalla particella. Per fissare le idee, prendiamo il potenziale più semplice possibile, ossia un potenziale armonico

$$V(r) = \frac{1}{2}kr^2$$

Il potenziale efficace è

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2$$

e un grafico è riportato in Figura 3.

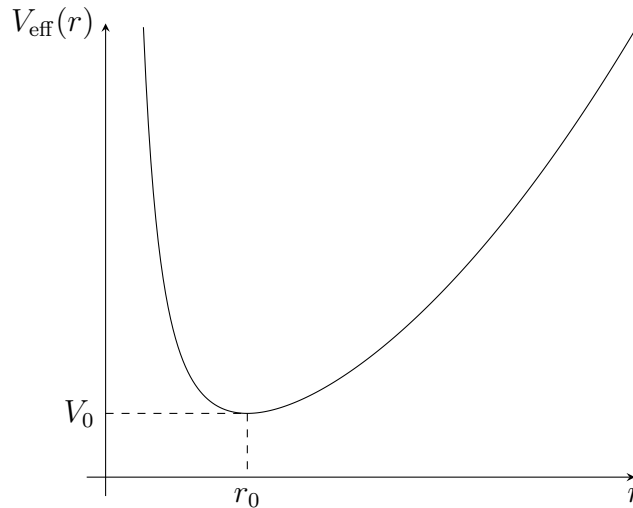


Figura 3: potenziale efficace per un oscillatore armonico.

Il potenziale efficace diverge sia a grandi che a piccole distanze: la prima divergenza è dovuta al termine armonico, la seconda al termine centrifugo.

Notiamo ora che nell'Equazione 2 il termine cinetico è non negativo. Questo significa, come noto, che il moto è limitato alla regione in cui $V(r) \leq E$. Detto V_0 il valore minimo di V_{eff} , possiamo quindi distinguere diversi regimi

- per $E < V_0$ nessuna regione è accessibile dalla particella;
- per $E = V_0$, la particella è vincolata a stare nel minimo di V_{eff} , ossia $r = r_0$ per ogni tempo. Il moto è quindi circolare;
- per $E > V_0$ la particella si muove in una regione limitata $r_1 \leq r \leq r_2$, dove r_1 e r_2 dipendono in generale da E .

Supponiamo invece di avere un potenziale coulombiano attrattivo

$$V(r) = -\frac{k}{r}$$

dove $k > 0$ è una costante opportunamente dimensionata. In tal caso il potenziale efficace è

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$$

e un grafico è riportato in Figura 4.

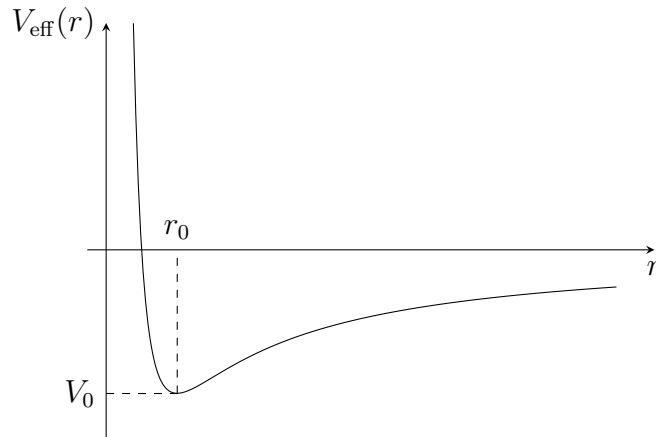


Figura 4: potenziale efficace per un potenziale coulombiano.

Anche in questo caso il potenziale efficace diverge a piccole distanze come r^{-2} . A grandi distanze invece la situazione è differente, dato che per $r \rightarrow +\infty$ sia V che il termine centrifugo si annullano. Questa caratteristica, assente nel potenziale armonico, permette l'esistenza di orbite illimitate. Più precisamente

- per $E < V_0$ nessuna regione è accessibile dalla particella;

- per $E = V_0$, la particella è vincolata a stare nel minimo di V_{eff} , ossia $r = r_0$ per ogni tempo. Il moto è quindi circolare;
- per $V_0 < E < 0$ la particella si muove in una regione limitata $r_1 \leq r \leq r_2$, dove r_1 e r_2 dipendono in generale da E ,
- per $E \geq 0$ la particella può muoversi in una semiretta $\bar{r} \leq r$, con $\bar{r}$ dipendente da E . La particella quindi prima o poi si allontana indefinitamente dall'origine.

4 Perturbazioni e piccole oscillazioni

In molte situazioni può essere utile studiare un'orbita perturbata. La perturbazione può essere dovuta a vari motivi, noi ci limitiamo a studiare perturbazioni di orbite circolari e piccole perturbazioni del potenziale. Partiamo dal primo caso, supponendo di avere un potenziale centrale $V(r)$ che ammetta un'orbita circolare di raggio r_0 a energia E e momento angolare L . Questo significa, come visto nella sezione precedente, che il potenziale efficace ha un minimo³ in r_0 e che

$$E = V(r_0) + \frac{L^2}{2mr_0^2}$$

Supponiamo ora di perturbare quest'orbita dando alla particella una *piccola* velocità radiale u . In tal modo, possiamo supporre che la particella continui a rimanere a distanze dall'origine $r \simeq r_0$, oscillando intorno a r_0 . Inoltre, dato che la velocità impartita è radiale, il momento angolare dell'orbita perturbata è uguale a quello dell'orbita circolare. Chiediamoci ora quale sia la frequenza di queste oscillazioni intorno a r_0 . Posto $r = r_0 + \xi$, con $\xi \ll r_0$, l'energia si scrive come

$$E + \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{L^2}{2m(r_0 + \xi)^2} + V(r_0 + \xi) \quad (3)$$

dove E è l'energia dell'orbita imperturbata e v_r è la derivata temporale di $r_0 + \xi$, ovvero $\dot{\xi}$. Possiamo espandere il potenziale efficace al secondo ordine in ξ , ottenendo

$$V_{\text{eff}}(r_0 + \xi) \simeq \frac{L^2}{2mr_0^2} \left(1 - 2\frac{\xi}{r_0} + 3\frac{\xi^2}{r_0^2} \right) + V(r_0) + \xi V'(r_0) + \frac{1}{2}\xi^2 V''(r_0)$$

³In realtà per ammettere un'orbita circolare è sufficiente avere un punto stazionario, ma se il punto in questione è di sella o un massimo l'orbita non è stabile.

dove, per il termine centrifugo, si è usata l'approssimazione

$$(1+x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2$$

valida per $|x| \ll 1$. Stiamo però supponendo che per r_0 il potenziale efficace abbia un punto stazionario, dunque il termine lineare in ξ è nullo. Di conseguenza, ricordando l'espressione per E otteniamo

$$V_{\text{eff}}(r_0 + \xi) \simeq E + \left(\frac{3}{2} \frac{L^2}{mr_0^4} + \frac{1}{2} V''(r_0) \right) \xi^2$$

e infine, dall'Equazione 3,

$$\frac{1}{2} m u^2 = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + \left(\frac{3}{2} \frac{L^2}{mr_0^4} + \frac{1}{2} V''(r_0) \right) \xi^2$$

Quest'ultima equazione è ben nota: è un oscillatore armonico! Infatti, derivando ambo i membri rispetto al tempo otteniamo un'equazione del moto della forma

$$m \ddot{\xi} + k \xi = 0$$

Deduciamo per confronto che la frequenza delle oscillazioni è

$$\omega^2 = 3 \frac{L^2}{m^2 r_0^4} + \frac{V''(r_0)}{m}$$

Mentre l'ampiezza Ξ delle oscillazioni è

$$\Xi = \frac{u}{\omega}$$

Si noti quindi che piccola u significa $u \ll \omega r_0$. Stiamo infatti lavorando nell'approssimazione $\xi \ll r_0$.

Vediamo come esempio un potenziale coulombiano: supponiamo di avere

$$V(r) = -\frac{k}{r}$$

con $k > 0$. Per una traiettoria circolare di raggio r_0 , energia E e momento angolare L si ha

$$E = \frac{L^2}{2mr_0^2} - \frac{k}{r_0}$$

La frequenza di oscillazione dell'orbita perturbata è quindi

$$\omega^2 = 3 \frac{L^2}{m^2 r_0^4} - 2 \frac{k}{mr_0^3} = 6 \frac{E}{mr_0^2} + 4 \frac{k}{mr_0^3}$$

Consideriamo ora un altro tipo di perturbazione: prendiamo un potenziale $V_0(r)$ che conosciamo bene e aggiungiamoci un piccolo termine $\delta V(r)$, ossia consideriamo il potenziale

$$V(r) = V_0(r) + \delta V(r)$$

In questo caso gli effetti sono spesso notevoli, e dipendono fortemente da V_0 e δV . Scegliamo⁴ per fissare le idee il nostro potenziale coulombiano per V_0 e il termine δV

$$V_0(r) = -\frac{k}{r}, \quad \delta V(r) = -\frac{\lambda}{r^3}$$

Vediamo cosa accade a un'orbita che per $\lambda = 0$ è ellittica. Indichiamo con $r_{\min}$ e $r_{\max}$ i punti di minima e massima distanza dal centro, ossia i due punti soluzioni di

$$E = \frac{L^2}{2mr_{\min}^2} + V(r_{\min}), \quad E = \frac{L^2}{2mr_{\max}^2} + V(r_{\max})$$

Usando la conservazione dell'energia abbiamo ovviamente

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2} \right)}$$

Inoltre, il modulo del momento angolare è

$$L = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$$

Mettendo insieme queste due relazioni otteniamo

$$d\theta = \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{dr} dr = \pm \frac{L/r^2}{\sqrt{2m(E - V(r)) - L^2/r^2}} dr \quad (4)$$

Questo significa che per compiere un giro (ossia per passare da $r_{\min}$ a $r_{\max}$ e poi tornare a $r_{\min}$) la particella percorre un angolo

$$\theta = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{L/r^2}{\sqrt{2m(E - V(r)) - L^2/r^2}} dr$$

Notiamo che la funzione integranda è la derivata di una funzione di L , ossia

$$\begin{aligned} \theta &= -2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\partial}{\partial L} \sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{L^2}{r^2}} dr = \\ &= -2 \frac{\partial}{\partial L} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{L^2}{r^2}} dr \end{aligned}$$

⁴Una correzione al potenziale newtoniano in cui si muovono i pianeti del sistema solare, calcolata usando la relatività generale, è proprio della forma di δV .

La derivata è stata portata fuori dal segno di integrale perchè stiamo integrando su una variabile diversa da quella su cui deriviamo. Questo passaggio può essere giustificato formalmente⁵ e non dovrebbe spaventarvi troppo. Adesso possiamo espandere la funzione integranda al primo ordine nella perturbazione δV , ovvero

$$\sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{L^2}{r^2}} \simeq \sqrt{2m(E - V_0(r)) - \frac{L^2}{r^2}} - \frac{m \delta V(r)}{\sqrt{2m(E - V_0(r)) - \frac{L^2}{r^2}}}$$

In definitiva otteniamo

$$\begin{aligned} \theta = & 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{L/r^2}{\sqrt{2m(E - V_0(r)) - \frac{L^2}{r^2}}} dr + \\ & + 4m \frac{\partial}{\partial L} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\delta V(r)}{\sqrt{2m(E - V_0(r)) - \frac{L^2}{r^2}}} dr \end{aligned} \quad (5)$$

Il primo termine lo conosciamo già, dato che in assenza del termine perturbativo la particella percorre un angolo di 2π ad ogni giro. Il secondo integrale ci dà una correzione a 2π , quindi la particella torna alla minima distanza dal centro avendo percorso un angolo *diverso* da un angolo giro. Per questo motivo l'introduzione di δV fa precedere le orbite ellittiche. Valutiamo adesso l'integrale esplicitamente, in modo da calcolare effettivamente l'angolo di precessione. Il calcolo è assai tedioso e poco istruttivo, ma può essere semplificato con delle opportune approssimazioni. Infatti, sappiamo che l'orbita seguita dalla particella è *quasi* ellittica, dato che il termine perturbativo è piccolo. Se calcoliamo l'integrale su tale orbita, l'errore compiuto rispetto all'integrale sull'orbita reale è almeno al secondo ordine, quindi trascurabile. Usando inoltre l'Equazione 4, otteniamo

$$\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\delta V(r)}{\sqrt{2m(E - V_0(r)) - \frac{L^2}{r^2}}} dr \simeq \frac{1}{L} \int_0^\pi r^2 \delta V(r) d\theta$$

Questa relazione vale qualunque sia la forma della perturbazione. Nel nostro caso, dobbiamo valutare

$$-\frac{\lambda}{L} \int_0^\pi \frac{d\theta}{r}$$

Per il calcolo di questo integrale si può usare il fatto che l'orbita imperturbata è ellittica. In tal caso la sua forma in coordinate polari è⁶

$$r = \frac{r_0}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

⁵Si veda il teorema di derivazione sotto il segno di integrale.

⁶Per maggiori dettagli si veda l'Appendice B.

con

$$r_0 = \frac{L^2}{mk^2}$$

Così si ottiene

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{r} = \frac{\pi}{r_0}$$

In definitiva quindi si ottiene

$$\theta = 2\pi - 4m \frac{\partial}{\partial L} \frac{\lambda \pi m k^2}{L^3} = 2\pi + \frac{12m^2 \lambda \pi k^2}{L^4}$$

Come previsto, l'orbita precede.

5 Problema dei due corpi

Consideriamo adesso il moto di due masse m_1 e m_2 , poste rispettivamente in $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$. Supponiamo che interagiscano tramite un potenziale “centrale” della forma $V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$. L'energia totale è

$$E = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^2 + V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

Una strategia generale per studiare un problema del genere è passare alle coordinate del centro di massa e a quelle relative. Poniamo

$$\begin{aligned} M &= m_1 + m_2, & \mu &= \frac{m_1 m_2}{M} \\ \vec{r} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2, & \vec{R} &= \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M} \end{aligned}$$

Con queste sostituzioni si può dimostrare che l'energia può essere scritta nella forma

$$E = \frac{1}{2} M \vec{u}^2 + \frac{1}{2} \mu \vec{v}^2 + V(|\vec{r}|)$$

dove $\vec{u} = \dot{\vec{R}}$ e $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$. Il punto fondamentale di questa equazione è che è la somma di due termini che dipendono da coordinate diverse. Il primo termine è

$$E_{\text{cm}} = \frac{1}{2} M \vec{u}^2$$

ed è l'energia del centro di massa. Dato che il potenziale non dipende da $\vec{R}$, il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme, come deve essere per un sistema isolato. L'altro termine è

$$E_{\text{int}} = \frac{1}{2} \mu \vec{v}^2 + V(|\vec{r}|)$$

ed è esattamente un moto in campo centrale per una particella di massa μ . Tale massa è nota come massa ridotta del sistema. Nel caso particolare di interazione gravitazionale, la massa μ si muove nel potenziale generato da M . Infatti, si ha

$$V(|\vec{r}|) = -\frac{Gm_1m_2}{r} = -\frac{GM\mu}{r}$$

Vediamo infine un'approssimazione spesso utile: se $m_1 \gg m_2$, allora si ottiene

$$M \simeq m_1, \quad \mu \simeq m_2$$

Questo significa che se la prima massa è *molto* più grande della seconda, allora la prima si muove di moto rettilineo uniforme, mentre il moto della seconda massa è quello usuale nel campo V , ma intorno alla posizione di m_1 . Ad esempio, questa approssimazione è molto utile per studiare il moto di un pianeta intorno a una stella.

6 Punti di Lagrange

Come si comporta una piccola massa di prova, di massa m in un sistema a due corpi, come ad esempio quello Sole-Terra? Ci piacerebbe in particolare capire se (ed eventualmente dove) è possibile collocare la massa di prova in modo che sia in equilibrio nel sistema dei due corpi maggiori (di masse $M_1 > M_2 \gg m$). Intendiamo ovviamente che resti ferma nel sistema corotante con tali due corpi, cioè, in altre parole, che giri intorno al Sole con la stessa velocità angolare della Terra, pur in presenza dell'attrazione da parte di quest'ultima. Nel seguito, approssimeremo la distanza Terra-Sole come costante (e pari ad R), cioè trascureremo l'eccentricità dell'orbita.

Nel sistema rotante, oltre alle attrazioni gravitazionali, è presente la forza centrifuga $\vec{F}_c = m\omega^2 r \hat{r}$. Il problema dell'equilibrio delle forze è equivalente alla stazionarietà del potenziale, associando alla forza centrifuga il potenziale $V_c = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ (infatti, $\vec{F}_c = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r}$). Attraverso uno studio qualitativo della forma del potenziale, possiamo individuare il numero e le posizioni dei punti di equilibrio.

Cominciamo considerando la retta congiungente Sole e Terra. La linea tratteggiata in Figura 5 riporta il potenziale gravitazionale

$$V_g(r) = -\frac{GM_1m}{|r|} - \frac{GM_2m}{|r-R|}$$

che ovviamente tende a zero all'infinito e diverge negativamente in corrispondenza dei due corpi. Quest'ultima proprietà implica l'esistenza di (almeno)

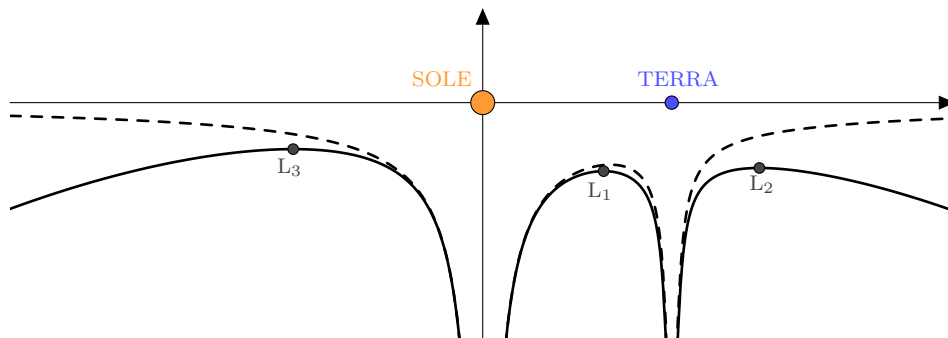


Figura 5: potenziale gravitazionale nel sistema Sole-Terra (tratteggiato) e potenziale totale, con l'aggiunta del termine centrifugo (linea continua).

un punto, posizionato tra il Sole e la Terra, in cui il potenziale raggiunge un massimo locale. Aggiungiamo ora il potenziale centrifugo (la linea continua mostra il potenziale totale). Il tratto tra il Sole e la Terra non viene qualitativamente modificato, dato che le buche in corrispondenza dei corpi rimangono; il punto stazionario individuato nel caso precedente, dunque, viene solo leggermente spostato, ma rimane: lo chiameremo L_1 . Diversa è la situazione negli altri due tratti: ora l'andamento del potenziale all'infinito è dominato dal termine centrifugo, che tende a $-\infty$. Grazie a ciò, due nuovi punti stazionari, ancora massimi locali, compaiono in ciascuno dei due tratti: li chiameremo L_2 e L_3 . Abbiamo analizzato il potenziale solo lungo la retta congiungente, ma grazie alla simmetria del problema per riflessione rispetto ad essa, concludiamo che L_1 , L_2 e L_3 sono punti d'equilibrio, cioè anche lungo la direzione perpendicolare al disegno la derivata del potenziale è nulla. Vale però la pena chiedersi se anche lungo tale direzione siamo in presenza di un massimo locale (potenziale globalmente concavo), o viceversa di un minimo locale (potenziale "a sella", cioè concavo in una direzione e convesso nell'altra). Spostando di pochissimo la massa di prova da uno dei tre punti di Lagrange, ad esempio L_1 , verso l'interno o l'esterno del foglio, quindi lungo il piano dell'orbita, le distanze che compaiono nel potenziale varieranno al second'ordine e non è difficile convincersi che la risultante delle forze sulla massa sarà diretta verso L_1 . Per L_2 e L_3 valgono ragionamenti simili, anche se meno banali nei dettagli. I tre punti sono quindi di sella.

Continuando l'analisi qualitativa del potenziale, possiamo individuare anche i due rimanenti punti di equilibrio. Immaginiamo, per ogni semiretta che dal Sole va all'infinito, di individuare il (primo) punto di massimo locale del potenziale (restringendoci alla semiretta). Ad esempio, se la semiretta interseca la Terra, il punto sarà L_1 , mentre se la semiretta è quella esattamente opposta, sarà L_3 . Collegando tutti questi punti, otteniamo una curva di

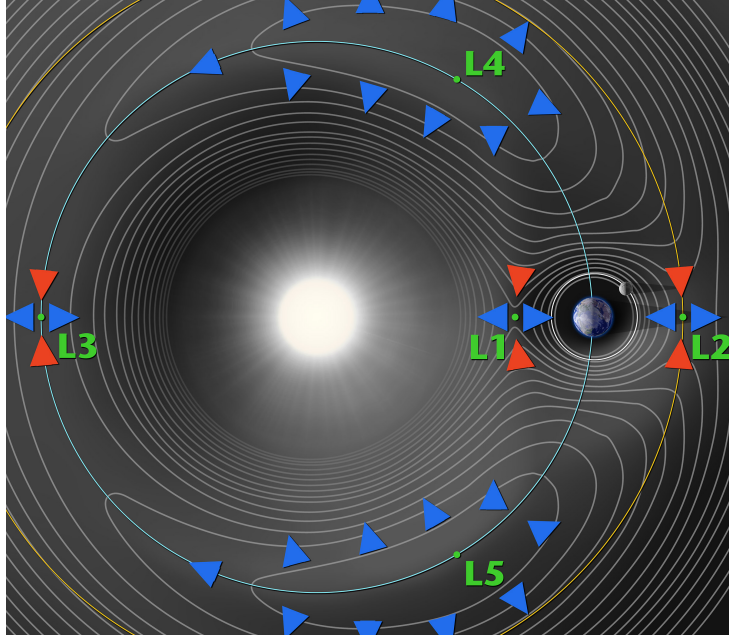


Figura 6: curve di livello del potenziale.

massimi locali (lungo le semirette uscenti) che circonda il Sole. Affinché uno di questi punti sia un reale punto di equilibrio, deve essere un massimo locale anche per spostamenti perpendicolari alla semiretta lungo cui è stato individuato. Grazie all'analisi precedente, sappiamo che il potenziale, lungo tale direzione, ha un minimo locale in L_1 e L_3 . Andando da uno di questi due punti all'altro lungo la curva disegnata prima, deve quindi esistere (almeno) un punto in cui il potenziale è in un massimo locale lungo tale direzione; in questo punto, se unico, saremo anche in un massimo globale. Ovviamente, per simmetria, c'è un tale punto da ciascuna parte della congiungente Sole-Terra. Li chiameremo L_4 e L_5 (Figura 6).

Calcoliamo adesso la posizione dei cinque punti di Lagrange. Per L_1 e L_2 , dobbiamo risolvere l'equazione (scritta già nell'approssimazione in cui il Sole sia il centro di rotazione)

$$\frac{GM_1m}{r^2} = \pm \frac{GM_2m}{(R-r)^2} + m\omega^2 r$$

Questa è un'equazione quartica in r , ma se $M_1 \gg M_2$, allora $x = |R-r| \ll R$,

quindi, usando $\omega^2 = GM_1/R^3$,

$$\begin{aligned}\frac{M_1}{(R \mp x)^2} &\approx \frac{M_1}{R^2} \left(1 \pm 2 \frac{x}{R}\right) = \pm \frac{M_2}{x^2} + \frac{M_1}{R^3} (R \mp x) \\ \pm 3 \frac{M_1}{R^3} x &= \pm \frac{M_2}{x^2} \\ x &= R \left(\frac{M_2}{3M_1}\right)^{1/3} \\ r_{L_1, L_2} &= R \mp x = R \left(1 \mp \left(\frac{M_2}{3M_1}\right)^{1/3}\right)\end{aligned}$$

La correzione dell'ordine della radice cubica del rapporto delle masse ci rassicura sulla consistenza della soluzione, dato che l'approssimazione di Sole al centro fallisce ad un ordine M_2/M_1 , quindi più piccolo.

Seguendo lo stesso approccio, per L_3 bisognerebbe risolvere

$$\frac{GM_1 m}{r^2} + \frac{GM_2 m}{(R+r)^2} = m\omega^2 r$$

Anche in questo caso $x = r - R \ll R$ e si otterrebbe $x = \frac{M_2}{12M_1}$. Questa soluzione, a differenza della precedente, è inconsistente, perché dello stesso ordine in cui l'equazione di partenza riceve correzioni. Scriviamo quindi l'equazione in generale indicando ancora con r la distanza dal Sole e stando attenti ad usare stavolta $\omega^2 = \frac{G(M_1+M_2)}{R^3}$ (vedere la sezione precedente sul problema dei due corpi):

$$\begin{aligned}\frac{GM_1 m}{r^2} + \frac{GM_2 m}{(R+r)^2} &= m \frac{G(M_1+M_2)}{R^3} \left(r + \overbrace{\frac{M_2}{M_1+M_2} R}^{\text{baricentro}}\right) \\ M_1 \left(1 - 2 \frac{x}{R}\right) + \frac{M_2}{4} \left(1 - \frac{x}{R}\right) &= (M_1+M_2) \left(1 + \frac{x}{R}\right) + M_2 \\ \left(\frac{1}{4} - 2\right) M_2 &= \left(3M_1 + \left(1 + \frac{1}{4}\right) M_2\right) \frac{x}{R} \\ \frac{x}{R} &= -\frac{7}{12} \frac{M_2}{M_1}\end{aligned}$$

L_3 è dunque più vicino a M_1 di quanto lo sia M_2 (e quindi il risultato errato ottenuto in precedenza andava addirittura nella direzione sbagliata!). Risulta comodo scrivere la posizione di L_3 rispetto al baricentro:

$$r_{L_3} = R + x + \frac{M_2}{M_1+M_2} R \approx R \left(1 + \frac{5M_2}{12M_1}\right)$$

Passiamo ora a L_4 e L_5 . Anche qui l'approssimazione di “Sole al centro” non è sufficiente: in tal caso, infatti, l'attrazione del Sole e la forza centrifuga sarebbero parallele, quindi in nessun modo aggiungendo l'attrazione terrestre, non parallela ad esse, potremmo ottenere zero. Passiamo quindi al caso generale: la forza centrifuga, diretta, a meno di un segno, verso il baricentro del sistema, deve essere bilanciata dall'attrazione gravitazionale. Indicando con $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ le posizioni di Sole e Terra, chiediamoci quindi quali sono i punti nei quali la forza di gravità è diretta verso il baricentro del sistema.

$$\begin{aligned}
\vec{F}_g &= -\frac{GM_1m}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}(\vec{r}-\vec{r}_1) - \frac{GM_2m}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}(\vec{r}-\vec{r}_2) = \\
&= -\left(\frac{GM_1m}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} + \frac{GM_2m}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}\right)\vec{r} - \left(\frac{GM_2m}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3} - \frac{GM_2m}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}\right)\vec{r} + \\
&\quad + \frac{GM_1m}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}\vec{r}_1 + \frac{GM_2m}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}\vec{r}_2 + \left(\frac{GM_2m}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3} - \frac{GM_2m}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}\right)\vec{r}_2 = \\
&= \underbrace{-\frac{G(M_1+M_2)m}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}\left(\vec{r} - \frac{M_1\vec{r}_1 + M_2\vec{r}_2}{M_1+M_2}\right)}_{\text{parte diretta verso il baricentro}} - \underbrace{\left(\frac{GM_2m}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3} - \frac{GM_2m}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}\right)(\vec{r}-\vec{r}_2)}_{\text{pezzo aggiuntivo}}
\end{aligned}$$

È chiaro che $\vec{F}_g$ sarà diretta verso il baricentro solo in due casi

- il pezzo aggiuntivo è diretto verso il baricentro, cioè $\vec{r}$ si trova sulla congiungente Sole-Terra (e questo non è nient'altro che il caso di L_1 , L_2 e L_3);
- il pezzo aggiuntivo si annulla, cioè le distanze da Sole e Terra sono uguali ($\vec{r}$ si trova sull'asse del segmento Sole-Terra), $|\vec{r}-\vec{r}_1| = |\vec{r}-\vec{r}_2| = D$.

Il secondo caso corrisponde ovviamente a L_4 e L_5 , le cui posizioni si trovano imponendo finalmente l'equilibrio delle forze

$$\frac{G(M_1+M_2)m}{D^3}\left(\vec{r} - \frac{M_1\vec{r}_1 + M_2\vec{r}_2}{M_1+M_2}\right) = \underbrace{\frac{G(M_1+M_2)}{R^3}}_{\omega^2} m\left(\vec{r} - \frac{M_1\vec{r}_1 + M_2\vec{r}_2}{M_1+M_2}\right)$$

da cui $D = R$, il che vuol dire che Sole, Terra e massa di prova formano un triangolo equilatero.

È bene notare che i cinque punti di Lagrange possono essere considerati da un altro punto di vista, quello adottato originariamente dal loro scopritore: in un problema con tre corpi (massivi!), i punti di Lagrange corrispondono alle due soluzioni di equilibrio del sistema, cioè la configurazione collineare e quella equilatera.

Per concludere, spendiamo due parole sulla stabilità di questi punti di equilibrio. Abbiamo visto che L_1 , L_2 e L_3 sono in punti di sella del potenziale, mentre L_4 e L_5 in massimi globali. Questo porterebbe a pensare che nessuno di essi sia stabile, ma le cose sono più complesse di così. Infatti, il sistema di riferimento rotante non è inerziale, il che comporta la presenza non solo di una forza centrifuga apparente, ma anche della forza di Coriolis $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}$. Nell'analisi della stabilità dei punti bisogna tenerne conto, dato che si richiede, ovviamente, di dare alla massa di prova piccole velocità. Il risultato è che L_1 , L_2 e L_3 sono sempre instabili, mentre L_4 e L_5 sono stabili solo se $\frac{M_1}{M_2} > \frac{25+\sqrt{621}}{2} \approx 24.96$. I punti L_4 e L_5 di diversi pianeti sono popolati da asteroidi detti Troiani, mentre i punti L_1 e L_2 della Terra sono dimora di sonde artificiali che si mantengono in posizione con rade correzioni di orbita.

7 Teorema del viriale

Dato un sistema di n particelle puntiformi interagenti tra loro o con qualche forza esterna, consideriamo la quantità

$$I(t) \equiv \sum_{i=1}^n m_i |\vec{r}_i(t)|^2$$

dove m_i e $\vec{r}_i(t)$ sono la massa e la posizione della particella i -esima. Se le particelle e l'origine sono tutte sullo stesso piano, I è il momento d'inerzia del sistema lungo l'asse perpendicolare a tale piano e passante per l'origine. Calcoliamone le derivate rispetto al tempo:

$$\begin{aligned} G &\equiv \frac{dI}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) = 2 \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{d^2 I}{dt^2} = 2 \sum_{i=1}^n m_i \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i) = 2 \sum_{i=1}^n m_i (\ddot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i + \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i) \end{aligned}$$

In quest'ultima espressione riconosciamo l'espressione della forza risultante agente sulla particella i -esima, $\vec{F}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i$, e dell'energia cinetica totale,

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i |\dot{\vec{r}}_i|^2$$

quindi

$$\frac{1}{2} \frac{dG}{dt} = 2T + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \quad (6)$$

Data una generica quantità $A(t)$, la sua media temporale su un intervallo di tempo Δt è definita da

$$\langle A \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} A(t) dt,$$

in cui abbiamo scelto convenzionalmente di far cominciare l'intervallo dal tempo $t = 0$. Prendendo la media temporale dell'Equazione 6, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Delta t} \int_0^{\Delta t} \frac{dG}{dt} dt &= \left\langle 2T + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle \\ \frac{G(\Delta t) - G(0)}{2\Delta t} &= 2 \langle T \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \rangle \end{aligned}$$

In diversi casi, il termine a sinistra si annulla. Questo succede ad esempio se il moto è periodico di periodo Δt , dato che G è funzione delle posizioni e delle velocità delle particelle. Più in generale, è sufficiente che $G(t)$, durante l'evoluzione del sistema, vari tra un valore massimo e uno minimo affinché il primo membro si annulli nel limite $\Delta t \rightarrow +\infty$; dall'espressione per G scritta precedentemente, è chiaro che questa condizione è soddisfatta, ad esempio, da sistemi stabilmente legati in cui le velocità delle particelle non divergono. Il teorema del viriale, nella sua forma più generale, è dunque

$$2 \langle T \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \rangle = 0$$

Restringiamoci adesso al caso $n = 1$, supponendo che la particella sia immersa in un campo di forze centrale, in modo che

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(r) = -\vec{\nabla}U(r) = -\frac{dU}{dr}\hat{r}$$

dove U è l'energia potenziale della particella. In molti casi, U è proporzionale ad una potenza di r , diciamo $U = \alpha r^\nu$. Allora $\vec{F} \cdot \vec{r} = -\alpha \nu r^{\nu-1}r = -\nu U$ e il teorema del viriale assume la seguente forma

$$2 \langle T \rangle = \nu \langle U \rangle$$

Questa importante conclusione rimane vera nel caso di n particelle interagenti a coppie con potenziale proporzionale alla potenza ν -esima della distanza reciproca,

$$\vec{F}_i = - \sum_{j=1}^n \vec{\nabla} U_i(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|), \quad U_i(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = \alpha_i |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^\nu$$

e anche nel caso più generale di un potenziale omogeneo di grado ν nelle coordinate.⁷

Diamo un'occhiata al teorema del viriale nei due casi più importanti di potenziali centrali con una sola particella.

- Se il potenziale è armonico, $\nu = 2$, cioè $\langle T \rangle = \langle U \rangle$. Questa conclusione è ovvia nel caso unidimensionale, perché il quadrato della posizione e il quadrato della velocità sono due funzioni sinusoidali shiftate di un quarto di periodo, e le energie cinetica e potenziale oscillano tra gli stessi massimi e minimi (basta considerare i punti di inversione del moto e quello di massima velocità). La conclusione, invece, non è ovvia nel caso a più dimensioni con orbite non circolari.
- Se il potenziale è quello coulombiano, $\nu = -1$, cioè $\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle U \rangle$. Questa relazione si può ottenere facilmente nel caso di orbita circolare, in cui le due energie sono costanti nel tempo, mentre risulta non ovvia nel caso di orbite ellittiche.

⁷Si dice “omogenea di grado ν ” una funzione che è somma di termini di stesso grado. Ad esempio $U(x, y, z) = xy^2z + yz^3$ è omogenea di grado 4.

Appendici

A Derivate dei versori

I versori $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ possono essere scritti in coordinate cartesiane

$$\hat{r} = \hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta \quad (7)$$

$$\hat{\theta} = -\hat{x} \sin \theta + \hat{y} \cos \theta \quad (8)$$

Possiamo calcolare le derivate dei secondi membri delle Equazioni 7 e 8 senza particolari problemi, perchè i versori $\hat{x}$ e $\hat{y}$ sono fissi. Si ha

$$\begin{aligned} \dot{\hat{r}} &= -\hat{x}\dot{\theta} \sin \theta + \hat{y}\dot{\theta} \cos \theta = \dot{\theta}\hat{\theta} \\ \dot{\hat{\theta}} &= -\hat{x}\dot{\theta} \cos \theta - \hat{y}\dot{\theta} \sin \theta = -\dot{\theta}\hat{r} \end{aligned}$$

Queste derivate sono proprio della forma

$$\begin{aligned} \dot{\hat{r}} &= \vec{\Omega} \times \hat{r} \\ \dot{\hat{\theta}} &= \vec{\Omega} \times \hat{\theta} \end{aligned}$$

a patto di porre $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\hat{z}$. Più in generale, consideriamo un vettore $\vec{v}$ di modulo costante ed eseguiamo su di esso una rotazione attorno ad un asse $\hat{n}$ di un angolo θ , come in Figura 7. La componente di $\vec{v}$ parallela a $\hat{n}$, ossia

$$\vec{v}_{\parallel} = (\vec{v} \cdot \hat{n})\hat{n}$$

è lasciata inalterata dalla trasformazione. Al contrario, la componente perpendicolare

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{\parallel}$$

è ruotata di un angolo θ e rimane nel piano perpendicolare ad $\hat{n}$. In particolare, se indichiamo con un apice i vettori dopo la rotazione si avrà

$$\vec{v}'_{\perp} = (\vec{v} - \vec{v}_{\parallel}) \cos \theta + (\hat{n} \times \vec{v}) \sin \theta$$

Di conseguenza il vettore ruotato sarà

$$\vec{v}' = (\vec{v} \cdot \hat{n})\hat{n} + (\vec{v} - (\vec{v} \cdot \hat{n})\hat{n}) \cos \theta + (\hat{n} \times \vec{v}) \sin \theta$$

Supponiamo ora che un vettore $\vec{v}$ ruoti a velocità angolare ω (in generale dipendente dal tempo) attorno ad un asse $\hat{n}$. Se $d\theta = \omega dt$ è l'angolo infinitesimo di cui ruota $\vec{v}$, al primo ordine in dt abbiamo

$$\vec{v}(t+dt) = (\vec{v}(t) \cdot \hat{n})\hat{n} + (\vec{v} - (\vec{v}(t) \cdot \hat{n})\hat{n}) + (\hat{n} \times \vec{v}(t))\omega dt = \vec{v}(t) + \omega(\hat{n} \times \vec{v}(t)) dt$$

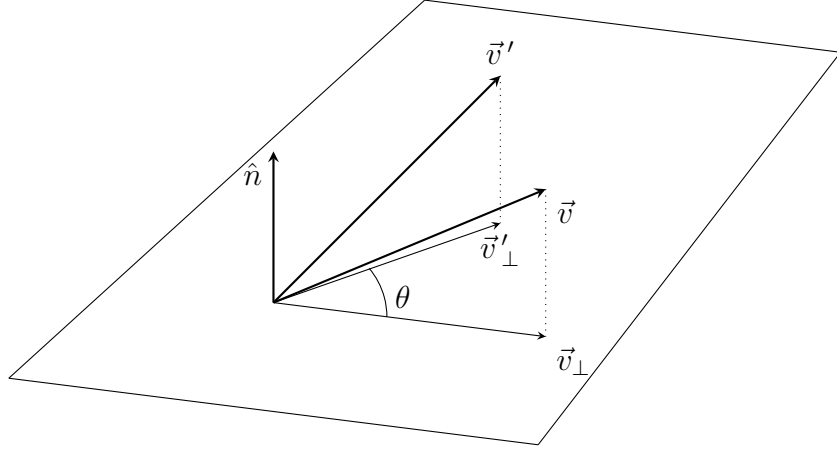


Figura 7: rotazione di $\vec{v}$ intorno a $\hat{n}$.

Ossia

$$\frac{\vec{v}(t + dt) - \vec{v}(t)}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

e al limite $dt \rightarrow 0$ si ha

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

B Equazione di Binet e leggi di Keplero

Riprendiamo l'espressione per l'energia di una particella in un campo centrale

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

Deriviamo l'energia rispetto al tempo per ottenere l'equazione del moto

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

Nella maggior parte delle situazioni l'equazione scritta in tale forma non è trattabile in maniera agevole, e anzi ci piacerebbe trovare una forma più semplice per l'equazione del moto. A tale scopo, introduciamo la variabile $u = r^{-1}$. Utilizzando la regola per la derivata della funzione composta e ricordando $L = mr^2\dot{\theta}$, si ottiene

$$\dot{r} = \frac{\partial r}{\partial \theta} \dot{\theta} = \frac{\partial r}{\partial \theta} \frac{L}{mr^2}$$

Osserviamo inoltre che si ha

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \theta}$$

Di conseguenza otteniamo l'espressione

$$\dot{r} = -\frac{L}{m} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

Possiamo derivare ancora una volta rispetto al tempo, ottenendo

$$\ddot{r} = -\frac{L}{m} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \dot{\theta} = -\left(\frac{L}{m}\right)^2 u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

Infine, inserendo tale espressione nell'equazione del moto si ottiene un'equazione per l'orbita, nota come formula di Binet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + u = \frac{mr^2}{L^2} \frac{\partial V}{\partial r}$$

In genere, se si conosce il potenziale V la formula di Binet permette di ricavare agilmente l'orbita. Per un potenziale coulombiano, l'equazione di Binet ci dà

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + u = \frac{mk}{L^2}$$

L'equazione precedente è analoga all'equazione del moto di un oscillatore armonico di frequenza unitaria, a cui viene aggiunta una forza esterna costante. La soluzione è quindi della forma

$$u(\theta) = \frac{mk}{L^2} + A \cos \theta$$

dove A è un'opportuna costante, dipendente dalle condizioni iniziali⁸. Allora avremo

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

per opportune costanti r_0 e ε . Passando ora in coordinate cartesiane otteniamo

$$(1 - \varepsilon^2)x^2 + y^2 + 2\varepsilon r_0 x = r_0^2$$

Dunque l'orbita è una conica di eccentricità ε . In particolare avremo una circonferenza per $\varepsilon = 0$, un'ellisse per $0 < \varepsilon < 1$, una parabola per $\varepsilon = 1$ e

⁸A rigore, la soluzione dell'equazione del moto è

$$u(\theta) = \frac{mk}{L^2} + A \cos(\theta + \theta_0)$$

Non è però restrittivo supporre $\theta_0 = 0$, dato che possiamo scegliere sempre gli assi cartesiani sul piano dell'orbita in modo che $\theta(0) = 0$.

un'iperbole per $\varepsilon > 1$. Tramite la conservazione dell'energia si può anche mostrare che

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$$

In particolare otteniamo nuovamente il risultato che lega la forma dell'orbita al segno dell'energia meccanica.

Da questa trattazione possiamo anche dimostrare le tre leggi di Keplero: abbiamo mostrato esplicitamente per sistemi legati (ossia per $E < 0$) l'orbita percorsa è un'ellisse, con il centro attrattore che occupa uno dei due fuochi. Inoltre, la conservazione del momento angolare si scrive come

$$L = mr^2\omega$$

ma il secondo membro è il doppio della velocità areolare, che quindi resta costante nel tempo: questa è la seconda legge di Keplero. Da questa si deduce che, se T è il periodo dell'orbita, si ha

$$LT = 2\pi mab \quad (9)$$

dove a e b sono i due semiassi (assumiamo $a \geq b$). Dalla geometria è ben noto che l'eccentricità è

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

dunque si ha

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{2|E|L^2}{mk^2}$$

Inserendo questa relazione nell'Equazione 9 e quadrando ambo i membri si ottiene

$$T^2 = 4\pi^2 a^4 m \frac{2|E|}{k^2}$$

Dobbiamo solo calcolare E in funzione di a per concludere. All'afelio e al perielio si ha rispettivamente

$$E = \frac{L^2}{2ma^2(1 + \varepsilon)} - \frac{k}{a(1 + \varepsilon)}$$

$$E = \frac{L^2}{2ma^2(1 - \varepsilon)} - \frac{k}{a(1 - \varepsilon)}$$

Eliminando L^2 si arriva infine a

$$E = -\frac{k}{2a}$$

e quindi si conclude

$$T^2 = a^3 \frac{4\pi^2 m}{k}$$

Cioè la terza legge di Keplero.

C Scattering Rutherford

Lo scattering Rutherford è uno degli esempi più importanti di studio dettagliato di un moto in campo centrale. Consideriamo una particella di massa m e carica $q_1 > 0$ che si muove nel potenziale generato da un nucleo di carica $q_2 > 0$ e massa $M \gg m$. In prima approssimazione possiamo considerare il nucleo fermo, così il potenziale in cui si muove la particella è

$$V(r) = \frac{k}{r}$$

dove

$$k = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}$$

Supponiamo che la particella abbia una velocità iniziale $\vec{v}_\infty$ a grandi distanza dal nucleo e siano b il parametro di impatto (cioè la distanza tra il nucleo centrale e la retta su cui giace $\vec{v}_\infty$) e θ l'angolo di scattering (cioè l'angolo tra $\vec{v}_\infty$ e la velocità finale $\vec{v}_f$), come mostrato in Figura 8.

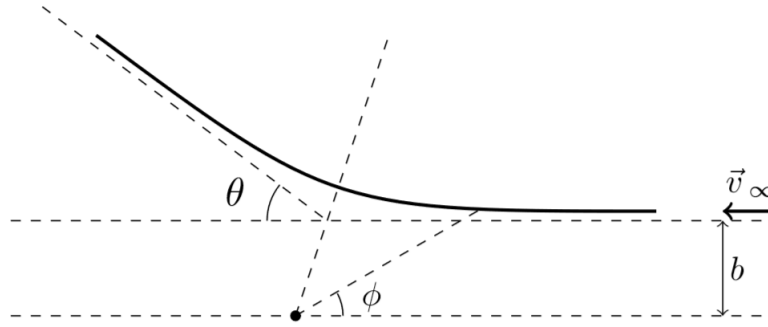


Figura 8: geometria dello scattering Rutherford.

Troviamo la relazione tra b e θ . Se $\Delta\vec{p}$ è la variazione di impulso della particella durante l'urto, per la seconda legge di Newton possiamo scrivere

$$\Delta\vec{p} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F} dt$$

Facciamo un cambio di variabile usando la conservazione del momento angolare: se ϕ è l'angolo in Figura 8 e r è la distanza dal nucleo, abbiamo

$$L = mv_\infty b = mr^2 \dot{\phi}$$

Inoltre, quando $t \rightarrow -\infty$ si ha $\phi \rightarrow 0$, mentre quando $t \rightarrow +\infty$ abbiamo $\phi \rightarrow \pi - \theta$. Otteniamo così

$$\Delta \vec{p} = \int_0^{\pi-\theta} \vec{F} \frac{dt}{d\phi} d\phi = \int_0^{\pi-\theta} \vec{F} \frac{r^2}{v_\infty b} d\phi \quad (10)$$

Si noti che quest'ultima espressione è molto generale e vale qualunque sia il potenziale di interazione. Specializziamola per il nostro caso, in cui

$$\vec{F} = \frac{k}{r^2} \hat{r}$$

Introduciamo ora due versori $\hat{x}$ e $\hat{y}$, scegliendo $\hat{x}$ antiparallelo a $\vec{v}_\infty$ e prendendo per $\hat{y}$ il versore ortogonale a $\hat{x}$, nella direzione di scattering. In tal modo si ha

$$\hat{r} = \hat{x} \cos \phi + \hat{y} \sin \phi$$

e integrando l'Equazione 10

$$\Delta \vec{p} = \int_0^{\pi-\theta} \frac{k}{v_\infty b} (\hat{x} \cos \phi + \hat{y} \sin \phi) d\phi = \frac{k}{v_\infty b} [\hat{x} \sin \theta + \hat{y} (1 + \cos \theta)]$$

Per concludere basta calcolare $\Delta \vec{p}$. Dato che nell'urto l'energia della particella non cambia, la velocità finale ha modulo v_∞ . La direzione dipende dall'angolo di scattering e ovviamente è

$$\vec{v}_f = v_\infty (-\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y})$$

Otteniamo infine

$$\Delta \vec{p} \cdot \hat{y} = mv_\infty \sin \theta = \frac{k}{v_\infty b} (1 + \cos \theta)$$

ossia

$$b = \frac{k}{mv_\infty^2} \cot \frac{\theta}{2} \quad (11)$$

D Massa di Chandrasekhar

Esistono diversi tipi di stelle in cui la materia al suo interno è degenerare, ovvero manifesta effetti quantistici anche a grande scala. Un esempio di queste stelle sono le nane bianche, in cui i nuclei sono trattabili con ottima approssimazione come liberi, mentre gli elettroni liberi all'interno del sistema formano quello che è noto come gas di Fermi completamente degenerare⁹. Un risultato notevole per le nane bianche è il fatto che la loro massa non può superare un valore limite, detto massa di Chandrasekhar. Vediamo perché esiste questo limite, seguendo un ragionamento fatto proprio da Chandrasekhar nel 1930. Prendiamo una stella, per semplicità a simmetria sferica, di raggio R e massa M . All'interno della stella avremo una certa densità ρ che sarà funzione della distanza dal centro, ossia $\rho = \rho(r)$. Lo stesso possiamo dire della pressione, ossia $P = P(r)$. Se il sistema è all'equilibrio, la pressione deve equilibrare l'attrazione gravitazionale. Per capire come procedere, cerchiamo di legare la pressione a una forza per unità di volume. Se consideriamo un piccolo cubetto con i lati dx, dy, dz paralleli agli assi cartesiani, la forza complessiva in direzione $\hat{x}$ è data dalla differenza delle pressioni sulle facce ortogonali a $\hat{x}$, ossia all'ordine più basso

$$dF_x = (-P(x+dx, y, z) + P(x, y, z)) dy dz \simeq -\frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz$$

In particolare, abbiamo considerato il cubetto sufficientemente piccolo in modo da trascurare la variazione della pressione lungo le direzioni y e z . Procedendo allo stesso modo per le facce rimanenti, si trova la forza

$$d\vec{F}_p = -\left(\frac{\partial P}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial P}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial P}{\partial z}\hat{z}\right) dx dy dz$$

Abbiamo quindi una relazione lineare tra la forza dovuta alla pressione e il volume del cubetto. Nel nostro problema la simmetria è sferica, quindi le coordinate cartesiane non sono la scelta migliore. L'analogo di quest'ultima relazione tra forza e pressione si trova considerando una piccola regione sottesa da un angolo solido infinitesimo $d\Omega$ e compresa tra due gusci sferici a distanza r e $r+dr$ dal centro. Il volume di questa regione è $dV \simeq r^2 dr d\Omega$. Inoltre, per

⁹Per essere più precisi, un gas di Fermi è completamente degenerare se la temperatura è rigorosamente $T = 0$ K. Per *basse* temperature la deviazione da questo comportamento è trascurabile, e tipicamente la temperatura di una nana bianca può essere considerata, anche se controintuitivamente, bassa. Ad esempio, per Sirio B il gas di elettroni si può considerare degenerare se la temperatura è piccola rispetto a 10^{10} K, mentre si sa che la temperatura interna non supera i 10^7 K.

simmetria la forza su tale volumetto deve essere in direzione radiale. Allora è

$$d\vec{F}_p = -\frac{dP}{dr}\hat{r}r^2 dr d\Omega$$

Si noti il segno: la forza è infatti diretta verso il centro se la pressione aumenta all'aumentare di r , ossia se la derivata a secondo membro è positiva. Questa forza deve equilibrare la forza gravitazionale che agisce sul cubetto: come noto, l'unico contributo rilevante è quello dovuto alla massa a distanza minore di r dal centro. Inoltre, sempre per simmetria, anche la forza gravitazionale è radiale. La massa contenuta nel volumetto è, all'ordine più basso, $dm = \rho(r)r^2 dr d\Omega$, dunque la forza gravitazionale è

$$d\vec{F}_g = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}\hat{r}r^2 dr d\Omega$$

dove abbiamo indicato con $m(r)$ la massa all'interno della sfera di raggio r , ossia

$$m(r) = \int_0^r 4\pi\xi^2\rho(\xi) d\xi$$

La condizione di equilibrio è $d\vec{F}_p + d\vec{F}_g = 0$, e quindi otteniamo l'equazione¹⁰

$$-\frac{dP}{dr} = \frac{G\rho m}{r^2} \quad (12)$$

Se moltiplichiamo ambo i membri per r^2/ρ e deriviamo ulteriormente rispetto a r otteniamo

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G\rho r^2$$

In questa equazione è scomparsa la massa m , ma abbiamo ancora due funzioni incognite, P e ρ . Supponiamo adesso di avere un'equazione di stato della forma $P(\rho) = K\rho^\gamma$, in modo da avere una sola funzione da calcolare. Questa ipotesi è nota come approssimazione politropica. In tal modo, si ottiene

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{Kr^2}{\rho} \frac{d}{dr} \rho^\gamma \right) = -4\pi G\rho r^2$$

Facciamo ora diversi cambi di variabile: iniziamo rendendo adimensionale il raggio, ossia poniamo $r = \lambda x$, con λ lunghezza caratteristica che specificheremo in seguito. In tal modo otteniamo

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{Kx^2}{\rho} \frac{d}{dx} \rho^\gamma \right) = -4\pi G\rho\lambda^2 x^2$$

¹⁰Si noti che di fatto abbiamo ottenuto l'equazione di Eulero della fluidodinamica in condizioni di equilibrio e in simmetria sferica.

Esplicitiamo anche la derivata di ρ a primo membro, così

$$\frac{d}{dx} \left(Kx^2 \gamma \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dx} \right) = -4\pi G \rho \lambda^2 x^2$$

Poniamo ora

$$\gamma = 1 + \frac{1}{n}$$

$$\rho = \rho_c \phi^n$$

dove ρ_c è una costante e ϕ è la nuova funzione da determinare. Sostituendo otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[Kx^2 \left(1 + \frac{1}{n} \right) \rho_c^{(1-n)/n} \phi^{1-n} \frac{d}{dx} \rho_c \phi^n \right] &= -4\pi G \rho_c \phi^n \lambda^2 x^2 \\ \frac{d}{dx} \left[Kx^2 \left(1 + \frac{1}{n} \right) \rho_c^{(1-n)/n} \phi^{1-n} n \rho_c \phi^{n-1} \frac{d\phi}{dx} \right] &= -4\pi G \rho_c \phi^n \lambda^2 x^2 \\ K(n+1) \rho_c^{(1-n)/n} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\phi}{dx} \right) &= -4\pi G \phi^n \lambda^2 x^2 \end{aligned}$$

Poniamo infine

$$\lambda^2 = \frac{(n+1)K}{4\pi G} \rho_c^{(1-n)/n}$$

In tal modo otteniamo un'equazione nota come equazione di Lane-Emden

$$\frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\phi}{dx} \right) = -x^2 \phi^n$$

Questa equazione è del secondo ordine, quindi dobbiamo imporre due condizioni iniziali. La prima viene dalla definizione di ρ_c , che interpretiamo come densità al centro della stella, quindi imponiamo $\phi(0) = 1$. La seconda richiesta che facciamo è che la densità non abbia una cuspidale per $r = 0$, quindi deve essere $\phi'(0) = 0$. L'equazione di Lane-Emden purtroppo non si risolve analiticamente, a parte per pochi n , ma ci fornisce comunque importanti informazioni sulla stella. Supponiamo che esista un valore $\xi > 0$ per cui $\phi(\xi) = 0$, e supponiamo che questo sia il primo valore positivo per cui ϕ si annulla. Allora interpretiamo $\lambda\xi$ come il raggio della stella, ossia $R = \lambda\xi$. In tal modo, usando l'equazione di Lane-Emden possiamo calcolare la massa del

sistema

$$\begin{aligned}
M &= \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) \, dr = \\
&= 4\pi \lambda^3 \rho_c \int_0^\xi x^2 \phi(x)^n \, dx = \\
&= -4\pi \lambda^3 \rho_c \int_0^\xi \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\phi}{dx} \right) \, dx = \\
&= -4\pi \lambda^3 \rho_c \left[x^2 \frac{d\phi}{dx} \right]_{x=\xi}
\end{aligned}$$

Usando l'espressione di λ otteniamo allora

$$M = -4\pi \rho_c^{(3-n)/(2n)} \left(\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right)^{2/3} \left[x^2 \frac{d\phi}{dx} \right]_{x=\xi} \quad (13)$$

Studiamo in dettaglio questa equazione: il termine tra parentesi quadre dipende unicamente da n , visto che questo è l'unico parametro che compare nell'equazione di Lane-Emden. K è una costante fissata dall'approssimazione politropica e può essere dedotta tramite argomenti di termodinamica o di meccanica statistica. L'unico parametro libero che abbiamo per la massa è quindi ρ_c . Tuttavia, con considerazioni di fisica statistica si può mostrare che per un gas completamente degenere di elettroni relativistici (che è proprio quello presente nelle nane bianche) si ha

$$P = \frac{2\pi\hbar c}{3} \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{4/3}$$

dove n è la densità numerica di elettroni. Se la stella è elettricamente neutra n è proporzionale a ρ , con la costante di proporzionalità che dipende dalla composizione chimica della stella stessa. Abbiamo quindi trovato un'equazione di stato politropica con $n = 3$. Se sostituiamo questo valore nell'Equazione 13, troviamo un valore della massa che è completamente fissato, dato che la dipendenza da ρ_c sparisce. Questo valore è proprio la massa di Chandrasekhar M_{Ch} . Uno studio numerico dell'equazione di Lane-Emden per $n = 3$ porta infine alla stima

$$M_{\text{Ch}} \simeq 1.4 M_\odot$$

dove $M_\odot$ è la massa del Sole.

Problemi

1 Pressione centrale

Si consideri un pianeta di massa M , raggio R e densità uniforme. Trovare la pressione al centro del pianeta.

2 Tempo di collisione

Si considerino due masse m_1 ed m_2 , inizialmente ferme a distanza d . A $t = 0$ iniziano a muoversi sotto la mutua attrazione gravitazionale. Dopo quanto tempo collidono?

3 Anello rotante

Una perlina è vincolata a muoversi senza attrito lungo un anello di raggio R che ruota attorno al diametro verticale con velocità angolare ω costante come in Figura 9. Il sistema è immerso in un campo gravitazionale $\vec{g}$ uniforme.

Quale valore deve assumere ω affinché la perlina mantenga la stessa posizione sull'anello, a un angolo θ rispetto alla verticale? C'è un valore particolare di ω : qual è e perché è speciale?

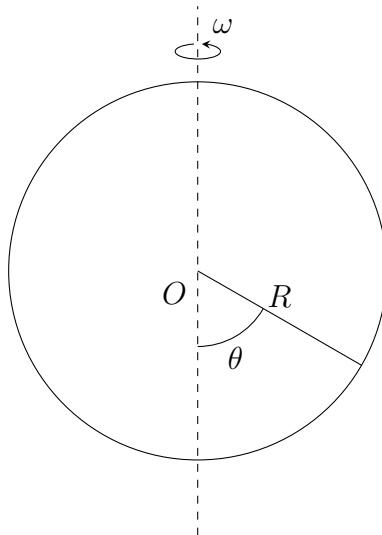


Figura 9: perlina su un anello rotante

4 Perturbazioni

Si consideri un potenziale coulombiano

$$V_0(r) = -\frac{k}{r}$$

e lo si perturbi con un potenziale della forma

$$\delta V(r) = \frac{\alpha}{r^2}$$

Dire se e quanto precede un'orbita ellittica. (Suggerimento: l'equazione di una conica in coordinate polari è

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

dove r_0 è una costante e ε l'eccentricità.)

Cosa cambia se come potenziale non perturbato si prende un potenziale armonico?

5 IPhO 1999/3: una sonda spaziale verso Giove

In questo problema consideriamo un metodo usato spesso per accelerare sonde spaziali nella direzione voluta. La sonda passa vicino a un pianeta e può aumentare notevolmente la propria velocità e/o variare considerevolmente la propria direzione di volo, scambiando una piccolissima quantità di energia col moto orbitale del pianeta. Studiamo qui quest'effetto per una sonda spaziale che passa vicino a Giove.

Il pianeta Giove orbita intorno al Sole lungo una traiettoria ellittica, che possiamo approssimare con una circonferenza di raggio medio R ; anzitutto, per procedere con l'analisi della situazione fisica:

1. Si trovi la velocità V del pianeta nella sua orbita intorno al Sole.
2. Quando la sonda è fra il Sole e Giove (sul segmento Sole-Giove), si trovi la distanza da Giove dove l'attrazione gravitazionale del Sole è uguale a quella di Giove.

Una sonda spaziale di massa $m = 825 \text{ kg}$ passa vicino a Giove. Per semplicità si faccia l'ipotesi che la traiettoria della sonda spaziale sia interamente nel

piano dell'orbita di Giove: in tal modo non consideriamo un caso importante, quello in cui la sonda spaziale è espulsa dal piano orbitale.

Consideriamo soltanto ciò che avviene nella regione in cui l'attrazione gravitazionale di Giove è del tutto preponderante rispetto a tutte le altre interazioni gravitazionali.

Nel sistema di riferimento del Sole la velocità iniziale è $v_0 = 1.00 \times 10^4$ m/s (nel verso positivo dell'asse y), mentre la velocità di Giove è nel verso negativo dell'asse x (vedi Figura 10); per “velocità iniziale” intendiamo la velocità della sonda quando è nello spazio interplanetario, ancora distante da Giove ma già nella regione in cui l'attrazione solare è trascurabile rispetto a quella di Giove. Supponiamo che l'incontro avvenga in un tempo abbastanza breve per poter trascurare la variazione di direzione di Giove nella sua orbita intorno al Sole. Consideriamo il caso in cui la sonda passa *dietro* a Giove, cioè l'ascissa x è maggiore per la sonda che per Giove quando l'ordinata y è la stessa.

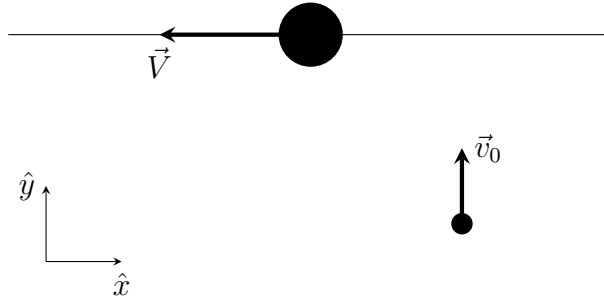


Figura 10: il problema visto dal sistema di riferimento del Sole.

3. Si trovi la direzione del moto della sonda (cioè l'angolo fra la sua direzione e l'asse x), e la sua velocità v' nel sistema di riferimento di Giove quando essa è ancora distante da Giove.
4. Si trovi l'energia totale E della sonda spaziale nel sistema di riferimento di Giove, ponendo, come di regola, uguale a zero il valore della sua energia potenziale a distanza molto grande, nel nostro caso quand'essa si muove a velocità praticamente costante in presenza di interazioni gravitazionali molto piccole.

La traiettoria della sonda spaziale nel sistema di riferimento di Giove è un ramo di iperbole la cui equazione in coordinate polari, in tale riferimento è:

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{v'^2 b^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2E v'^2 b^2}{G^2 M^2 m}} \cos \theta \right) \quad (14)$$

dove b è la distanza fra uno degli asintoti e Giove (il cosiddetto *parametro d'impatto*), E è l'energia meccanica totale della sonda nel sistema di riferimento di Giove, G è la costante di Cavendish, M è la massa di Giove, r e θ sono le coordinate polari (la distanza radiale e l'angolo polare).

La Figura 11 mostra i due rami dell'iperbole uno dei quali è descritto dall'Equazione 14; sono anche mostrati gli asintoti e le coordinate polari. Si noti che l'Equazione 14 ha l'origine nel “*fuoco attrattivo*” dell'iperbole. La traiettoria della sonda è quella attrattiva (il ramo evidenziato).

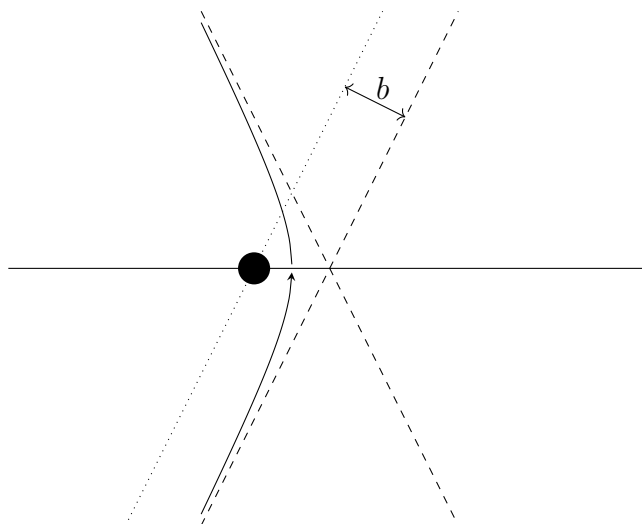


Figura 11: traiettoria nel sistema di Giove.

5. Usando l'Equazione 14 che descrive la traiettoria della sonda spaziale, si trovi la deviazione angolare totale $\Delta\theta$ nel sistema di riferimento di Giove (come indicato in figura) e la si esprima in funzione della velocità iniziale della sonda v' e del parametro d'impatto b .
6. Facendo l'ipotesi che la minima distanza da Giove a cui la sonda possa passare sia pari a tre volte il raggio del pianeta, si trovi il valore minimo possibile del parametro d'impatto b e il valore massimo possibile della deviazioni angolare.
7. Si trovi una formula per la velocità finale v'' della sonda nel sistema di riferimento del Sole, in funzione soltanto della velocità di Giove V , della velocità iniziale v_0 della sonda e dell'angolo di deviazione.
8. Usando i risultati precedenti, si trovi il valore numerico della velocità finale v'' nel sistema di riferimento solare quando la deviazione angolare ha il valore massimo possibile.

6 IPhO 2011/1: problema dei tre corpi

Si considerino due corpi puntiformi di masse M e $m \leq M$ che si muovono lungo orbite circolari, di raggi rispettivamente R ed r , intorno al centro di massa, come in Figura 12

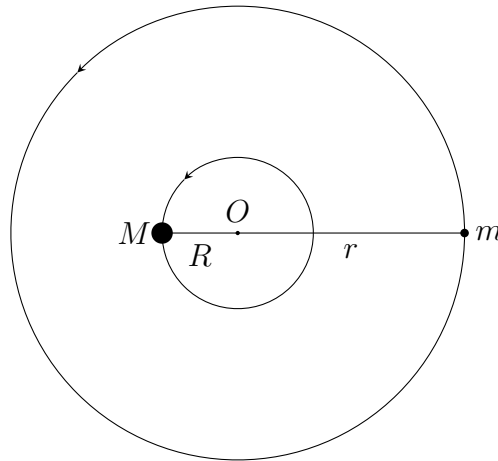


Figura 12: orbite dei due corpi.

1. Trovare la velocità angolare Ω dei due corpi, in termini di M , m , R ed r .

Si aggiunge un terzo corpo di massa $\mu \ll m$ in modo che percorra un'orbita circolare sullo stesso piano delle orbite di M e m e in modo che la posizione di μ sia stazionaria sia rispetto a M che a m . Si assuma inoltre che μ non sia collineare con M e m , come mostrato in Figura 13.

2. Calcolare la distanza di μ da M , da m e dal centro di massa in termini di R e r .
3. Si consideri ora il caso $M = m$. Supponiamo che il moto di μ venga perturbato dandogli una piccola velocità radiale (rispetto al centro di massa). Il sistema rimane legato?
4. La traccia originale del problema dice di assumere, nel punto precedente, che il momento angolare di μ non vari, e di calcolare di conseguenza la frequenza di oscillazione di μ intorno alla posizione di equilibrio. Questa ipotesi è ragionevole?

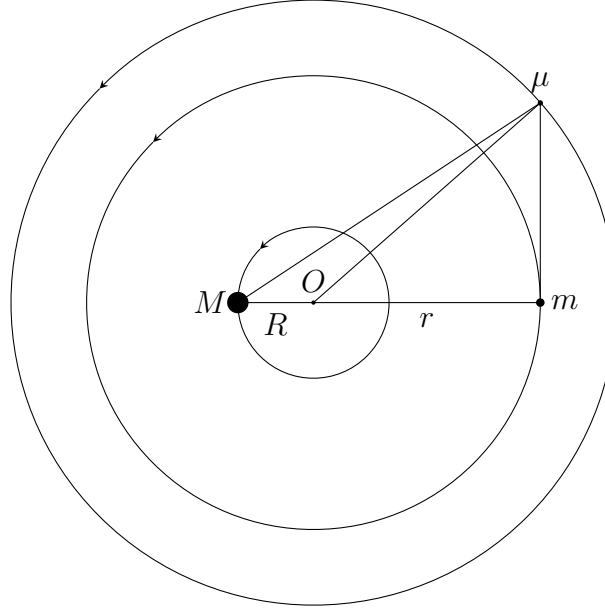


Figura 13: orbite dei tre corpi.

7 preIPhO 2011: nube di gas

Consideriamo una nube di gas, fatta da particelle finissime, che all'istante $t = 0$ è sferica di raggio R e ha una densità $\rho(r, t = 0)$. Ogni particella si muove, all'istante iniziale, con una velocità $v(r, t = 0)$ tangenziale rispetto alla sfera di raggio r , orientata in modo casuale sul piano tangente alla sfera in quel punto. Trascuriamo le collisioni tra le particelle della nube, che quindi interagiscono solo tramite forze gravitazionali.

1. Determinare $\rho(r, t = 0)$ affinché la configurazione $v(r, t = 0) = v_0$ sia stabile nel tempo.
2. Determinare $v(r, t = 0)$ affinché la configurazione $\rho(r, t = 0) = \rho_0$ sia stabile nel tempo. Sia $v_1(r)$ la risposta a questa domanda.

Supponiamo d'ora in poi che $\rho(r, t = 0) = \rho_0$ e $v(r, t = 0) = \alpha v_1(r)$, con $0 < \alpha < 1$. Assumiamo inoltre che, per ogni coppia di particelle (i, j) , se $r_i(t = 0) > r_j(t = 0)$, allora $r_i(t) > r_j(t)$ per ogni $t > 0$ (*no shell-crossing*). In seguito verificheremo la consistenza di questa ipotesi.

3. Trovare la posizione di massimo avvicinamento al centro della nube di ogni particella, in funzione della sua posizione iniziale $r_0 = r(t = 0)$.

4. Dimostrare che il moto *globale* della nube è periodico e trovarne il periodo.
5. Verificare l'ipotesi di *no shell-crossing*.
6. Calcolare l'energia cinetica media di una particella di massa m in funzione di r_0 .

8 Satellite con attrito

Un satellite di massa m si trova inizialmente in un'orbita circolare di raggio r_0 intorno alla Terra (la cui massa sia M). Il satellite è soggetto ad una forza d'attrito $\vec{F}_a = -A\vec{v}$.

1. Quali sono le dimensioni della costante A ?
2. Calcolare, in funzione del tempo, la quantità $a(1 - e^2)$, dove a ed e sono i valori istantanei del semiasse maggiore e dell'eccentricità dell'orbita.

3. Dimostrare che

$$\left. \frac{d(1 - e^2)}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

4. Trovare $a(t)$ per piccoli tempi e specificare quantitativamente fino a quando è valida questa approssimazione.

Supporre ora che la forza di attrito sia sufficientemente piccola da poter approssimare l'orbita come istantaneamente circolare. Generalizziamo inoltre al caso in cui $\vec{F}_a = -Av^n\vec{v}$.

5. Calcolare $a(t)$. Per quali n il satellite raggiunge $a = 0$? Quando?
6. Scrivere quantitativamente l'ipotesi di forza di attrito piccola. Usare il teorema del viriale per giustificare, a partire da questa ipotesi, l'assunzione fatta precedentemente, ossia che $e(t) \approx 0$ anche per tempi lunghi.

9 Potenziale efficace di un buco nero

In Relatività Generale, il moto di un oggetto intorno a un buco nero di massa M , neutro e non rotante, è governato dalla seguente equazione:

$$\zeta = \frac{1}{(1 - r_S/r)^3} \left(\frac{1}{c} \frac{dr}{dt} \right)^2 + U(r), \quad U(r) = \frac{\ell^2}{r^2} - \frac{r_S}{r - r_S} \quad (15)$$

in cui

- ζ è una costante del moto che, se l'oggetto è privo di massa, vale 1;
- r_S è detto “raggio di Schwarzschild” e vale $\frac{2GM}{c^2}$;
- c è la velocità della luce in uno spazio completamente vuoto;
- ℓ è una costante del moto che vale $\frac{r^2}{1-r_S/r} \frac{1}{c} \frac{d\phi}{dt}$.

L'equazione è valida solo per $r > r_S$; al di sotto di r_S si estende il buco nero e nessun oggetto, luce compresa, può uscirne.

1. Per quali valori di ζ esistono traiettorie che si allontanano indefinitamente dal buco nero?
2. Mostrare che nel limite $r \gg r_S$ l'equazione si riduce all'usuale conservazione dell'energia in un campo newtoniano. Trovare la relazione tra ζ e l'energia totale.
3. Nelle coordinate (r, ϕ, t) che stiamo usando, la velocità, classicamente definita, dei fotoni dipende dal punto in cui si trovano? E dalla direzione?
4. Quante orbite circolari sono permesse, al variare di ℓ ? Quali sono stabili e quali instabili? Trovare il raggio della più piccola orbita circolare stabile.
5. Per quali valori di ℓ un fotone proveniente dall'infinito finisce nel buco nero? Trovare il massimo avvicinamento possibile che consenta ad un fotone di allontanarsi di nuovo indefinitamente.
6. Qual è il raggio dell'unica orbita circolare permessa ai fotoni?
7. Un osservatore si trova ad una distanza $R \gg r_S$ e guarda verso il buco nero. Supponendo sia noto R , quanto vale il raggio, come calcolato dall'osservatore, della “zona nera” nel suo campo visivo?
8. Per quali valori di ℓ un oggetto, fermo all'infinito, finisce nel buco nero? Trovare il minimo avvicinamento possibile che gli consenta di allontanarsi nuovamente arrivando di nuovo fermo all'infinito.
9. Se l'oggetto parte fermo all'infinito, e passa in $r = r_0$ al tempo $t = 0$, calcolare $r(t)$ nell'approssimazione in cui $r_0 - r_S \ll r_S$, cioè r_0 sia appena fuori dal buco nero. L'oggetto entra nel buco nero in un tempo finito o infinito?

10 Precessione orbitale e deviazione della luce

Come nel problema precedente (che si consiglia di affrontare prima di questo), consideriamo il moto di un oggetto in Relatività Generale, governato dall'Equazione 15. Come in meccanica newtoniana, all'esterno di un corpo a simmetria sferica le equazioni del moto sono indipendenti dalla dimensione dell'attrattore, quindi l'Equazione 15 sarà comunque valida se ci restringiamo ad $r > R$, dove R è il raggio dell'attrattore.

Storicamente, due tra le prime e più importanti verifiche sperimentali della Relatività Generale sono state il calcolo della precessione del perielio di Mercurio e la predizione dell'angolo di deviazione della luce da parte del Sole. In questo problema si richiede di svolgere questi due calcoli.

1. Riscrivere l'Equazione 15 in termini di $\frac{dr}{d\phi}$. Ricavando questa quantità e integrando per separazione delle variabili l'equazione differenziale, si può calcolare l'angolo spazzato dal raggio vettore durante il moto del corpo tra il perielio e l'afelio. Dato che siamo interessati alla prima correzione perturbativa rispetto al caso newtoniano, prima di integrare è opportuno approssimare (al corretto ordine in r_S/r) la funzione integranda. Il risultato da ottenere per lo spostamento del perielio dopo un'intera orbita è

$$\Delta\phi \approx \frac{3\pi r_S^2}{2\ell^2} = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1-e^2)}$$

Si può far uso del seguente integrale: $\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{du}{\sqrt{\alpha^2 - u^2}} = [\arcsin(u/\alpha)]_{-\alpha}^{\alpha} = \pi$. Valutare numericamente $\Delta\phi$ usando i parametri orbitali di Mercurio:

- eccentricità $e = 0.2056$;
- semiasse maggiore $a = 57.91 \times 10^6$ km;
- periodo orbitale $T = 87.97$ giorni;

esprimendo il risultato in secondi d'arco a secolo.

Va notato che le perturbazioni causate dagli altri pianeti inducono una precessione approssimativamente di un ordine di grandezza maggiore, che va a sommarsi all'effetto general-relativistico. Già a metà '800, tuttavia, ci si rese conto che la sola attrazione degli altri pianeti non era sufficiente per spiegare il valore misurato.

2. Lo stesso integrale trattato nel punto precedente è valido, con le opportune modifiche, anche per il calcolo della deviazione della luce. Mostrare

che, all'ordine più basso in r_S/l , tale deviazione è

$$\Delta\phi \approx 2\frac{r_S}{\ell}$$

e fornirne il valore numerico per un raggio radente la superficie del Sole, usando i seguenti dati fisici:

- massa $M = 1.989 \times 10^{30}$ kg;
- raggio $R = 6.955 \times 10^8$ m.

Mostrare che questa predizione è esattamente il doppio di quella fornita dalla gravità Newtoniana unita al principio di equivalenza.

11 IPhO 2017/1: materia oscura

Questo problema cerca di studiare alcuni aspetti della materia oscura: storicamente, Zwicky stimò per l'Ammasso della Chioma una massa maggiore di quella effettivamente osservata nelle galassie che lo compongono. La stima si basa sulla velocità delle galassie stesse, troppo elevata per mantenere il sistema legato sotto l'attrazione gravitazionale della sola massa visibile. Deve quindi esserci massa sotto una qualche forma non visibile che permette di mantenere queste velocità. Nel seguito, si assuma che la massa di una galassia sia la somma della sua massa visibile e della materia oscura al suo interno, e che questa interagisca con il resto della galassia unicamente tramite forze gravitazionali.

1. Si consideri un ammasso di N galassie distribuite uniformemente all'interno di una sfera di raggio R . Siano M la massa totale dell'ammasso (ovvero la massa delle galassie e della materia oscura) e m la massa media di una galassia (ossia della materia visibile e della materia oscura al suo interno). Approssimando la distribuzione di massa all'interno dell'ammasso come continua, trovare l'energia gravitazionale totale in termini di M e R .

A causa dell'espansione dell'Universo, ogni oggetto distante si sta allontanando dalla Terra. La velocità di allontanamento dipende dalla distanza tra l'oggetto e l'osservatore e può essere rivelata, ad esempio, tramite effetto Doppler. Si supponga di osservare la stessa riga spettrale dell'idrogeno in ogni galassia dell'ammasso e sia f_i la frequenza osservata per l' i -esima galassia, con $i = 1, \dots, N$. Si supponga inoltre che la stessa riga, misurata sulla Terra, corrisponda alla frequenza f_0 .

2. Trovare la velocità media $\bar{v}$ dell'intero ammasso in termine di f_i , (per $i = 1, \dots, N$), N e f_0 . Si lavori nell'approssimazione $\bar{v} \ll c$.
3. Assumendo che le velocità delle galassie siano distribuite in maniera isotropa rispetto al centro dell'ammasso, si determini la velocità quadratica media v_{rms} delle galassie rispetto al centro dell'ammasso, in termini di f_i (con $i = 1, \dots, N$), N e f_0 . Si calcoli inoltre l'energia cinetica media di una galassia nel sistema dell'ammasso, in termini di v_{rms} e m .
4. Usando il teorema del viriale per un potenziale gravitazionale, si trovi la massa totale della materia oscura presente nell'ammasso, in termini di N , m_g , R e v_{rms} , dove m_g è la massa media della materia visibile di una galassia.

La materia oscura è presente anche all'interno e intorno a una singola galassia. Si consideri adesso una galassia sferica con un raggio visibile R_g che contenga la quasi totalità delle stelle della galassia. All'esterno di tale raggio si possono ancora trovare stelle, ma in numero *molto* minore rispetto alle regioni interne. Si assuma inoltre che le stelle siano punti materiali di massa media m_s distribuite omogeneamente (con densità numerica n) all'interno della galassia. Si assume infine che le stelle si muovano tutte in orbite circolari.

5. Trovare la velocità orbitale $v(r)$ di una stella che si muove in un'orbita di raggio r , supponendo che la materia oscura non sia presente. Effettuare il calcolo sia per $r \leq R_g$ che per $r \geq R_g$ e fare un grafico qualitativo di $v(r)$.

La presenza della materia oscura all'interno della galassia può essere osservata indirettamente tramite una curva di rotazione, ossia tramite un grafico di $v(r)$. Una tipica curva di rotazione è riportata in Figura 14. Si assuma per semplicità che $v(r)$ sia lineare per $r \leq R_g$ e uguale a v_0 per $r \geq R_g$.

6. Trovare la massa totale M della parte di galassia contenuta all'interno della sfera di raggio R_g centrata sul centro della galassia, in termini di R_g e di v_0 .
7. Il disaccordo tra la curva di rotazione in Figura 14 e il grafico richiesto nella domanda 5 indica l'esistenza di materia oscura. Trovarne la densità a una distanza r dal centro della galassia, in termini di r , R_g , v_0 , n e m_s , sia per $r \leq R_g$ che per $r \geq R_g$.

Infine, si consideri una giovane galassia sferica la cui massa è costituita principalmente dal gas interstellare e dalla materia oscura (si trascuri quindi la massa delle stelle). Si assuma che il gas interstellare sia formato da particelle

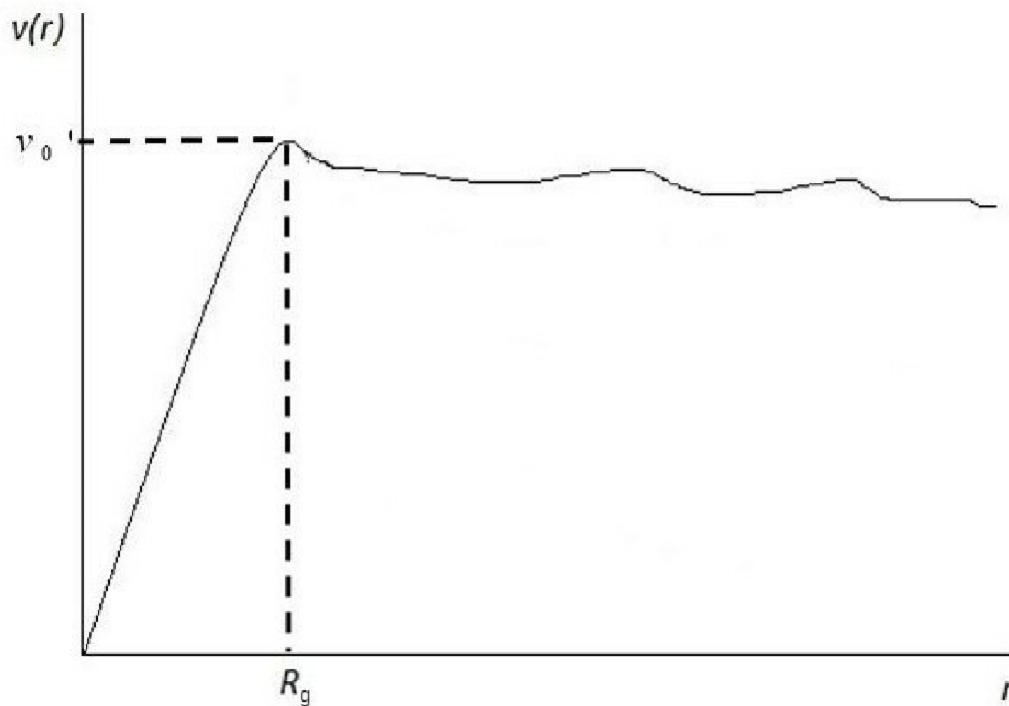


Figura 14: curva di rotazione tipica di una galassia.

identiche di massa m_p e che abbia una densità numerica $n(r)$ dipendente dalla distanza dal centro della galassia.

8. Assumendo che il gas sia all'equilibrio idrostatico, ossia che la pressione equilibri l'attrazione gravitazionale, trovare il gradiente di pressione dP/dr in termini di $m(r)$, r e $n(r)$. $m(r)$ è la massa totale (cioè dovuta sia al gas che alla materia oscura) contenuta in una sfera di raggio r centrata nel centro della galassia.

Soluzioni

1 Pressione centrale

Riprendiamo l'equazione 12 per l'equilibrio idrostatico e sia $\rho = 3M/(4\pi R^3)$ la densità della stella

$$-\frac{dP}{dr} = \frac{Gm\rho}{r^2}$$

Dato che la densità è uniforme, abbiamo

$$m = \frac{4\pi}{3}\rho r^3 = M \frac{r^3}{R^3}$$

e dunque si deduce

$$-\frac{dP}{dr} = \frac{3GM^2}{4\pi R^6}r$$

Integrando in r si ottiene

$$P(r) = P(0) - \frac{3GM^2}{8\pi R^6}r^2$$

Per determinare $P(0)$ dobbiamo utilizzare un'opportuna condizione al bordo. Da un punto di vista fisico conosciamo già questa condizione: alla superficie del pianeta deve essere $P = 0$ per avere equilibrio. Allora imponendo $P(R) = 0$ si ottiene

$$P(0) = \frac{3GM^2}{8\pi R^4}$$

2 Tempo di collisione

Una strada possibile per risolvere il problema è trattare analiticamente le equazioni del moto. Questo significa mettersi nel sistema del centro di massa e studiare l'equazione

$$\mu\ddot{x} = -\frac{GM\mu}{x^2}$$

dove μ è la massa ridotta e $M = m_1 + m_2$ la massa totale del sistema dei due corpi, con le condizioni iniziali $x(0) = d$, $\dot{x}(0) = 0$. I calcoli sono assai tedious, quindi cerchiamo una via alternativa: immaginiamo di dare una piccola velocità iniziale u ai due corpi, ortogonale alla congiungente tra i due. In questo caso le due masse descrivono orbite ellittiche intorno al centro di

massa e, se u è sufficientemente piccola, queste orbite sono molto eccentriche. Per la terza legge di Keplero, il periodo del moto è

$$T^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^3 \frac{4\pi^2}{GM}$$

Si noti la presenza della massa totale: ciò è dovuto al fatto che, una volta passati nel centro di massa, il moto relativo è analogo al moto di un corpo di massa μ nel campo gravitazionale di un corpo di massa M . Il semiasse maggiore è $d/2$ perché l'afelio è d e il perielio è 0. Infine, per calcolare il tempo impiegato dai due corpi per collidere (nel limite $u \rightarrow 0$) dobbiamo dividere il periodo T per un fattore 2, dato che per la collisione si deve percorrere solamente mezza orbita. Si conclude

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{d^3}{8GM}}$$

3 Anello rotante

Sulla perlina agiscono la reazione vincolare $\vec{N}$ dell'anello, in direzione radiale, e la gravità. La somma vettoriale delle due forze deve essere pari alla forza centripeta agente sulla perlina, dunque proiettando lungo le direzioni parallela e perpendicolare all'asse di rotazione si trova

$$\begin{cases} N \cos \theta = mg \\ N \sin \theta = m\omega^2 R \sin \theta \end{cases}$$

ossia

$$\omega^2 = \frac{g}{R \cos \theta}$$

Invertendo questa relazione si trova

$$\cos \theta = \frac{g}{R\omega^2}$$

e dato che $|\cos \theta| \leq 1$ si trova la condizione

$$\omega \geq \omega^* = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

Vediamo a cosa è legata questa frequenza critica. Nel sistema non inerziale, l'energia potenziale della perlina ha due contributi: l'energia gravitazionale e il potenziale centrifugo, dunque

$$U(\theta) = -mgR \cos \theta - \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \sin^2 \theta = -mgR \left[\cos \theta + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega^*} \right)^2 \sin^2 \theta \right]$$

Assumiamo $\theta \in [-\pi, \pi]$. I punti di equilibrio si trovano imponendo che il potenziale abbia un punto stazionario, ossia $U'(\theta) = 0$. Questo porta alla condizione

$$\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega^*}\right)^2 \cos \theta\right] \sin \theta = 0$$

Escludiamo la posizione $\theta = \pi$, che è sempre un punto di equilibrio instabile. Una soluzione sempre possibile è $\theta = 0$. Questa è l'unica soluzione se il termine tra parentesi quadre non si annulla, ossia per $\omega < \omega^*$. Viceversa, per $\omega \geq \omega^*$ il termine tra parentesi quadre si annulla, in particolare se $\omega = \omega^*$ si annulla per $\theta = 0$, per $\omega > \omega^*$ si annulla per due valori opposti $\pm\bar{\theta}$, definiti da

$$\cos \bar{\theta} = \left(\frac{\omega^*}{\omega}\right)^2$$

Vediamo la stabilità dei punti di equilibrio: dobbiamo studiare la derivata seconda del potenziale, ovvero

$$\frac{U''(\theta)}{mgR} = \cos \theta - \left(\frac{\omega}{\omega^*}\right)^2 \cos 2\theta$$

Per $\theta = 0$ è

$$\frac{U''(0)}{mgR} = 1 - \left(\frac{\omega}{\omega^*}\right)^2$$

quindi l'equilibrio è stabile per $\omega \leq \omega^*$,¹¹ instabile per $\omega > \omega^*$. In $\theta = \pm\bar{\theta}$ si ha invece

$$\frac{U''(\pm\bar{\theta})}{mgR} = \left(\frac{\omega}{\omega^*}\right)^2 - \left(\frac{\omega^*}{\omega}\right)^2$$

e quindi questi punti di equilibrio sono stabili, quando esistono. Ricapitolando

- per $\omega < \omega^*$ l'unica posizione di equilibrio è $\theta = 0$, ed è stabile;
- per $\omega = \omega^*$ l'unica posizione di equilibrio è $\theta = 0$, è stabile e il potenziale si annulla come θ^4 per piccoli angoli¹²;
- per $\omega > \omega^*$ abbiamo la posizione di equilibrio instabile $\theta = 0$ e le due posizioni di equilibrio stabile $\theta = \pm\bar{\theta}$.

¹¹A rigore per $\omega = \omega^*$ si deve guardare la derivata quarta del potenziale.

¹²Abbiamo mostrato che la derivata seconda di U è nulla per $\theta = 0$. La derivata terza è nulla per simmetria, come tutte le derivate di ordine dispari.

Questa analisi si può compiere anche studiare graficamente il potenziale, come mostrato in Figura 15. Vicino alla posizione di equilibrio si ha un andamento del potenziale molto conosciuto e studiato, anche in altri ambiti

$$U(\theta) \simeq a [(\omega^*)^2 - \omega^2] \theta^2 + b\theta^4$$

dove $a, b > 0$ sono costanti opportunamente dimensionate. È interessante notare che si può fare una trattazione del tutto analoga per studiare il ferromagnetismo nei materiali. In questi sistemi esiste una temperatura caratteristica, detta temperatura critica, al di sotto della quale il materiale presenta una magnetizzazione spontanea, mentre al di sopra della temperatura critica il sistema è paramagnetico. L'analogo dell'energia potenziale è dato da una grandezza termodinamica, nota come energia libera di Helmholtz, che vicino alla temperatura critica si comporta come

$$F \simeq a(T - T_c)m^2 + bm^4$$

dove $a, b > 0$ sono costanti opportune, T è la temperatura del sistema, T_c la temperatura critica e m è la magnetizzazione. Il sistema all'equilibrio regola la magnetizzazione in modo da minimizzare F , quindi ritroviamo l'analisi fatta per la perla: per $T \geq T_c$ è $m = 0$, per $T < T_c$ è $m \neq 0$.

4 Perturbazioni

Dobbiamo valutare l'integrale

$$\Delta\phi = 4m \frac{\partial}{\partial L} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\delta V(r)}{\sqrt{2m(E - V_0) - L^2/r^2}} dr$$

che esplicitamente è

$$\Delta\phi = 4m \frac{\partial}{\partial L} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\alpha}{r \sqrt{2m(Er^2 - kr) - L^2}} dr$$

Per valori di α sufficientemente piccoli possiamo calcolare questo integrale sull'orbita ellittica imperturbata, a meno di correzioni agli ordini successivi. Facciamo ora il cambio di variabile suggerito

$$r \mapsto r(\theta) = \frac{r_0}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

e notiamo che

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon \sin \theta}{r_0} r^2$$

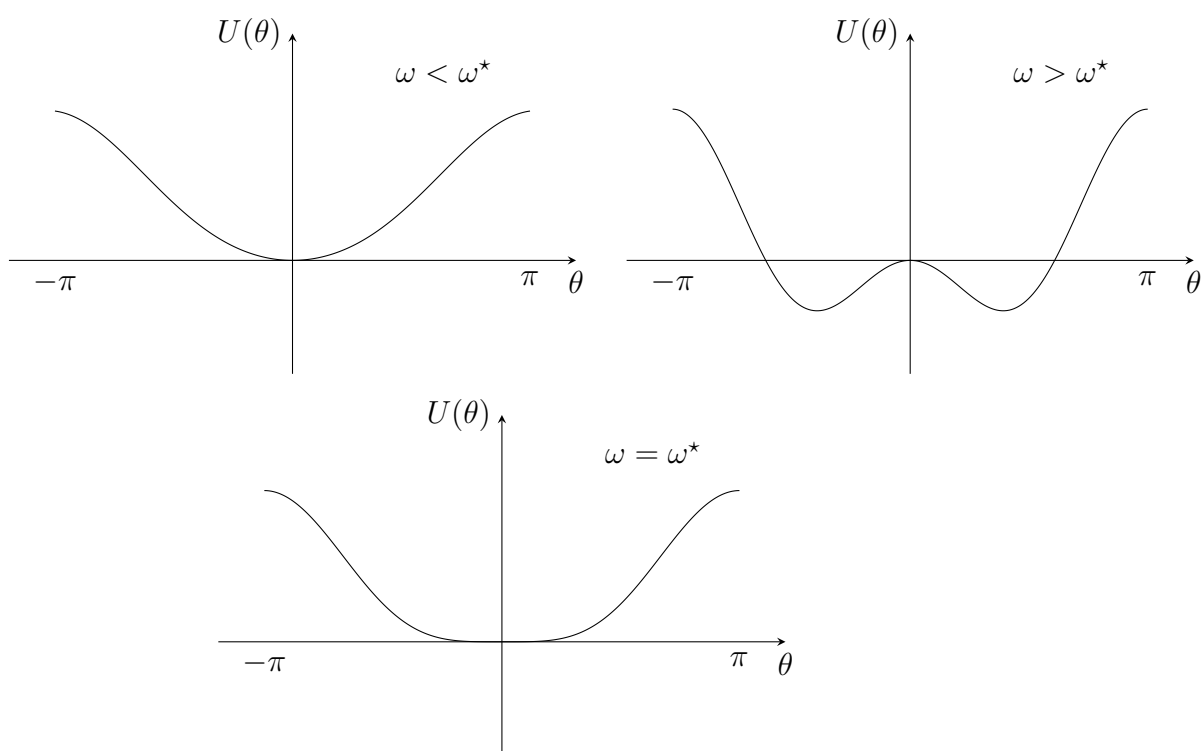


Figura 15: energia potenziale della pallina al variare di ω , a meno di una costante additiva.

Inoltre, il termine

$$\frac{1}{\sqrt{2m(E - V_0) - L^2/r^2}}$$

calcolato sull'orbita imperturbata è l'inverso dell'impulso in direzione radiale, ossia

$$\frac{1}{m\dot{r}} = \frac{1}{\sqrt{2m(E - V_0) - L^2/r^2}}$$

Otteniamo così

$$\Delta\phi = 4m \frac{\partial}{\partial L} \int_0^\pi \frac{\alpha}{m\dot{r}} \frac{\varepsilon \sin \theta}{r_0} d\theta$$

Gli estremi di integrazione sono stati scelti ricondando che stiamo integrando sull'orbita imperturbata. Calcoliamo $\dot{r}$: è

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{\varepsilon \sin \theta}{r_0} r^2 \frac{L}{mr^2}$$

dove si è usata la definizione $L = mr^2\dot{\theta}$. Si ottiene infine

$$\Delta\phi = 4m \frac{\partial}{\partial L} \int_0^\pi \frac{\alpha}{L} d\theta = -\frac{4\pi m\alpha}{L^2}$$

Si noti che in tutta la discussione abbiamo solamente utilizzato la dipendenza $\delta V \propto r^{-2}$ e il fatto che V_0 ammette un'orbita ellittica. Di conseguenza anche per un potenziale armonico, che ammette *solamente* orbite di questo tipo, abbiamo gli stessi risultati.

Si provi anche a risolvere l'equazione di Binet per u nel caso di potenziale gravitazionale.

5 IPhO 1999/3: una sonda spaziale verso Giove

1. Assumendo l'orbita circolare, uguagliando l'accelerazione radiale $\frac{V^2}{R}$ a quella data dal campo gravitazionale $\frac{GM_S}{R}$ (dove con M_S si intende la massa del Sole) si ottiene la velocità orbitale di Giove:

$$V = \sqrt{\frac{GM_S}{R}} \approx 1.306 \times 10^4 \text{ m/s}$$

2. Le due forze gravitazionali sono uguali sulla sonda quando:

$$\frac{GMm}{\rho^2} = \frac{GM_S m}{(R - \rho)^2}$$

(dove ρ è la distanza della sonda da Giove ed M è la massa di Giove), dunque

$$\sqrt{M}(R - \rho) = \rho\sqrt{M_S}$$

e quindi:

$$\rho = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{M} + \sqrt{M_S}} R = 0.02997R = 2.333 \times 10^{10} \text{ m}$$

quindi le due attrazioni gravitazionali si eguagliano a una distanza di circa 23.3 milioni di chilometri da Giove (circa 334 volte il raggio del pianeta).

3. Con una semplice trasformazione galileiana troviamo che

$$\begin{cases} v'_x = V \\ v'_y = v_0 \end{cases}$$

e dunque, nel sistema di riferimento di Giove, la sonda si muove con un angolo $\theta_0 = \arctan \frac{v_0}{V}$ rispetto all'asse x , e la sua velocità è $v' = \sqrt{v_0^2 + V^2}$. Usando i valori numerici forniti otteniamo $\theta_0 = 0.653 \text{ rad} = 37.4^\circ$ e $v' = 1.65 \times 10^4 \text{ m/s}$.

4. Dato che la traiettoria della sonda può essere descritta solo approssimativamente come il risultato dell'interazione gravitazionale di due corpi (bisognerebbe considerare anche l'interazione con il Sole e gli altri pianeti) assumeremo una distanza da Giove grande, ma non infinita, e approssimiamo tutta l'energia della sonda nel sistema di riferimento di Giove con l'energia cinetica a tale distanza:

$$E \approx \frac{1}{2}mv'^2$$

Il corrispondente valore numerico è $E = 112 \text{ GJ}$.

5. L'equazione 14 mostra che la distanza radiale diventa infinita, e quindi il suo reciproco va a zero, quando

$$1 + \sqrt{1 + \frac{2Ev'^2b^2}{G^2M^2m}} \cos \theta = 0$$

quindi quando:

$$\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2Ev'^2b^2}{G^2M^2m}}}$$

Bisognerebbe anche osservare che la distanza radiale non può essere negativa, quindi i valori accettabili sono quelli che soddisfano la disequazione:

$$1 + \sqrt{1 + \frac{2Ev'^2b^2}{G^2M^2m}} \cos \theta \geq 0$$

ossia

$$\cos \theta \geq -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2Ev'^2b^2}{G^2M^2m}}} \quad (16)$$

I casi limite della disequazione 16 (ossia quando vale l'uguaglianza) sono:

$$\theta_{\pm} = \pm \arccos \left[-\left(1 + \frac{2Ev'^2b^2}{G^2M^2m}\right)^{-\frac{1}{2}} \right] = \pm \left(\pi - \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2Ev'^2b^2}{G^2M^2m}}} \right)$$

e dunque l'angolo $\Delta\theta$ tra i due asintoti dell'iperbole vale:

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= (\theta_+ - \theta_-) - \pi \\ &= \pi - 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2Ev'^2b^2}{G^2M^2m}}} \\ &= \pi - 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v'^4b^2}{G^2M^2}}} \end{aligned}$$

dove, per l'ultima uguaglianza, si è sostituito il valore dell'energia cinetica con quello stimato al punto precedente.

6. La deviazione angolare è una funzione monotona decrescente del parametro d'impatto, dunque la deviazione ha un massimo quando la deviazione angolare ha un minimo. Dalla discussione nel punto precedente osserviamo facilmente che la minima distanza da Giove si ha quando $\theta = 0$ e in questo caso la minima distanza tra Giove e la sonda si ottiene facilmente dall'equazione 14 come:

$$r_{\min} = \frac{v'b^2}{GM} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{v'^4b^2}{G^2M^2}} \right)^{-1} \quad (17)$$

Invertendo la 17:

$$b = \sqrt{r_{\min}^2 + \frac{2GM}{v'^2} r_{\min}}$$

Si può notare che possiamo giungere al medesimo risultato considerando che, grazie alla conservazione del momento angolare abbiamo che:

$$L = mv'b = mv'_{\min} r_{\min}$$

dove abbiamo introdotto la velocità orbitale nel punto di minima distanza. Inoltre la conservazione dell'energia fornisce:

$$E = \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}mv'^2_{\min} - \frac{GMm}{r_{\min}}$$

e combinando queste due otteniamo nuovamente $b = \sqrt{r_{\min}^2 + \frac{2GM}{v'^2} r_{\min}}$. Il parametro d'impatto è una funzione crescente della minima distanza raggiunta $r_{\min}$ e quindi, se la sonda non può avvicinarsi alla superficie di Giove più di due volte il suo raggio (e quindi $r_{\min} = 3R_B$ dove R_B è il raggio del pianeta Giove) il minimo valore possibile per il parametro d'impatto è:

$$b_{\min} = \sqrt{9R_B^2 + \frac{6GM}{v'^2} R_B}$$

Da questa equazione otteniamo infine la massima deviazione angolare:

$$\Delta\theta_{\max} = \pi - 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v'^4 b_{\min}^2}{G^2 M^2}}} = \pi - 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v'^4}{G^2 M^2} \left(9R_B^2 + \frac{6GM}{v'^2} R_B \right)}}$$

Utilizzando i valori numerici prima ottenuti abbiamo $b_{\min} = 4.90 \times 10^8 \text{ m} \approx 7.0R_B$ e $\Delta\theta_{\max} = 1.526 \text{ rad} = 87.4^\circ$.

7. La direzione finale del moto rispetto all'asse x nel sistema di riferimento di Giove è data dall'angolo iniziale più la deviazione angolare, dunque $\theta_0 + \Delta\theta$ nel caso in cui la sonda passi dietro al pianeta. Le componenti della velocità finale nel sistema di riferimento di Giove sono dunque:

$$\begin{cases} v'_x = v' \cos(\theta_0 + \Delta\theta) \\ v'_y = v' \sin(\theta_0 + \Delta\theta) \end{cases}$$

mentre nel sistema di riferimento del Sole sono:

$$\begin{cases} v''_x = v' \cos(\theta_0 + \Delta\theta) - V \\ v''_y = v' \sin(\theta_0 + \Delta\theta) \end{cases}$$

La velocità finale della sonda è quindi:

$$\begin{aligned}
v'' &= \sqrt{(v' \cos(\theta_0 + \Delta\theta) - V)^2 + (v' \sin(\theta_0 + \Delta\theta))^2} = \\
&= \sqrt{v_0^2 + 2V^2 - 2Vv' \cos(\theta_0 + \Delta\theta)} = \\
&= \sqrt{v_0^2 + 2V^2 - 2Vv'(\cos(\theta_0) \cos(\Delta\theta) - \sin(\theta_0) \sin(\Delta\theta))} = \\
&= \sqrt{v_0^2 + 2V^2 - 2V(V \cos(\Delta\theta) - v_0 \sin(\Delta\theta))} = \\
&= \sqrt{v_0(v_0 + 2V \sin \Delta\theta) + 2V^2(1 - \cos \Delta\theta)}
\end{aligned}$$

8. Usando il valore massimo per la deviazione angolare il risultato numerico è $v'' = 2.62 \times 10^4 \text{ m/s}$.

6 IPhO 2011/1: problema dei tre corpi

1. Il secondo principio della dinamica applicato a M dà

$$\frac{GMm}{(R+r)^2} = M\Omega^2 R$$

da cui

$$\Omega^2 = \frac{Gm}{R(R+r)^2}$$

Si ottiene lo stesso risultato applicando il secondo principio a m e ricordando che la posizione del centro di massa è identificata da $MR = mr$. In termini di massa ridotta $\tilde{m} = (Mm)/(M+m)$ e massa totale $M_T = M+m$ si può anche scrivere, in maniera più simmetrica,

$$\Omega^4 = \frac{G^2 \tilde{m} M_T}{(R+r)^2 Rr}$$

2. Siano $\vec{R}$, $\vec{r}$ e $\vec{\rho}$ rispettivamente le posizioni di M , m e μ rispetto al centro di massa. La forza agente su μ è

$$\frac{\vec{F}}{G\mu} = M \frac{\vec{R} - \vec{\rho}}{|\vec{R} - \vec{\rho}|^3} + m \frac{\vec{r} - \vec{\rho}}{|\vec{r} - \vec{\rho}|^3}$$

Usando la definizione di centro di massa e trascurando μ

$$M\vec{R} + m\vec{r} = 0$$

e dunque

$$\frac{\vec{F}}{G\mu} = M\vec{R}\left(\frac{1}{|\vec{R}-\vec{\rho}|^3} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{\rho}|^3}\right) - \vec{\rho}\left(\frac{M}{|\vec{R}-\vec{\rho}|^3} + \frac{m}{|\vec{r}-\vec{\rho}|^3}\right)$$

Se μ è stazionaria, allora $\vec{F}$ deve essere parallela a $\vec{\rho}$. Si deduce allora che la prima parentesi a secondo membro deve essere nulla, altrimenti $\vec{R}$ sarebbe parallelo a $\vec{\rho}$, mentre stiamo assumendo che μ non sia collineare con M ed m . Da questo si deduce $|\vec{R}-\vec{\rho}| = |\vec{r}-\vec{\rho}|$, e dunque μ si trova sull'asse della congiungente tra M ed m . Imponendo inoltre che sia

$$\vec{F} = -\Omega^2\mu\vec{\rho}$$

si ottiene

$$\frac{\Omega^2}{G} = \frac{M+m}{|\vec{R}-\vec{\rho}|^3}$$

e infine

$$|\vec{R}-\vec{\rho}| = |\vec{r}-\vec{\rho}|$$

Quindi il triangolo formato dai tre corpi è equilatero e ha lato $R+r$. Infine, per trovare la distanza di μ dal centro di massa (ossia $|\vec{\rho}|$), sia θ l'angolo tra $\vec{R}$ e $\vec{\rho}$. Dato che nella nostra approssimazione $\vec{R}$ e $\vec{r}$ sono antiparalleli, è

$$\frac{\vec{R} \cdot \vec{\rho}}{R} = -\frac{\vec{r} \cdot \vec{\rho}}{r} = \rho \cos \theta$$

D'altro canto è

$$\begin{aligned} \frac{(R+r)^2}{R} &= \frac{|\vec{R}-\vec{\rho}|^2}{R} = R + \frac{|\vec{\rho}|^2}{R} - 2\frac{\vec{R} \cdot \vec{\rho}}{R} \\ \frac{(R+r)^2}{r} &= \frac{|\vec{r}-\vec{\rho}|^2}{r} = r + \frac{|\vec{\rho}|^2}{r} - 2\frac{\vec{r} \cdot \vec{\rho}}{r} \end{aligned}$$

e sommando membro a membro si ottiene

$$(R+r)^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right) = R+r + |\vec{\rho}|^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right)$$

da cui

$$|\vec{\rho}|^2 = R^2 + r^2 + Rr$$

3. Il punto di equilibrio trovato è L_4 , che è instabile se $M = m$. Il sistema dunque non è legato e in seguito alla perturbazione μ si allontana dalla posizione di equilibrio.

4. L'ipotesi non è ragionevole, infatti la perturbazione radiale non modifica il momento angolare *totale* del sistema. Ci possono comunque essere (e di fatto ci sono) scambi di momento angolare tra i vari corpi, che rendono l'analisi del problema ben più complicata di quella scritta nella soluzione ufficiale.

7 IPhO 2011/1: problema dei tre corpi

1. Il secondo principio della dinamica applicato a M dà

$$\frac{GMm}{(R+r)^2} = M\Omega^2 R$$

da cui

$$\Omega^2 = \frac{Gm}{R(R+r)^2}$$

Si ottiene lo stesso risultato applicando il secondo principio a m e ricordando che la posizione del centro di massa è identificata da $MR = mr$. In termini di massa ridotta $\tilde{m} = (Mm)/(M+m)$ e massa totale $M_T = M+m$ si può anche scrivere, in maniera più simmetrica,

$$\Omega^4 = \frac{G^2 \tilde{m} M_T}{(R+r)^2 Rr}$$

2. Siano $\vec{R}$, $\vec{r}$ e $\vec{\rho}$ rispettivamente le posizioni di M , m e μ rispetto al centro di massa. La forza agente su μ è

$$\frac{\vec{F}}{G\mu} = M \frac{\vec{R} - \vec{\rho}}{|\vec{R} - \vec{\rho}|^3} + m \frac{\vec{r} - \vec{\rho}}{|\vec{r} - \vec{\rho}|^3}$$

Usando la definizione di centro di massa e trascurando μ

$$M\vec{R} + m\vec{r} = 0$$

e dunque

$$\frac{\vec{F}}{G\mu} = M\vec{R} \left(\frac{1}{|\vec{R} - \vec{\rho}|^3} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{\rho}|^3} \right) - \vec{\rho} \left(\frac{M}{|\vec{R} - \vec{\rho}|^3} + \frac{m}{|\vec{r} - \vec{\rho}|^3} \right)$$

Se μ è stazionaria, allora $\vec{F}$ deve essere parallela a $\vec{\rho}$. Si deduce allora che la prima parentesi a secondo membro deve essere nulla, altrimenti $\vec{R}$ sarebbe parallelo a $\vec{\rho}$, mentre stiamo assumendo che μ non sia collineare

con M ed m . Da questo si deduce $|\vec{R} - \vec{\rho}| = |\vec{r} - \vec{\rho}|$, e dunque μ si trova sull'asse della congiungente tra M ed m . Imponendo inoltre che sia

$$\vec{F} = -\Omega^2 \mu \vec{\rho}$$

si ottiene

$$\frac{\Omega^2}{G} = \frac{M + m}{|\vec{R} - \vec{\rho}|^3}$$

e infine

$$|\vec{R} - \vec{\rho}| = |\vec{r} - \vec{\rho}|$$

Quindi il triangolo formato dai tre corpi è equilatero e ha lato $R + r$. Infine, per trovare la distanza di μ dal centro di massa (ossia $|\vec{\rho}|$), sia θ l'angolo tra $\vec{R}$ e $\vec{\rho}$. Dato che nella nostra approssimazione $\vec{R}$ e $\vec{r}$ sono antiparalleli, è

$$\frac{\vec{R} \cdot \vec{\rho}}{R} = -\frac{\vec{r} \cdot \vec{\rho}}{r} = \rho \cos \theta$$

D'altro canto è

$$\begin{aligned} \frac{(R + r)^2}{R} &= \frac{|\vec{R} - \vec{\rho}|^2}{R} = R + \frac{|\vec{\rho}|^2}{R} - 2\frac{\vec{R} \cdot \vec{\rho}}{R} \\ \frac{(R + r)^2}{r} &= \frac{|\vec{r} - \vec{\rho}|^2}{r} = r + \frac{|\vec{\rho}|^2}{r} - 2\frac{\vec{r} \cdot \vec{\rho}}{r} \end{aligned}$$

e sommando membro a membro si ottiene

$$(R + r)^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right) = R + r + |\vec{\rho}|^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right)$$

da cui

$$|\vec{\rho}|^2 = R^2 + r^2 + Rr$$

3. Il punto di equilibrio trovato è L_4 , che è instabile se $M = m$. Il sistema dunque non è legato e in seguito alla perturbazione μ si allontana dalla posizione di equilibrio.
4. L'ipotesi non è ragionevole, infatti la perturbazione radiale non modifica il momento angolare *totale* del sistema. Ci possono comunque essere (e di fatto ci sono) scambi di momento angolare tra i vari corpi, che rendono l'analisi del problema ben più complicata di quella scritta nella soluzione ufficiale.

8 preIPhO 2011: nube di gas

1. La configurazione è stabile se e solo se ogni particella percorre un'orbita circolare. Deve dunque valere $rv_0^2 = GM(r)$, dove M è la massa contenuta all'interno dell'orbita,

$$M(r) = \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr'$$

Derivando rispetto a r (e usando il teorema fondamentale del calcolo integrale), si ottiene

$$v_0^2 = G \frac{dM}{dr} \implies v_0^2 = 4\pi G r^2 \rho(r)$$

da cui si ricava facilmente $\rho(r) = v_0^2 / (4\pi G r^2)$.

2. La relazione usata al punto precedente stavolta diventa $rv_1(r)^2 = GM(r)$, dove $M(r) = \frac{4}{3}\pi\rho_0 r_0^3$. Quindi

$$v_1(r) = \sqrt{\frac{4\pi G \rho_0}{3}} r$$

3. Sotto l'ipotesi di *no shell-crossing*, l'orbita di ogni particella è, grazie al teorema di Gauss e alla simmetria sferica, identica a quella che si avrebbe attorno ad un corpo di massa $M = \frac{4}{3}\pi\rho_0 r_0^3$. Uguagliando i valori di potenziale efficace all'afelio e al perielio, dove la velocità radiale è nulla, si ha

$$\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} = \frac{L^2}{2mr_0^2} - \frac{GMm}{r_0}$$

Essendo $L = mr_0\alpha v_1$, possiamo sostituire le espressioni esplicite di L e M e semplificare l'equazione in

$$\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - \frac{2}{\alpha^2} \frac{r_0}{r} + \frac{2}{\alpha^2} - 1 = 0$$

Le soluzioni di questa equazione sono i valori di r corrispondenti ad afelio e perielio. Il primo sappiamo già che vale r_0 (che verifica banalmente l'equazione), quindi possiamo sfruttare la formula di Viète per il prodotto delle radici di un'equazione di secondo grado per ottenere rapidamente l'altra soluzione:

$$\frac{1}{r_0} \frac{1}{r_1} = \frac{2}{\alpha^2} - 1 \implies r_1 = \frac{\alpha^2}{2 - \alpha^2} r_0$$

4. Dalla terza legge di Keplero,

$$\omega^2 = \frac{GM}{\left(\frac{r_0+r_1}{2}\right)^3}$$

Sostituendo le espressioni esplicite di M e r_1 , si ottiene

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho_0}}(2 - \alpha^2)^{-3/2}$$

Il moto della nube è periodico perché T è indipendente da r_0 , quindi ogni particella ha lo stesso periodo.

5. L'equazione

$$\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - \frac{2}{\alpha^2} \frac{r_0}{r} + \frac{2}{\alpha^2} - 1 = 0$$

ricavata in precedenza dipende solo dal rapporto r_0/r , quindi l'evoluzione di questa quantità è identica per ogni particella. Se all'inizio una particella ha r_0 maggiore rispetto ad un'altra, allora avrà anche r maggiore ad ogni istante successivo. Questa è esattamente l'ipotesi di *no shell-crossing*.

6. Dal teorema del viriale, $2\langle T \rangle + \langle U \rangle = 0$, quindi

$$\langle T \rangle = -E = \frac{GMm}{2\frac{r_0+r_1}{2}} = \frac{2\pi}{3}G\rho_0 r_0^2 m(2 - \alpha^2)$$

dove $E = T + U$ è l'energia totale per una particella in orbita intorno a un corpo di massa M . Si è qui usata la formula $E = -\frac{GMm}{2a}$, dove a è il semiasse maggiore. Vedere il secondo punto della soluzione del problema "Satellite con attrito" per una dimostrazione. Si noti che E non è l'energia totale di una particella della nube, per via della presenza degli strati più esterni, nonostante essi non ne influenzino il moto.

9 Satellite con attrito

1. A ha le dimensioni di una massa per unità di tempo.
2. La distanza tra un fuoco di una ellisse e il centro è per definizione ae , quindi le coordinate radiali di afelio e perielio valgono rispettivamente $r_{\max} = a(1 + e)$ e $r_{\min} = a(1 - e)$, quindi $r_{\max}r_{\min} = a^2(1 - e^2)$.

$r_{\max}$ e $r_{\min}$ soddisfano l'equazione (potenziale efficace con velocità radiale nulla)

$$\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} = E \implies \frac{1}{r^2} - \frac{2GMm^2}{L^2} \frac{1}{r} - \frac{2mE}{L^2} = 0$$

Usando le formule di Viète per la somma e il prodotto delle radici, si trova

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_{\max}} + \frac{1}{r_{\min}} &= \frac{2GMm^2}{L^2} \implies a(1 - e^2) = \frac{L^2}{GMm^2} \\ \frac{1}{r_{\max}} \frac{1}{r_{\min}} &= -\frac{2mE}{L^2} \implies E = -\frac{GMm}{2a} \end{aligned}$$

La prima relazione ci dice che per rispondere alla domanda bisogna capire come varia il momento angolare. Questo è facile, infatti

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_a = -A\vec{r} \times \vec{v} = -\frac{A}{m}\vec{L}$$

da cui $\vec{L} = \vec{L}(0)e^{-(A/m)t}$ e quindi

$$a(1 - e^2) = r_0 e^{-2(A/m)t}$$

3. Combinando le formule ricavate nel punto precedente, si ottiene

$$1 - e^2 = \frac{L^2}{GMm^2 a} = -\frac{2EL^2}{G^2 M^2 m^3}$$

Per calcolarne la derivata, serve sapere $\frac{dE}{dt}$. Anche questa è facile, infatti

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F}_a \cdot \vec{v} = -Av^2$$

Allora,

$$\begin{aligned} \frac{d(1 - e^2)}{dt} &= -\frac{2}{G^2 M^2 m^3} \left(\frac{dE}{dt} L^2 + 2EL \frac{dL}{dt} \right) = \\ &= \frac{4AL^2}{G^2 M^2 m^4} \left(E + \frac{1}{2}mv^2 \right) = \\ &= \frac{4A}{GMm^2} a(1 - e^2) \left(E + \frac{1}{2}mv^2 \right) \end{aligned}$$

Il satellite si trova inizialmente su un'orbita circolare, quindi all'istante iniziale $E + \frac{1}{2}mv^2 = 0$ (segue dalla condizione di orbita circolare o anche dal teorema del viriale se tutte le energie sono costanti nel tempo) e si ha la tesi.

4. Sviluppando al prim'ordine l'equazione per $a(1-e^2)$ e usando il risultato appena dimostrato,

$$a(t) \approx r_0 \left(1 - 2 \frac{A}{m} t \right)$$

valida finché $2 \frac{A}{m} t \ll 1$.

5. Imponiamo $v = \sqrt{GM/a}$ in ogni istante. Stavolta,

$$\frac{dL}{dt} = -Av^{n+1}a$$

e imponendo la condizione di orbita circolare si ottiene

$$\begin{aligned} m \frac{d}{dt}(\sqrt{GMa}) &= -A \left(\frac{GM}{a} \right)^{\frac{n+1}{2}} a \\ a^{\frac{n}{2}-1} \frac{da}{dt} &= -\frac{2A}{m} (GM)^{n/2} \\ \frac{2}{n} \left(a(t)^{n/2} - r_0^{n/2} \right) &= -\frac{2A}{m} (GM)^{n/2} t \\ a(t) &= r_0 \left(1 - \frac{nA}{m} \left(\frac{GM}{r_0} \right)^{n/2} t \right)^{2/n} \end{aligned}$$

La quantità in parentesi può annullarsi ad un tempo finito solo se $n > 0$. In questo caso, l'esponente $2/n$ è positivo e garantisce che anche a sia nullo. Il tempo richiesto per raggiungere $a = 0$ è

$$t = \frac{m}{nA} \left(\frac{r_0}{GM} \right)^{n/2} = \frac{m}{nAv_0^n}$$

Per $n \leq 0$, invece, si ha semplicemente che $\lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) = 0$.

Si noti che la soluzione per n generico non è ben definita per $n = 0$. Per recuperare il caso $\vec{F}_a = -A\vec{v}$ da quella formula, bisogna far uso del seguente limite noto:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

6. Possiamo generalizzare la formula per la derivata temporale di $(1-e^2)$ trovata precedentemente utilizzando $\frac{dL}{dt} = -\frac{A}{m}Lv^n$ e $\frac{dE}{dt} = -Av^{n+2}$:

$$\frac{d(1-e^2)}{dt} = \frac{4Av^n}{GMm^2} a(1-e^2) \left(E + \frac{1}{2}mv^2 \right)$$

La condizione più naturale di “forza di attrito piccola” è che il tempo di rallentamento sia molto minore del periodo dell’orbita:

$$\frac{m}{nAv^n} \gg 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{GM}}$$

Usando $v = \sqrt{GM/a}$, questa condizione è uguale (a meno di un fattore $2\pi n$) a $F_a \ll \frac{GMm}{a^2}$. Possiamo quindi applicare in modo approssimato il teorema del viriale per concludere che la quantità $E + \frac{1}{2}mv^2$ si media a zero, quindi i contributi che diminuiscono $1 - e^2$ si cancellano, approssimativamente, con quelli che lo aumentano.

10 Potenziale efficace di un buco nero

1. Quando $r \rightarrow +\infty$, $U(r)$ tende a 0 (dal basso), mentre il termine $(\dot{r}/c)^2/(1 - r_S/r)^3$ è positivo, quindi dev’essere $\zeta \geq 0$.
2. Trascurando ogni termine del tipo r_S/r , si ottiene

$$\zeta = \left(\frac{1}{c} \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{(r^2 \dot{\phi}/c)^2}{r^2} - \frac{2GM}{c^2 r}$$

da cui, moltiplicando tutto per $\frac{1}{2}mc^2$,

$$E = \frac{1}{2}m\zeta^2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

dove $L = mr^2\dot{\phi}$ è l’usuale momento angolare. La formula ottenuta non è nient’altro che la conservazione dell’energia totale (pari a $\frac{1}{2}m\zeta^2$), scritta col potenziale efficace.

3. Per i fotoni, $\zeta = 1$. Se $l = 0$ (traiettoria radiale), allora

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \left(1 + \frac{r_S}{r - r_S} \right) \left(1 - \frac{r_S}{r} \right)^3 = \left(1 - \frac{r_S}{r} \right)^2$$

cioè la velocità (completamente radiale) dipende da r . Se invece $\dot{r} = 0$ (velocità solo tangenziale), allora

$$\frac{1}{c^2} \left(r \frac{d\phi}{dt} \right)^2 = 1 - \frac{r_S}{r}$$

Non solo la velocità dipende da r anche in questo caso, ma è addirittura diversa dal caso precedente.

Questi sono effetti di Relatività Generale e possono essere spiegati come segue.

- La velocità della luce non è c perché il sistema di riferimento che stiamo usando non è inerziale (il che in Relatività Generale vuol dire in realtà che la curvatura dello spazio non è nulla, o, in altre parole, che non lo è il campo gravitazionale). I postulati della Relatività Speciale valgono infatti solo per questi particolari sistemi di riferimento.
 - La velocità è diversa nei due casi perché la gravità del buco nero dilata lo spazio radialmente. Quindi un fotone con velocità radiale che va da r a $r + dr$ deve percorrere in realtà uno spazio maggiore di un fotone con velocità tangenziale che va da ϕ a $\phi + dr/r$, perciò la sua velocità risulta minore.
 - Se anche tenessimo in conto la dilatazione dello spazio, i fotoni avrebbero comunque una velocità minore di c a causa del fatto che la gravità del buco nero dilata i tempi.
4. L'equazione data è molto simile ad una usuale conservazione dell'energia con un potenziale efficace, a parte il termine correttivo all'energia cinetica. Le orbite circolari possono essere trovate seguendo la stessa strategia classica, cioè cercando i massimi (orbite circolari instabili) e i minimi (orbite circolari stabili) di $U(r)$. Per convincersene basta derivare l'equazione data,

$$0 = \frac{-3(r_S/r)\frac{dr}{dt}}{(1 - r_S/r)^4} \left(\frac{1}{c} \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{2}{(1 - r_S/r)^3} \frac{1}{c^2} \frac{dr}{dt} \frac{d^2r}{dt^2} + \frac{dU}{dr} \frac{dr}{dt}$$

semplificare i fattori comuni $\frac{dr}{dt}$ e porre $\frac{dr}{dt} = 0$, in modo da trovare l'accelerazione subita da un oggetto posizionato fermo:

$$\frac{2}{(1 - r_S/r)^3} \frac{1}{c^2} \frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{dU}{dr}$$

che, a meno di correzioni numeriche, è uguale alla formula classica per la determinazione dell'equilibrio e della stabilità.

La funzione $U(r)$ ha i seguenti limiti:

$$\lim_{r \rightarrow r_S^+} U(r) = -\infty, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} U(r) = 0^-$$

Nella zona intermedia possono verificarsi due situazioni: $U(r)$ è monotona, oppure $U(r)$ ha un massimo e un minimo locali, il primo più interno del secondo, corrispondenti alle due orbite circolari permesse, rispettivamente instabile e stabile. La transizione tra le due situazioni

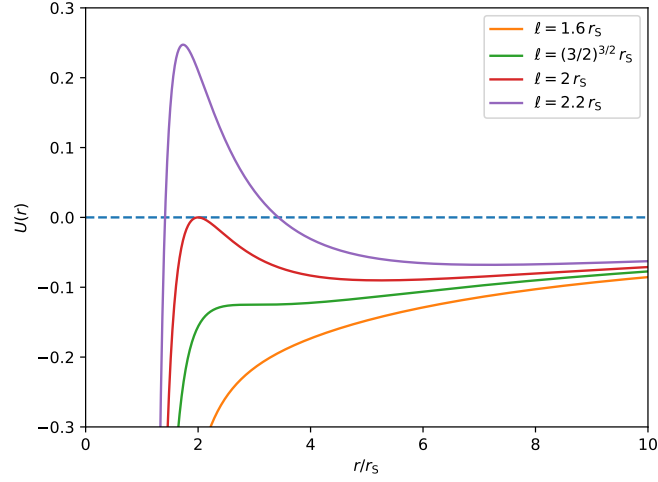


Figura 16: grafico della funzione $U(r)$ al variare di ℓ .

corrisponde ad un certo valore di ℓ , che chiameremo ℓ_* , per il quale $U(r)$ presenta un flesso a tangente orizzontale. Il valore r_* in cui si trova questo flesso indica il limite inferiore al raggio delle orbite circolari stabili. Si veda la Figura 16.

Calcoliamo adesso ℓ_* e r_* . Bisogna imporre $U'(r_*) = U''(r_*) = 0$.

$$\begin{aligned}
 U(r) &= \frac{\ell^2}{r^2} - \frac{r_S}{r - r_S} \\
 U'(r) &= -2\frac{\ell^2}{r^3} + \frac{r_S}{(r - r_S)^2} \implies 2\frac{\ell_*^2}{r_*^3} = \frac{r_S}{(r_* - r_S)^2} \\
 U''(r) &= 6\frac{\ell^2}{r^4} - 2\frac{r_S}{(r - r_S)^3} \implies 6\frac{\ell_*^2}{r_*^4} = 2\frac{r_S}{(r_* - r_S)^3}
 \end{aligned}$$

Prendendo il rapporto tra le due equazioni, si ottiene

$$\frac{r_*}{3} = \frac{r_* - r_S}{2} \implies r_* = 3r_S, \quad \ell_* = (3/2)^{3/2} r_S$$

5. Dato che per i fotoni $\zeta = 1$, affinché ci sia un punto di inversione del moto che permetta al fotone di tornare all'infinito, bisogna che il massimo di $U(r)$ sia maggiore di 1. La transizione tra le due situazioni avviene per un certo valore di ℓ , diciamo ℓ_γ , per il quale il massimo di

$U(r)$ è posizionato in r_γ e vale 1. Calcoliamo ℓ_γ e r_γ .

$$U(r_\gamma) = 1 \implies \frac{\ell_\gamma^2}{r_\gamma^2} = \frac{r_S}{r_\gamma - r_S} + 1 = \frac{r_\gamma}{r_\gamma - r_S}$$

$$U'(r_\gamma) = 0 \implies 2\frac{\ell_\gamma^2}{r_\gamma^3} = \frac{r_S}{(r_\gamma - r_S)^2}$$

Prendendo il rapporto tra le due equazioni, si trova

$$\frac{r_\gamma}{2} = \frac{(r_\gamma - r_S)r_\gamma}{r_S} \implies r_\gamma = \frac{3}{2}r_S, \quad \ell_\gamma = \frac{3}{2}\sqrt{3}r_S$$

Per $\ell < \ell_\gamma$ il fotone finisce nel buco nero; ogni fotone che torna all'infinito ha sempre $r > r_\gamma$.

6. r_γ è anche il raggio dell'unica orbita circolare permessa ai fotoni, perché è l'unico valore di r in cui $U(r)$ ha un punto stazionario in cui vale 1.
7. L'angolo tra la congiungente osservatore-buco nero e la direzione dei fotoni che, dopo essere passati nei dintorni del buco nero, giungono all'osservatore, non può essere troppo piccolo, perché ℓ è limitato inferiormente da ℓ_γ . Indicando tale (comunque piccolo) angolo con α , e usando $\sin \alpha \approx \alpha$, si trova, per i fotoni più interni,

$$\ell = \frac{R}{c}\alpha c = \alpha R = \ell_\gamma \implies \alpha = \frac{3}{2}\sqrt{3}\frac{r_S}{R}$$

quindi il raggio apparente è $\frac{3}{2}\sqrt{3}r_S$.

8. Usando il limite newtoniano calcolato in precedenza, "fermo all'infinito" vuol dire energia totale nulla, quindi $\zeta = 0$. Dobbiamo quindi imporre $U(r_\infty) = U'(r_\infty) = 0$. Procedendo come nei punti precedenti, si trova che il minimo valore di ℓ che consenta di sfuggire è $\ell_\infty = 2r_S$ e che il massimo avvicinamento è $r_\infty = 2r_S$.
9. Nell'approssimazione $r - r_S \ll r_S$, il termine ℓ^2/r^2 è trascurabile rispetto a $\frac{r_S}{r - r_S}$, perché il primo tende a un numero finito e il secondo a infinito. Usando $\zeta = 0$, l'equazione diventa quindi

$$0 = \left(\frac{r_S}{r - r_S}\right)^3 \left(\frac{\dot{r}}{c}\right)^2 - \frac{r_S}{r - r_S}$$

che risolta dà

$$r = r_S + (r_0 - r_S)e^{-ct/r_S}$$

quindi l'oggetto entra nel buco nero solo dopo un tempo infinito.

11 Precessione orbitale e deviazione della luce

1. Usando la chain rule, $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{dt}$, e inserendo la definizione di ℓ , possiamo riscrivere l'Equazione 15 come

$$\zeta = \frac{\ell^2}{r^3(r - r_S)} \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 + U(r)$$

Risolvendola per separazione delle variabili, otteniamo l'orbita $r(\phi)$.

$$\frac{\ell dr}{\sqrt{r^3(r - r_S)(\zeta - U(r))}} = d\phi$$

La precessione $\Delta\phi$ è data da

$$2\pi + \Delta\phi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\ell dr}{\sqrt{r^3(r - r_S)(\zeta - U(r))}}$$

Nel limite $r \gg r_S$, tenendo anche i termini di secondo ordine (che sono la correzione al caso newtoniano),

$$U(r) \approx -\frac{r_S}{r} + \frac{\ell^2 - r_S^2}{r^2}$$

Convieniente allora definire $l^2 = \ell^2 - r_S^2$ e riscrivere tutto in funzione di l , in particolare

$$\ell = \sqrt{l^2 + r_S^2} \approx l \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r_S^2}{l^2} \right)$$

Quindi, approssimando anche la parte dipendente da r sotto la radice,

$$\begin{aligned} 2\pi + \Delta\phi &\approx 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{l dr}{r^2 \sqrt{\zeta - U(r)}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r_S^2}{l^2} \right) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r_S}{r} \right) \approx \\ &\approx 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{l dr}{r^2 \sqrt{\zeta - U(r)}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r_S^2}{l^2} \right) + \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{r_S l dr}{r^3 \sqrt{\zeta - U(r)}} \end{aligned}$$

Adesso cambiamo variabile in modo da completare il quadrato sotto la radice:

$$y = \frac{l}{\sqrt{-\zeta} r} - \frac{r_S}{2\sqrt{-\zeta} l} \implies dy = -\frac{l}{\sqrt{-\zeta} r^2} dr$$

In tal modo,

$$\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{l dr}{r^2 \sqrt{\zeta - U(r)}} = - \int_{\alpha}^{-\alpha} \frac{dy}{\sqrt{\alpha^2 - y^2}} = \left[\arcsin(y/\alpha) \right]_{-\alpha}^{\alpha} = \pi$$

(il valore di α è $\sqrt{1 + \frac{r_S^2}{4\ell^2}}$, ma è irrilevante ai fini del calcolo) e

$$\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{r_S l \, dr}{r^3 \sqrt{\zeta - U(r)}} = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{r_S \, dy}{\sqrt{\alpha^2 - y^2}} \left(\frac{\sqrt{-\zeta} y}{l} + \frac{1}{2} \frac{r_S}{l^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{r_S^2}{l^2} \pi$$

dove si è usato lo stesso integrale di prima e un argomento di simmetria per eliminare il pezzo lineare in y . In conclusione,

$$\Delta\phi = \frac{3}{2} \frac{r_S^2}{l^2} \pi$$

La formula si può esprimere in termini dei parametri orbitali usando le formule ricavate nella soluzione del problema “Satellite con attrito”, in particolare

$$a(1 - e^2) = \frac{L^2}{GMm^2} \approx \frac{c^2 \ell^2}{GM} \approx \frac{c^2 l^2}{GM}$$

(qui basta tenere l'ordine più basso), da cui

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1 - e^2)} = \frac{24\pi^3 a^2}{T^2 c^2 (1 - e^2)}$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata la terza legge di Keplero. inserendo i dati numerici, si trova per Mercurio

$$\Delta\phi/T = 42.98''/\text{secolo}$$

2. L'approccio è simile a prima, ma questa volta

$$\pi + \Delta\phi = 2 \int_{r_{\min}}^{+\infty} \frac{\ell \, dr}{\sqrt{r^3(r - r_S)(1 - U(r))}}$$

Possiamo inoltre usare ℓ al posto di l perché, come evidente dalla soluzione del punto precedente, l'integrale che viene fuori dalla correzione dà sempre un contributo proporzionale a r_S^2 , mentre qui troveremo una correzione di prim'ordine. Operiamo dunque la stessa sostituzione fatta in precedenza ($y = \frac{\ell}{r} - \frac{r_S}{2\ell}$), notando che $\alpha = \sqrt{1 + \frac{r_S^2}{4\ell^2}}$.

$$\begin{aligned} \pi + \Delta\phi &\approx -2 \int_{\alpha}^{-\frac{r_S}{2\ell}} \frac{dy}{\sqrt{\alpha^2 - y^2}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r_S y}{\ell} \right) = \\ &= \left[2 \arccos\left(\frac{y}{\alpha}\right) + \frac{r_S}{\ell} \sqrt{\alpha^2 - y^2} \right]_{\alpha}^{-\frac{r_S}{2\ell}} = \\ &= 2 \arccos\left(-\frac{r_S}{2\ell\alpha}\right) + \frac{r_S}{\ell} \sqrt{\alpha^2 - \frac{r_S^2}{4\ell^2}} \end{aligned}$$

Usando l'espressione di α (e una stima di $r_{\min}$) e sviluppando,

$$\Delta\phi \approx 2 \frac{r_S}{\ell} \approx 2 \frac{r_S}{r_{\min}}$$

Inserendo i valori numerici e sostituendo $r_{\min}$ con R , si ottiene

$$\Delta\phi = 1.751''$$

Per quanto riguarda la predizione classica, prendiamo il risultato della Equazione 11 con $k = GMm$, cioè, essendo $\Delta\phi \sim r_S/r_{\min} \ll 1$,

$$b = \frac{GM}{v_\infty^2} \cot \frac{\Delta\phi}{2} \approx \frac{GM}{v_\infty^2} \frac{2}{\Delta\phi}$$

dove b è il parametro d'impatto. Usando la conservazione del momento angolare, $bv_\infty = r_{\min}v$, dove v è la velocità nel punto di minima distanza dal Sole. Dunque, approssimando all'ordine zero $v \approx v_\infty = c$,

$$\Delta\phi = \frac{2GM}{v_\infty r_{\min} v} \approx \frac{2GM}{c^2 r_{\min}} = \frac{r_S}{r_{\min}}$$

esattamente la metà della predizione relativistica.

12 IPhO 2017/1: materia oscura

1. Siano $\rho(r)$ la densità a distanza r , $\mu(r)$ la massa totale contenuta dentro una sfera di raggio r centrata nel centro dell'ammasso. L'energia gravitazionale è

$$U = - \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) \frac{G\mu(r)}{r} dr$$

Nel nostro caso

$$\rho(r) = \frac{3M}{4\pi R^3}, \quad \mu(r) = M \frac{r^3}{R^3}$$

dunque

$$U = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

2. Sia β_i la componente della velocità dell' i -esima galassia lungo la congiungente con la Terra, in unità di c . Usiamo la convenzione $\beta_i > 0$

se la galassia si sta allontanando dalla Terra. Allora la frequenza f_i è legata alla frequenza naturale f_0 da

$$f_i = f_0 \sqrt{\frac{1 - \beta_i}{1 + \beta_i}} \simeq f_0 (1 - \beta_i)$$

ossia

$$\beta_i \simeq 1 - \frac{f_i}{f_0}$$

La velocità media deve essere diretta per simmetria lungo la congiungente con la Terra, allora è

$$\bar{v} = \frac{c}{N} \sum_{i=1}^N \beta_i = c \left(1 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f_i}{f_0} \right)$$

3. Fissiamo l'asse $\hat{x}$ lungo la congiungente tra la Terra e l'ammasso e poniamo $\vec{v} = \bar{v}\hat{x}$. La velocità quadratica media è allora

$$v_{\text{rms}}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\vec{v}_i - \vec{v}|^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [(v_{i,x} - v_x)^2 + (v_{i,y} - v_y)^2 + (v_{i,z} - v_z)^2]$$

dove $\vec{v}_i$ è la velocità dell' i -esima galassia. L'isotropia ci assicura che la media di $\vec{v}_i - \vec{v}$ lungo una qualche direzione non dipende dalla direzione stessa, dunque

$$v_{\text{rms}}^2 = \frac{3}{N} \sum_{i=1}^N (v_{i,x} - v_x)^2$$

e ora possiamo usare le relazioni trovate al punto precedente, dato che $v_{i,x} = c\beta_i$ e $v_x = \bar{v}$. Si trova

$$\begin{aligned} v_{\text{rms}} &= \sqrt{\frac{3c^2}{N} \sum_{i=1}^N \left(1 - \frac{f_i}{f_0}\right)^2 - 3 \left[\frac{c}{N} \sum_{i=1}^N \left(1 - \frac{f_i}{f_0}\right) \right]^2} = \\ &= \frac{c\sqrt{3}}{Nf_0} \sqrt{N \sum_{i=1}^N f_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N f_i \right)^2} \end{aligned}$$

L'energia cinetica media dell' i -esima galassia è semplicemente

$$K_i = \frac{1}{2} m v_{\text{rms}}^2$$

4. Per il teorema del viriale

$$\frac{M}{2} v_{\text{rms}}^2 \sum_{i=1}^N K_i = -\frac{1}{2} \langle U \rangle = \frac{3}{10} \frac{GM^2}{R}$$

e dunque

$$M = \frac{5}{3} \frac{R v_{\text{rms}}^2}{G}$$

La massa totale della materia oscura si ottiene sottraendo da M la massa visibile del sistema

$$M_{\text{dm}} = \frac{5}{3} \frac{R v_{\text{rms}}^2}{G} - N m_g$$

5. Per $r \leq R_g$ la forza gravitazionale agente sulla stella è

$$F_g = \frac{G m_s}{r^2} \frac{4\pi}{3} r^3 n m_s$$

e deve essere uguale alla forza centripeta

$$F_c = \frac{m_s v^2(r)}{r}$$

Si trova così

$$v(r) = r \sqrt{\frac{4\pi G n m_s}{3}}$$

Il calcolo per $r \geq R_g$ è analogo, ma questa volta la forza gravitazionale agente sulla stella è

$$F_g = \frac{G m_s}{r^2} \frac{4\pi}{3} R_g^3 n m_s$$

e dunque

$$v(r) = \sqrt{\frac{4\pi G n m_s}{3} \frac{R_g^3}{r}}$$

6. Imponendo che un corpo di prova di massa μ a distanza R_g percorra un'orbita circolare a velocità v_0 , si trova

$$\frac{GM\mu}{R_g^2} = \frac{\mu v_0^2}{R_g} \Rightarrow M = \frac{v_0^2 R_g}{G}$$

7. Per $r \leq R_g$, l'andamento lineare di $v(r)$ implica che la densità totale sia uniforme. In particolare è

$$\rho_M = \frac{3M}{4\pi R_g^3}$$

da questa bisogna togliere il contributo della massa visibile, anch'esso uniforme. Allora è

$$\rho_{\text{dm}}(r \leq R_g) = \frac{3M}{4\pi R_g^3} - nm_s = \frac{3v_0^2}{4\pi G R_g^2} - nm_s$$

Per $r \geq R_g$, il fatto che $v(r)$ sia identicamente v_0 implica che la massa totale all'interno di una sfera di raggio r cresce linearmente con r . Questo significa che

$$\int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr' \propto r$$

dove $\rho(r)$ è la densità totale, che per $r \geq R_g$ coincide con $\rho_{\text{dm}}(r)$. Se consideriamo il guscio tra r e $r + dr$, l'aumento di massa è

$$dm = 4\pi r^2 \rho(r) dr$$

e deve dipendere da dr e non da r per linearità, dunque si trova

$$\rho(r) = \frac{A}{r^2}$$

Per trovare la costante A basta imporre

$$\frac{G}{r^2} \left(M + \int_{R_g}^r 4\pi A dr' \right) = \frac{v_0^2}{r}$$

e si trova

$$A = \frac{v_0^2}{4\pi G}$$

dunque per $r \geq R_g$ è

$$\rho_{\text{dm}}(r) = \frac{v_0^2}{4\pi G} \frac{1}{r^2}$$

8. La derivazione è identica a quella per l'equazione 12, e si trova

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)n(r)m_p}{r^2}$$