

Miscellanea

Giovanni Maria Tomaselli* Bruno Bucciotti†

8 febbraio 2020

1 Effetto Yarkovsky

L'effetto Yarkovsky (Figura 1) è una forza di reazione alla radiazione che agisce sui corpi celesti. Esso è di rilevanza principalmente per piccoli asteroidi e funziona come segue.

Consideriamo un asteroide, in orbita solare, che ruota su se stesso. La superficie si scalda quando è esposta ai raggi del Sole, durante il dì, e si raffredda quando non lo è, durante la notte, grazie alla radiazione emessa per irraggiamento, secondo la legge di Stefan-Boltzmann. Per via della rotazione dell'asteroide, il profilo di temperatura della superficie sarà in ritardo rispetto all'intensità della radiazione solare. Ad esempio, il picco della temperatura non sarà a “mezzogiorno”, che è il momento in cui dal Sole arriva più energia per unità di area, bensì nel “pomeriggio”, cioè dopo un certo intervallo di tempo da tale massimo. L'irraggiamento sarà dunque più intenso in certe zone che in altre, in modo asimmetrico: è chiaro che il rinculo genera una forza sull'asteroide diretta in modo non banale.

Come possiamo stimare quantitativamente un effetto del genere?

1.1 Analisi dimensionale

Consideriamo un asteroide sferico, in orbita circolare e con inclinazione nulla dell'asse di rotazione. Proviamo ad elencare tutti i paramentri in gioco, indicandone le dimensioni (scriveremo l'unità di massa kg nella combinazione $J = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$).

- Luminosità del Sole $[L_\odot] = J \text{s}^{-1}$.

*giovanni.tomaselli@sns.it

†bruno.bucciotti@sns.it

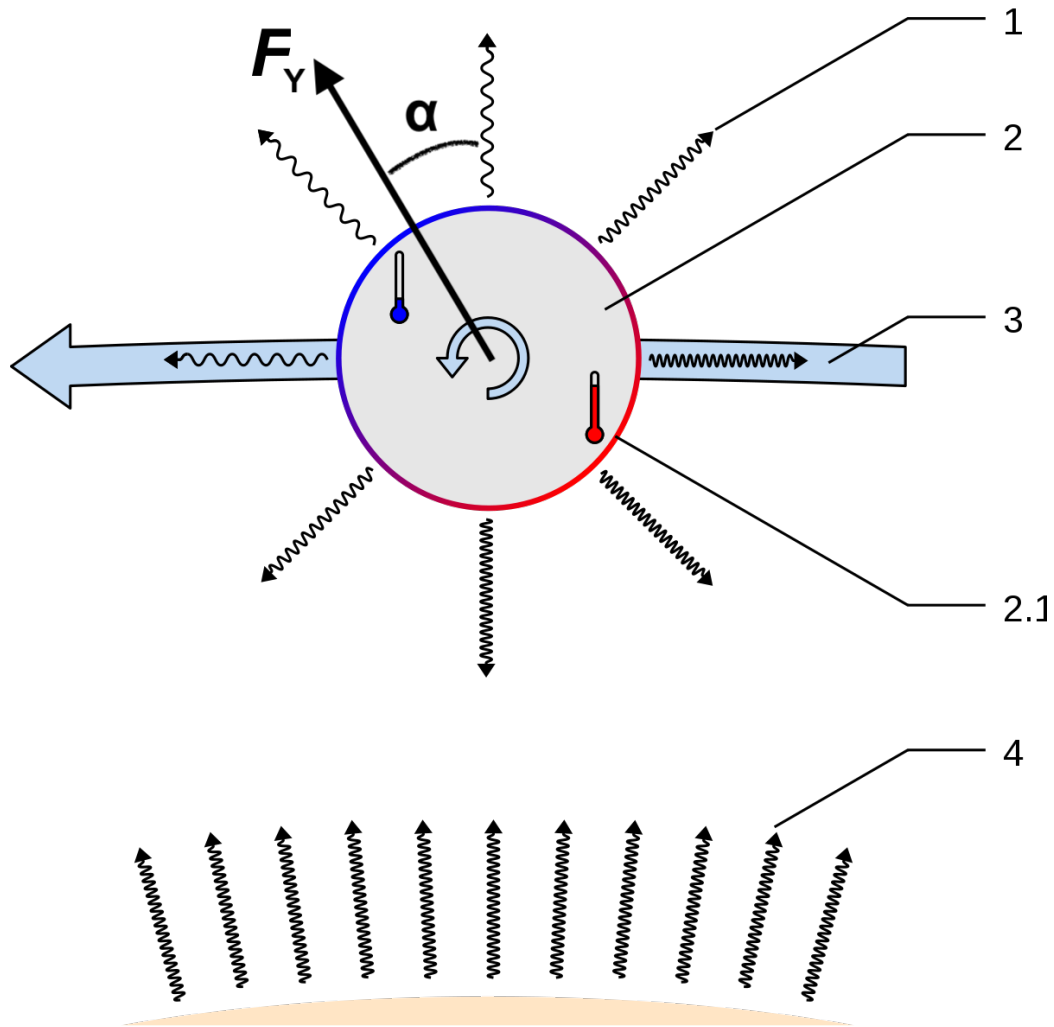


Figura 1: 1. Radiazione dalla superficie dell'asteroide. 2. Asteroide con rotazione prograda. 2.1 Posizione del “pomeriggio” (zona più calda). 3. Orbita dell'asteroide. 4. Radiazione proveniente dal Sole. È indicata la forza dovuta all'effetto Yarkovsky, di modulo F_Y , e l'angolo α che essa forma con la congiungente Sole-asteroide.

- Raggio dell'asteroide $[r] = \text{m}$.
- Raggio dell'orbita $[R] = \text{m}$.
- Velocità angolare di rivoluzione intorno al Sole $[\Omega] = \text{s}^{-1}$.
- Velocità angolare di rotazione $[\omega] = \text{s}^{-1}$.
- Costante di Stefan-Boltzmann $[\sigma] = \text{J s}^{-1} \text{m}^{-2} \text{K}^{-4}$.
- Velocità della luce $[c] = \text{m s}^{-1}$.
- Albedo (frazione di luce riflessa) $[A] = 1$ (adimensionale).
- Capacità termica per unità di area $[C] = \text{J K}^{-1} \text{m}^{-2}$.
- Conducibilità termica $[k] = \text{J s}^{-1} \text{m}^{-1} \text{K}^{-1}$.

Abbiamo quindi 10 parametri ($L_\odot, r, R, \Omega, \omega, \sigma, c, A, C, k$) e 4 unità di misura (J, m, s, K) in gioco. Da essi vorremmo tirar fuori il modulo della forza F_Y dovuta all'effetto Yarkovsky e l'angolo α tra essa e la congiungente asteroide-Sole. A causa della grande differenza tra numero di parametri e numero di unità di misura, un approccio tramite analisi dimensionale potrebbe sembrare a prima vista senza speranza. La situazione tuttavia migliora facendo qualche semplice osservazione e ipotesi.

- I parametri $L_\odot$ e R ed A entreranno sempre e soltanto nella combinazione

$$(1 - A) \frac{L_\odot}{4\pi R^2},$$

cioè la frazione assorbita della potenza per unità di area che arriva dal Sole ad una distanza pari a quella a cui si trova l'asteroide.

- I parametri ω ed Ω entreranno sempre e soltanto nella combinazione

$$\omega - \Omega,$$

cioè (l'inverso del)la durata del giorno solare.

- Grazie alla relazione

$$\text{energia} = (\text{quantità di moto}) \times c$$

valida per i fotoni, troviamo

$$\text{forza} = \frac{\text{potenza}}{c}.$$

La velocità della luce non entrerà in altri modi se non come prefattore nella formula per la forza, quindi avremo

$$F_Y \propto c^{-1}, \quad \alpha \text{ indipendente da } c.$$

- Facciamo l'ipotesi di conducibilità termica k trascurabile. Sebbene la validità di questa approssimazione dipenda da caso a caso (cioè coinvolge altri parametri, ad esempio è chiaro che più r è piccolo, più cresce l'importanza della conduzione), la conducibilità non ha un ruolo concettualmente importante nell'effetto Yarkovsky. Descriveremo quindi un asteroide in cui ogni punto della superficie ha una evoluzione termica a sé stante, in cui la descrizione qualitativa dell'effetto Yarkovsky data in precedenza funziona perfettamente. In presenza di una conducibilità non nulla, ci si aspetterà una riduzione di F_Y , per via della tendenza a uniformarsi del profilo di temperatura.

Cercando una combinazione adimensionale dei parametri rilevanti, rimaniamo dunque con

$$\mathcal{H} = \left((1-A) \frac{L_\odot}{4\pi R^2} \right)^a r^\beta (\omega - \Omega)^\gamma \sigma^\delta C^\epsilon.$$

I parametri sono ancora 5 a fronte di 4 unità di misura, quindi il sistema lineare per gli esponenti ha infinite soluzioni. Possiamo però risolverlo in funzione di uno di essi, ad esempio γ , ottenendo

$$\begin{cases} a = -\frac{3}{4}\gamma \\ \beta = 0 \\ \delta = -\frac{1}{4}\gamma \\ \epsilon = \gamma. \end{cases} \implies \mathcal{H} = \left(\frac{(1-A)^{3/4} L_\odot^{3/4} \sigma^{1/4}}{(4\pi R^2)^{3/4} C(\omega - \Omega)} \right)^{-\gamma}.$$

A questo punto, possiamo senza perdere generalità scegliere $\gamma = -1$ e dire che l'angolo α sarà dato da una certa funzione della variabile $\mathcal{H}$,

$$\alpha = \alpha(\mathcal{H}) = \alpha \left(\frac{(1-A)^{3/4} L_\odot^{3/4} \sigma^{1/4}}{(4\pi R^2)^{3/4} C(\omega - \Omega)} \right), \quad (1)$$

e similmente F_Y sarà data da

$$F_Y = \frac{1}{c} \frac{(1-A)L_\odot}{4\pi R^2} \pi r^2 f(\mathcal{H}) = \frac{(1-A)L_\odot \pi r^2}{4\pi R^2 c} f \left(\frac{(1-A)^{3/4} L_\odot^{3/4} \sigma^{1/4}}{(4\pi R^2)^{3/4} C(\omega - \Omega)} \right). \quad (2)$$

In quest'ultima formula, il prefattore $\frac{(1-A)L_\odot \pi r^2}{4\pi R^2 c}$ è semplicemente una delle infinite combinazioni dei parametri rilevanti che abbia le dimensioni di una

forza (con il caveat di richiedere $F_Y \propto c^{-1}$, come detto in precedenza). La componente radiale della forza sarà $F_Y \cos \alpha \hat{R}$, quella tangenziale (l'unica in grado di modificare il momento angolare orbitale) sarà $F_Y \sin \alpha \hat{R}$.

Questa costruzione dei parametri adimensionali, che nel nostro caso è solo uno, è standard e va sotto il nome di Teorema di Buckingham: la soluzione a un problema con n variabili dipendenti da k grandezze fondamentali è esprimibile come una funzione di $n - k$ gruppi adimensionali. Nel nostro caso, tutta la fisica è contenuta nelle funzioni $\alpha(\mathcal{H})$ e $f(\mathcal{H})$.

1.2 Forza dovuta a riflessione ed assorbimento

Prima di continuare la discussione sull'effetto Yarkovsky, apriamo una breve parentesi e calcoliamo la forza $\vec{F}_{\text{radiazione}}$ dovuta alla riflessione e all'assorbimento della luce. Infatti, essa è inevitabile ogni volta che c'è F_Y e con essa va comparata. Innanzitutto, $\vec{F}_{\text{radiazione}}$ è radiale per via della simmetria del problema (in questo caso, infatti, la rotazione dell'asteroide è ininfluyente). Essendo l'asteroide sferico, la luce riflessa è distribuita in modo isotropo¹, quindi non trasporta, in media, quantità di moto, perciò la forza prodotta è

$$\vec{F}_{\text{riflessa}} = \frac{1}{c} \frac{AL_{\odot}}{4\pi R^2} \pi r^2 \hat{R}.$$

Per la luce assorbita il discorso è ancor più semplice: tutta la quantità di moto viene trasferita all'asteroide e abbiamo

$$\vec{F}_{\text{assorbita}} = \frac{1}{c} \frac{(1 - A)L_{\odot}}{4\pi R^2} \pi r^2 \hat{R},$$

quindi in totale

$$\vec{F}_{\text{radiazione}}^{\text{totale}} = \vec{F}_{\text{riflessa}} + \vec{F}_{\text{assorbita}} = \frac{L_{\odot} \pi r^2}{4\pi R^2 c} \hat{R}.$$

La componente radiale totale della forza sarà dunque

$$\vec{F}^{\text{totale}} \cdot \hat{R} = \frac{L_{\odot} \pi r^2}{4\pi R^2 c} (1 + (1 - A)f(\mathcal{H}) \cos(\alpha(\mathcal{H}))).$$

1.3 Alta escursione termica

Torniamo ora alle equazioni (1) e (2). Siamo riusciti ad esprimere α e F_Y come funzioni libere del parametro adimensionale $\mathcal{H}$. Sfortunatamente, questo non ci dice molto sulla fenomenologia del problema. Possiamo fare

¹Si veda, ad esempio, Senigallia 2012, problema 1.

di più? Ad esempio, possiamo, almeno in certi regimi, indovinare la forma funzionale di $\alpha(\mathcal{H})$ e $f(\mathcal{H})$?

Consideriamo il limite $\mathcal{H} \gg 1$: a cosa corrisponde fisicamente? Per capirlo possiamo immaginare di fissare tutti i parametri e farne variare solo uno, ad esempio $(\omega - \Omega)$. $\mathcal{H} \rightarrow \infty$ corrisponde a $(\omega - \Omega) \rightarrow 0$. Siamo dunque nel limite in cui il giorno solare dura moltissimo, molto più di quanto il suolo ci metta a raffreddarsi per irraggiamento. Possiamo descrivere questo regime come **alta escursione termica**: le temperature sono molto alte durante il dì e molto basse durante la notte. Nel limite $\mathcal{H} \rightarrow \infty$, il profilo di temperatura tenderà ad una certa curva simmetrica durante il dì (col massimo a mezzogiorno) e a esattamente zero durante la notte.

Sempre nel limite $\mathcal{H} \rightarrow \infty$, è ovvio che F_Y tende ad una costante positiva: l'energia viene irraggiata da un solo lato dell'asteroide e ciò causa una forza che lo allontana dal Sole. Quindi,

$$\lim_{\mathcal{H} \rightarrow \infty} f(\mathcal{H}) = \text{costante} > 0.$$

Per quanto riguarda $\alpha(\mathcal{H})$, possiamo altrettanto facilmente dire

$$\lim_{\mathcal{H} \rightarrow \infty} \alpha(\mathcal{H}) = 0,$$

per via della simmetria. Riusciamo a dire di più, cioè con quale andamento va a zero? Immaginiamo di dare una piccola velocità angolare $(\omega - \Omega)$ all'asteroide. Immaginiamo inoltre, per semplificare, che il Sole emetta un breve e intenso impulso luminoso, che scaldi la superficie, la quale poi inizia a irraggiare. Il tempo dell'irraggiamento non dipende da $(\omega - \Omega)$: il solo effetto della rotazione sarà determinare di quanto un certo punto della superficie si sposta prima di raffreddarsi del tutto. Lo shift del profilo di temperatura è ovviamente proporzionale a $(\omega - \Omega)\Delta t \propto 1/\mathcal{H}$, perciò avremo $\alpha(\mathcal{H}) \propto 1/\mathcal{H}$, o in altre parole

$$\lim_{\mathcal{H} \rightarrow \infty} \alpha(\mathcal{H})\mathcal{H} = \text{costante} > 0.$$

Siamo quindi riusciti a determinare, a meno di costanti moltiplicative, la forma funzionale della forza di Yarkovsky! Esplicitamente, abbiamo

$$\begin{aligned} F_{\text{radiale}}^{\text{totale}} &= \frac{L_{\odot}\pi r^2}{4\pi R^2 c} (1 + \text{costante} \times (1 - A)), \\ F_{\text{tangenziale}}^{\text{totale}} &= \text{costante} \times \frac{(1 - A)L_{\odot}\pi r^2}{4\pi R^2 c} \frac{1}{\mathcal{H}} = \\ &= \text{costante} \times \frac{\pi r^2 C (\omega - \Omega)}{c} \left(\frac{(1 - A)L_{\odot}}{4\pi R^2 \sigma} \right)^{1/4}. \end{aligned}$$

In particolare, $F_{\text{radiale}}^{\text{totale}} \propto R^{-2}$, come la forza di gravità, e $F_{\text{tangenziale}}^{\text{totale}} \propto R^{-0.5}$.

1.4 Bassa escursione termica

Proviamo a fare qualcosa di simile nel limite opposto, $\mathcal{H} \ll 1$. L'interpretazione fisica dovrebbe essere a questo punto ovvia: si tratta del limite in cui l'asteroide ruota così rapidamente che il suolo si raffredda pochissimo durante la notte, prima di essere nuovamente esposto ai raggi solari. Possiamo descrivere questo regime come **bassa escursione termica**: la temperatura assumerà un profilo quasi uniforme, attorno ad una temperatura di equilibrio T_{eq} (dipendente dalla latitudine): $T = T_{\text{eq}} + \Delta T$, $\Delta T \ll T_{\text{eq}}$.

In questo caso, visto che di sicuro il profilo di temperatura è asimmetrico (massimo nel pomeriggio e minimo all'inizio del giorno), è chiaro che α tende ad una certa costante,

$$\alpha(0) = \text{costante} > 0,$$

mentre l'irraggiamento è quasi isotropo, quindi

$$f(0) = 0.$$

Riusciamo, analogamente a prima, ad indovinare l'andamento asintotico? Sebbene il processo di raffreddamento sia non lineare ($W = \text{Area} \times \sigma T^4$, per piccole deviazioni da T_{eq} avremo un raffreddamento approssimativamente lineare nel tempo e un differenziale di potenza emessa proporzionale a ΔT . Poiché, ad esempio, la durata della notte è inversamente proporzionale a $(\omega - \Omega)$, avremo $\Delta T \propto (\omega - \Omega)^{-1} \propto \mathcal{H}$, perciò

$$\lim_{\mathcal{H} \rightarrow 0} \frac{f(\mathcal{H})}{\mathcal{H}} = \text{costante} > 0.$$

La forma funzionale della forza di Yarkovsky è quindi²

$$\begin{aligned} F_{\text{radiale}}^{\text{totale}} &= \frac{L_{\odot} \pi r^2}{4\pi R^2 c} (1 + \text{costante} \times (1 - A) \mathcal{H}) = \\ &= \frac{L_{\odot} \pi r^2}{4\pi R^2 c} \left(1 + \text{costante} \times \frac{(1 - A)^{7/4} L_{\odot}^{3/4} \sigma^{1/4}}{(4\pi R^2)^{3/4} C(\omega - \Omega)} \right), \\ F_{\text{tangenziale}}^{\text{totale}} &= \text{costante} \times \frac{(1 - A) L_{\odot} \pi r^2}{4\pi R^2 c} \mathcal{H} = \\ &= \text{costante} \times \frac{\pi r^2}{c} \frac{(1 - A)^{7/4} L_{\odot}^{7/4} \sigma^{1/4}}{(4\pi R^2)^{7/4} C(\omega - \Omega)}. \end{aligned}$$

In questo caso $F_{\text{radiale}}^{\text{totale}}$ ha una dipendenza complicata da R , ma di sicuro dominata dal termine R^{-2} , mentre $F_{\text{tangenziale}}^{\text{totale}} \propto R^{-3.5}$.

²Se $\alpha(0) = \pi/2$, allora $\cos \alpha(0) = 0$ e $F_{\text{radiale}}^{\text{totale}} = \frac{L_{\odot} \pi r^2}{4\pi R^2 c} (1 + \text{cost} \times (1 - A) \mathcal{H}^2)$ (nell'ipotesi in cui $\alpha'(0) \neq 0$). Questo è in effetti proprio ciò che accade, come si dimostra nel problema 1.

Le dipendenze $R^{-0.5}$ e $R^{-3.5}$ che abbiamo ricavato nei due casi estremi usando solo argomenti di analisi dimensionale possono essere trovati in modelli più precisi (si veda, ad esempio, arxiv.org/pdf/1212.4812.pdf).

2 Onde sonore

Consideriamo un fluido (liquido o gassoso) unidimensionale, cioè ad esempio contenuto in un tubo di sezione costante di area A e con proprietà fisiche che dipendono solo dalla coordinata x lungo l'asse del tubo e dal tempo t . Avremo quindi la densità $\rho(x, t)$, la pressione $p(x, t)$ e la velocità (diretta lungo l'asse del tubo) $v(x, t)$. Applicando la seconda legge della dinamica, in un intervallo infinitesimo di tempo dt , ad un elemento di fluido che al tempo t è compreso tra x e $x + dx$, troviamo

$$\begin{aligned} \overbrace{\rho(x, t) A dx}^{\text{massa}} \overbrace{\frac{v(x + v(x, t) dt, t + dt) - v(x, t)}{dt}}^{\text{accelerazione}} = \\ = \underbrace{Ap(x, t) - Ap(x + dx, t)}_{\text{forza dovuta alla pressione}} + \underbrace{\rho(x, t) A dx f(x, t)}_{\text{forza esterna}} \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{v(x + v dt, t + dt) - v(x + v dt, t) + v(x + v dt, t) - v(x, t)}{dt} = \\ = -\frac{p(x + dx, t) - p(x, t)}{\rho dx} + f(x, t) \end{aligned}$$

che nel limite $dx \rightarrow 0$, $dt \rightarrow 0$ diventa l'equazione di Eulero

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f. \quad (3)$$

La versione tridimensionale è

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{f}. \quad (4)$$

Si noti che $\vec{f}$ è stata definita come la forza esterna per unità di massa; ad esempio, nel caso gravitazionale, $\vec{f} = \vec{g}$.

Imponendo la conservazione della massa nel tratto $[x, x + dx]$ e nell'intervallo $[t, t + dt]$, troviamo un'altra equazione, detta di continuità:

$$\begin{aligned} \overbrace{\rho(x, t + dt) A dx}^{\text{massa finale}} &= \overbrace{\rho(x, t) A dx}^{\text{massa iniziale}} + \overbrace{\rho(x, t) A v(x, t) dt}^{\text{massa entrante}} - \overbrace{\rho(x + dx, t) A v(x + dx, t) dt}^{\text{massa uscente}} \\ \frac{\rho(x, t + dt) - \rho(x, t)}{dt} + \frac{\rho(x + dx, t) v(x + dx, t) - \rho(x, t) v(x, t)}{dx} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} &= 0, \end{aligned}$$

la cui versione tridimensionale è

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (5)$$

Le equazioni (4) e (5) governano il moto di un fluido non viscoso. Ci sarebbe un'infinità di cose da dire a proposito, per le quali si rimanda alla lezione di fluidodinamica dell'anno scorso; noi qui vogliamo concentrarci sui fenomeni sonori. Partiamo da un fluido fermo ($v_0 = 0$) e con densità e pressione costanti ρ_0 e p_0 e consideriamone una piccola perturbazione:

$$v = \delta v, \quad \rho = \rho_0 + \delta \rho, \quad p = p_0 + \delta p, \quad \delta \rho \ll \rho_0, \quad \delta p \ll p_0.$$

Trascurando termini di second'ordine nelle quantità piccole δv e $\delta \rho$, le equazioni di Eulero e di continuità diventano³ (rimaniamo per semplicità nel caso unidimensionale)

$$\partial_t \delta v = -\frac{1}{\rho_0} \partial_x \delta p + f \quad (6)$$

$$\partial_t \delta \rho + \rho_0 \partial_x \delta v = 0. \quad (7)$$

Facciamo a questo punto una importante ipotesi: tutte le quantità termodinamiche del fluido dipendono da una sola variabile indipendente (fluido barotropico), ad esempio la densità ρ . Quindi avremo, per la pressione, $p = p(\rho)$. Il tipo di dipendenza da ρ dipende dalla situazione: in una trasformazione adiabatica $p = p_0 \frac{\rho^\gamma}{\rho_0^\gamma}$, mentre per una trasformazione isoterma $p = p_0 \frac{\rho}{\rho_0}$. L'ipotesi di barotropicità vuol dire essere in un preciso regime. Nel caso delle onde sonore, facciamo l'ipotesi di trasformazioni adiabatiche (fluido isoentropico): il fluido non scambia calore con alcunché; equivalentemente, le perturbazioni sono così piccole da essere reversibili. Avremo quindi, applicando la regola per la derivata di una funzione composta,

$$\partial_x \delta p = \partial_x p = \frac{\partial p}{\partial \rho} \partial_x \rho = \gamma \frac{p}{\rho} \partial_x \rho \approx \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \partial_x \delta \rho = c_s^2 \partial_x \delta \rho,$$

³Per comodità di notazione, abbiamo posto $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ e $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$.

in cui abbiamo definito la velocità del suono

$$c_s = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} \approx \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{\text{massa molecolare}}}$$

dove il pedice S indica che la derivata è fatta mantenendo l'entropia costante.

Prendendo la derivata rispetto a x dell'equazione (6) e la derivata rispetto a t dell'equazione (7), troviamo⁴

$$\begin{cases} \partial_x \partial_t \delta v = -\frac{1}{\rho_0} c_s^2 \partial_x^2 \delta \rho + \partial_x f \\ \partial_t^2 \delta \rho + \rho_0 \partial_t \partial_x \delta v = 0 \end{cases} \implies \partial_t^2 \delta \rho - c_s^2 \partial_x^2 \delta \rho = -\rho_0 \partial_x f. \quad (8)$$

Nel caso in cui la forza esterna sia costante, otteniamo

$$\frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial x^2} = 0.$$

Questa equazione è chiamata equazione d'onda: le sue soluzioni, infatti, sono onde sinusoidali⁵ che si spostano verso destra o verso sinistra con velocità c_s :

$$\delta \rho = A \cos(\omega(t \pm x/c_s) + \phi), \quad A, \phi \text{ costanti.}$$

La stessa equazione è soddisfatta da $\delta \rho \approx c_s^2 \delta \rho$. Abbiamo quindi trovato che le onde sonore, all'ordine più basso nelle perturbazioni, sono onde di densità e pressione in fase e che viaggiano indisturbate (senza dispersione, senza attenuazione, ...) alla velocità del suono.

La versione tridimensionale dell'equazione d'onda è

$$\frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 \delta \rho = 0$$

e ha come soluzioni

$$\delta \rho = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} + \phi), \quad A, \phi, \vec{k} \text{ costanti con } |\vec{k}| = \frac{\omega}{c_s}.$$

⁴Per combinare le due equazioni, bisogna commutare le derivate rispetto a t e x . Questa operazione è lecita sotto condizioni di continuità molto lasse della funzione da derivare.

⁵In realtà, l'equazione è soddisfatta per una qualunque funzione $\delta \rho = \delta \rho(t \pm x/c_s)$ (verificarlo per esercizio, è molto semplice). Quindi una perturbazione di densità di qualunque forma si sposterà nello spazio verso destra o verso sinistra con velocità c_s . La scrittura in termini di funzioni trigonometriche non è meno generale ed equivale a scrivere la funzione $\delta \rho$ in trasformata di Fourier.

2.1 Equazione di Bernoulli

Usando $\partial_x(v^2/2) = v\partial_x v$, l'equazione di Eulero unidimensionale (3), nel caso stazionario ($\partial_t v = 0$), diventa

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f.$$

Nell'ipotesi barotropica, definendo

$$F = \int_{p(x_0)}^{p(x)} \frac{1}{\rho} dp = \int_{\rho(x_0)}^{\rho(x)} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho} d\rho \quad \left(\text{in modo che } \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right)$$

troviamo

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} + F + \Phi \right) = 0 \implies \frac{v^2}{2} + F + \Phi = \text{costante}.$$

Qui Φ è l'energia potenziale per unità di massa: nel caso gravitazionale, $\Phi = gh$. La versione tridimensionale è

$$\vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} + F + \Phi \right) = \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}),$$

quindi per concludere che $\frac{v^2}{2} + F + \Phi$ è costante dobbiamo imporre un'ipotesi in più, ad esempio che il fluido sia irrotazionale ($\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$).

Se il fluido è incomprimibile, allora ρ è costante e $F = \int_{p(x_0)}^{p(x)} \frac{1}{\rho} dp = \frac{p(x) - p(x_0)}{\rho}$, da cui otteniamo l'equazione di Bernoulli nella forma più nota

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho \Phi = \text{costante}.$$

Se invece il fluido è comprimibile, dobbiamo, come prima, specificare una certa trasformazione termodinamica. Nel caso di fluido isoentropico, otteniamo (qui $p_0 = p(x_0)$ e $\rho_0 = \rho(x_0)$ sono i valori di pressione e densità in un certo punto che prendiamo come riferimento; non c'è bisogno di avere valori di background e valori perturbati come in precedenza)

$$F = \int \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho} d\rho = \int \frac{1}{\rho} \gamma p_0 \frac{\rho^{\gamma-1}}{\rho_0^\gamma} d\rho = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} = \frac{\text{entalpia}}{\text{unità di massa}},$$

da cui

$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} + \Phi = \frac{1}{2} v^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \Phi = \text{costante}.$$

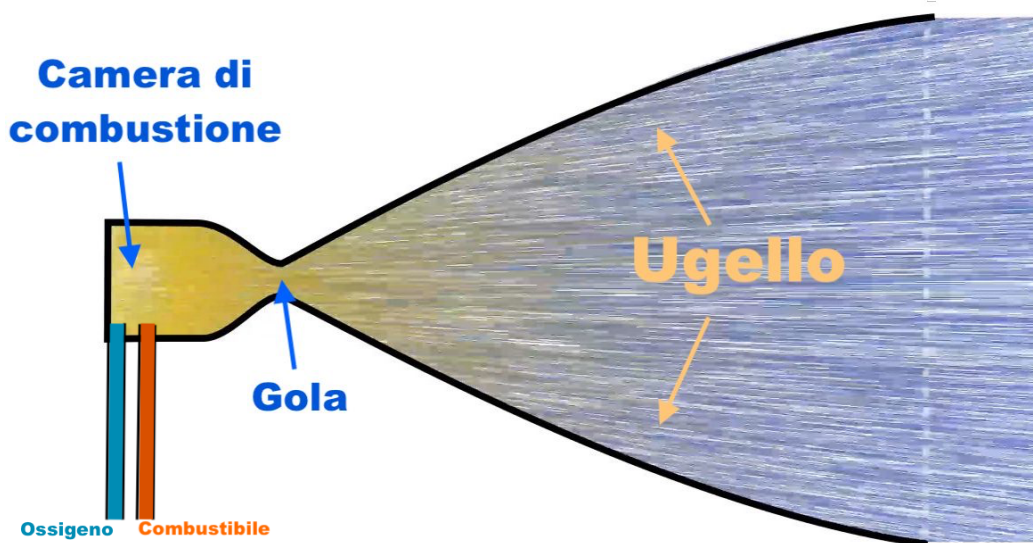


Figura 2: Struttura di un motore a razzo a combustibile liquido.

Per un fluido isoterma, avremo invece

$$F = \int \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho} d\rho = \int \frac{1}{\rho} \frac{p_0}{\rho_0} d\rho = \frac{p_0}{\rho_0} \log\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right),$$

da cui

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p_0}{\rho_0} \log\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) + \Phi = \text{costante}.$$

2.2 Ugello di de Laval

Vediamo un'applicazione un po' ingegneristica ma sicuramente affascinante della commistione fluidodinamica-termodinamica che abbiamo incontrato finora: il motore dei razzi a propellente liquido.

Per farla molto breve, combustibile e ossigeno liquidi vengono iniettati nella camera di combustione, nella quale reagiscono. I prodotti della reazione, gassosi e a temperature altissime, escono dall'unico lato aperto della camera di combustione, attraversano l'ugello e scappano via. Più velocemente vengono emessi questi prodotti di reazione, maggiore sarà la spinta risultante sul razzo, da cui la naturale domanda: come accelerarli quanto più possibile? L'ugello di de Laval risponde a questa domanda in modo molto elegante, semplicemente usando una intelligente geometria della struttura.

Con riferimento alla Figura 2, avremo un flusso stazionario di un fluido con densità ρ , velocità v , pressione p e sezione trasversale di area A , tutte quantità

che variano in base al punto in cui ci si trova. Approssimeremo tale flusso come unidimensionale, cioè supporremo che v , ρ e p non varino spostandosi lungo un piano perpendicolare all'asse del motore. Per minimizzare gli attriti e le perdite in calore, vorremo che il flusso sia isoentropico. Possiamo quindi scrivere l'equazione di continuità e l'equazione di Bernoulli, nella forma vista in precedenza:

$$\begin{cases} \rho A v = \text{costante} \\ \frac{1}{2} v^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = \text{costante}. \end{cases}$$

Indichiamo

- con un pedice “0” (ad es.: ρ_0, p_0) le quantità nella camera di combustione, dove il fluido è approssimativamente fermo (quindi $v_0 = 0$);
- con M il numero di Mach, $M = v/c_s$;
- con un pedice “*” (ad es.: ρ_*, p_*) le quantità nel punto in cui il fluido diventa supersonico (quindi $M_* = 1$).

Allora, dalla seconda equazione troviamo subito

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} c_s^2 M^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} &= \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \\ \frac{p}{\rho} - \frac{p_0}{\rho_0} &= -\frac{1}{2} \frac{\gamma-1}{\gamma} c_s^2 M^2 = -\frac{1}{2} (\gamma-1) \frac{p}{\rho} M^2 \\ \frac{p_0}{\rho_0} \frac{1}{1 + \frac{1}{2}(\gamma-1)M^2} &= \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} \\ \frac{\rho}{\rho_0} &= \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2}(\gamma-1)M^2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \end{aligned}$$

Dalla prima, invece, troviamo

$$A \rho M = \rho_* A_* \implies \frac{A}{A_*} = \frac{1}{M} \left(\frac{1 + \frac{1}{2}(\gamma-1)M^2}{1 + \frac{1}{2}(\gamma-1)} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (9)$$

Dal grafico, mostrato in Figura 3, otteniamo un risultato molto interessante: per accelerare il gas è necessaria una geometria convergente-divergente. La parte convergente serve ad accelerare il gas in regime subsonico; approssimativamente in corrispondenza della gola dell'ugello ($A_{\text{minima}} \approx A_*$) si transisce al regime supersonico; l'ugello divergente, infine, è necessario per accelerare il gas oltre la sua velocità del suono.

La forma geometrica esatta dell'ugello dipenderà poi da altri fattori, per lo più ingegneristici (si cerca evitare la separazione del flusso dalle pareti e

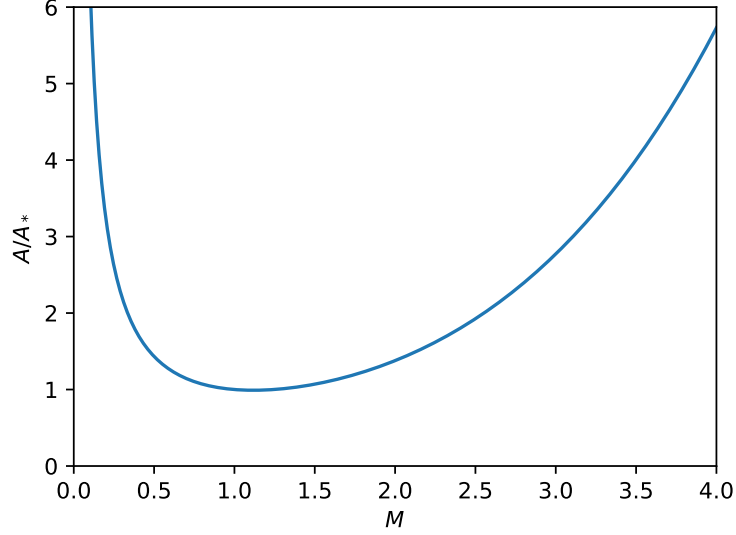


Figura 3: grafico dell'equazione (9) con $\gamma = 1.4$.

il surriscaldamento di alcune zone), ma il suo andamento qualitativo deve essere quello descritto qui.

Concludiamo scrivendo la formula per la velocità del gas uscente, che segue rapidamente dalla seconda equazione del sistema:

$$v = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left(1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right)} \approx \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{RT_0}{\text{massa molecolare}}}.$$

Prendendo, ad esempio, il motore Merlin 1D del Falcon 9, per il quale $T_0 \approx 3400^\circ\text{C}$, e inserendo $\gamma = 1.3$, massa molecolare = 30 g mol^{-1} (mistura di vapore acqueo e anidride carbonica) troviamo $v \approx 2970 \text{ m s}^{-1}$, molto vicino al valore ufficiale $v = 3050 \text{ m s}^{-1}$.

2.3 Lunghezza d'onda di Jeans

Torniamo alle onde sonore in presenza di una forza esterna, equazione (8). Immaginiamo di avere un fluido esteso in tutto lo spazio, soggetto alla sua stessa gravità. Per la legge di Gauss, $\partial_x f = -4\pi G\rho$ (versione tridimensionale: $\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = -4\pi G\rho$) e l'equazione del suono diventa

$$\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial x^2} = 4\pi G\rho_0 \delta\rho$$

(versione tridimensionale: $\partial_t^2 \delta\rho - c_s^2 \nabla^2 \delta\rho = 4\pi G\rho_0 \delta\rho$).

Cerchiamo una soluzione ondulatoria del tipo $\delta\rho(\vec{x}, t) \propto \cos(\omega t \pm kx + \phi)$.
Abbiamo

$$\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} = -\omega^2 \delta\rho, \quad \frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial x^2} = -k^2 \delta\rho,$$

quindi

$$-\omega^2 \delta\rho + c_s^2 k^2 \delta\rho = 4\pi G \rho_0 \delta\rho \implies \omega = \sqrt{c_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0}.$$

Abbiamo quindi che le onde con lunghezza d'onda $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ si spostano con velocità $\omega/k = \sqrt{c_s^2 - \frac{4\pi G \rho_0}{k^2}} < c_s$.

Tuttavia, se λ è abbastanza grande (k abbastanza piccolo), potrebbe succedere che l'argomento della radice diventa negativo. La più piccola lunghezza d'onda per cui questo accade è la lunghezza d'onda di Jeans,

$$\lambda_J = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G \rho_0}}.$$

Cosa succede dunque se $\lambda > \lambda_J$? Possiamo provare a cercare una soluzione del tipo $\delta\rho \propto e^{\pm i\omega t} \cos(kx + \phi)$: nelle formule precedenti cambia solo il segno di ω^2 e otteniamo

$$\omega = \sqrt{4\pi G \rho_0 - c_s^2 k^2}.$$

L'argomento della radice è esattamente l'opposto rispetto a prima, quindi stavolta non ci sono problemi: la soluzione trovata è giusta. Abbiamo dunque, a seconda del segno all'esponenziale, una soluzione che cresce esponenzialmente e una che decresce esponenzialmente.

Cosa vuol dire, fisicamente, ciò? Col passare del tempo, la soluzione che cresce diventerà presto dominante rispetto a quella che decresce. Ad un certo punto, la condizione $\delta\rho \ll \rho_0$ non sarà più valida, e con essa tutta la derivazione che abbiamo fatto per arrivare all'equazione delle onde. Usciremo inevitabilmente dal regime perturbativo. Il fatto che $\delta\rho$ aumenti, comunque, ci indica cosa sta accadendo: siamo in presenza di un collasso gravitazionale. Per $\lambda > \lambda_J$, la pressione del fluido non è sufficiente a contrastare la forza di gravità.

Un'altra interpretazione interessante del meccanismo fisico che porta al collasso è la seguente. La quantità $t_{\text{collasso}} = \sqrt{\frac{\pi}{G \rho_0}}$ è approssimativamente il tempo che un oggetto sferico di densità costante ρ_0 impiega a collassare sotto la propria gravità (verificarlo per esercizio!). $\lambda > \lambda_J$ equivale a dire che un'onda che si sposta a velocità c_s non fa in tempo a coprire la distanza λ prima che la materia collassi.

Il fatto che solo le strutture più grandi di una certa dimensione tipica (λ_J) collassino è alla base del motivo per cui le prime galassie che si formarono



Figura 4: Film di sapone retto da un frame. Il lato destro del frame è mobile ed è tenuto in equilibrio da una forza $2F$.

nell'Universo giovane avevano tutte dimensioni più grandi di questa quantità, quindi non erano arbitrariamente piccole.

3 Tensione superficiale

La tensione superficiale (per un liquido) è microscopicamente dovuta al legame fra le varie molecole. Questa forza di legame è mediamente isotropa per molecole interne al liquido (sono “tirate” in tutte le direzioni), mentre è sbilanciata per quelle sulla superficie, che sono tirate verso l'interno. Per ogni superficie c'è dunque una tensione superficiale che possiamo quantificare come segue.

Il film di sapone in Figura 4 tende a contrarsi per via della tensione superficiale, dunque il lato destro mobile deve essere tenuto fermo esercitando una forza $2F$ verso l'esterno. Il fattore 2 viene dall'esistenza, per un film, di due superfici (i due lati della pellicola), ciascuna delle quali esercita una forza F . Si osserva sperimentalmente che la forza F , per tratti rettilinei come in figura, è proporzionale alla lunghezza del tratto e rivolta ortogonalmente al tratto rettilineo, in direzione opposta al film. In conclusione per una superficie vale

$$F = \gamma L,$$

dove γ non dipende dalla geometria ma solo dal tipo di liquido e da parametri come la temperatura; ha le dimensioni di forza/lunghezza, mentre le tensioni normalmente hanno dimensione di forza/lunghezza². Nel caso in cui in Figura 4 si fosse usato un lato mobile di forma complicata (una curva) avremmo dovuto dividere la curva in segmenti dl rettilinei, calcolare la forza

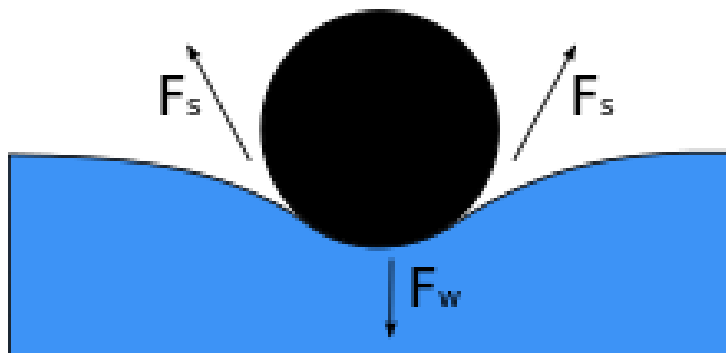


Figura 5: Ago appoggiato sulla superficie dell'acqua.

$dF = \gamma dl$ per ciascuno di questi (diretta ortogonalmente alla curva punto per punto) e sommare. Potete convincervi che il risultato della somma è indipendente dalla curva: dipende solo dai suoi due estremi.

Usiamo quanto abbiamo descritto per capire perchè un oggetto come un ago può galleggiare sull'acqua (notare che non è possibile che dipenda dalla forza di Archimede). L'ago si “appoggia” alla superficie d'acqua e la curva verso il basso, come in Figura 5.

Nella superficie di liquido a contatto con l'ago la tensione è interna al film e non ha effetti; sono presenti solo alla linea di interfaccia in cui l'acqua si separa dall'ago. Qui abbiamo che l'acqua forma un'interfaccia con l'ago come prima il sapone faceva con il lato mobile. La forza esercitata è γL , dove L è la lunghezza dell'ago, questo per entrambi i lati. Prendendo la componente verticale della forza, sommando i contributi di lato destro e sinistro e uguagliando alla forza peso dell'ago si ricava l'angolo a cui si piega l'acqua. γ per l'acqua vale circa 0.07 N m^{-1} .

4 Polarizzazione

Nell'ottica geometrica con cui siete familiari si trascura la polarizzazione della luce (oltre che la sua natura ondulatoria). Dalla teoria dell'elettromagnetismo discende però che la luce è un'onda trasversa (direzione di E e B ortogonale alla direzione del moto), e poichè ci sono due direzioni indipendenti di oscillazione trasversa, esistono due polarizzazioni.

Prese due polarizzazioni di base, diciamo propagazione dell'onda lungo $\hat{z}$ e oscillazione lungo $\hat{x}$ e $\hat{y}$, è possibile avere luce polarizzata in qualunque combinazione delle due di base (ad esempio $\frac{\hat{x}+\hat{y}}{\sqrt{2}}$). Finchè i coefficienti della combinazione restano reali la polarizzazione risultante sarà detta lineare (la

direzione del campo non cambia nel tempo, cambia solo verso e modulo); se compare una fase relativa complessa fra $\hat{x}$ e $\hat{y}$ si ha che la direzione di oscillazione in un dato punto ruota nel tempo. Un versore in parte immaginario può confondere, vediamo di chiarire perchè funziona.

Consideriamo il seguente campo elettrico e magnetico di un'onda propagante lungo $\hat{z}$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{x}E_0 \cos(kz - \omega t) - \hat{y}E_0 \sin(kz - \omega t)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \hat{x}\frac{E_0}{c} \sin(kz - \omega t) + \hat{y}\frac{E_0}{c} \cos(kz - \omega t)$$

Scritti in notazione complessa questi campi sono

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{x}E_0 \exp^{i(kz - \omega t)} + \hat{y}E_0 i \exp^{i(kz - \omega t)} = (\hat{x} + i\hat{y})E_0 \exp^{i(kz - \omega t)}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = -i(\hat{x} + i\hat{y})\frac{E_0}{c} \exp^{i(kz - \omega t)}$$

Si noti quindi come la fase complessa i compare in modo del tutto naturale.

5 Meccanica Quantistica

Di meccanica quantistica vediamo solo i due sistemi più famosi, di cui diamo alcuni fatti. La maggior parte del lavoro avverrà attraverso gli esercizi.

5.1 Oscillatore armonico

Avrete sentito parlare del principio di indeterminazione di Heisenberg:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}.$$

L'incertezza sulla posizione e sulla quantità di moto (in una stessa direzione e per una stessa particella) non possono essere rese piccole a piacere. Una conseguenza di ciò è che in un oscillatore armonico l'energia

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

non può essere zero. Avrà anzi un valore minimo, sapreste stimarlo mediante il principio di indeterminazione? La stima dell'energia minima sarà l'energia del livello energetico fondamentale dell'oscillatore.

Detta $\omega = \sqrt{k/m}$ i livelli energetici sono numerabili con un indice n e sono

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

5.2 Atomo di idrogeno

L'atomo di idrogeno è un sistema che in parte conoscete dalla chimica. Gli stati a energia definita (che sono gli orbitali) sono ordinati in base a tre numeri quantici n, l, m : l'energia dipende solo da n e vale

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{m_e e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} \approx -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2}.$$

l indica il momento angolare orbitale e m la sua proiezione lungo un asse (tipicamente $\hat{z}$). Vale che $0 \leq l \leq n-1$ e che $-l \leq m \leq l$. Riassumendo se l'elettrone è in uno di questi stati possiamo parlare della sua energia, del suo momento angolare totale e del suo momento angolare lungo $\hat{z}$. Non si può invece parlare in modo deterministico della sua posizione o velocità.

Fisicamente le differenze di energia fra i vari livelli sono osservabili quando si illumina il gas di idrogeno atomico con radiazione elettromagnetica. L'eccitazione dell'elettrone da un livello basso a uno alto è possibile se questo assorbe un fotone della giusta energia; viceversa la diseccitazione è accompagnata dall'emissione di un fotone. In tutti questi processi quantistici valgono le usuali leggi di conservazione.

Problemi

1 Ancora effetto Yarkovsky, stavolta i conti

Consideriamo lo stesso asteroide descritto a lezione.

1. Usando un sistema di coordinate sferiche per descrivere la superficie (angoli $\theta \in [0, \pi]$ e $\phi \in [0, 2\pi]$; $\theta = 0$ al polo nord, $\theta = \pi/2$ all'equatore, $\theta = \pi$ al polo sud; $\phi = 0$ all'alba, $\phi = \pi/2$ a mezzogiorno, $\phi = \pi$ al tramonto, $\phi = 3\pi/2$ a mezzanotte), dimostrare che la temperatura del suolo è determinata dalla seguente equazione:

$$C(\omega - \Omega) \frac{\partial T}{\partial \phi}(\theta, \phi) = \frac{(1 - A)L_{\odot} \sin \theta \sin \phi}{4\pi R^2} \chi_{[0, \pi]}(\phi) - \sigma T(\theta, \phi)^4,$$

dove

$$\chi_{[a, b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

2. Dimostrare che le componenti radiale e tangenziale della forza totale sono date da

$$F_{\text{radiale}}^{\text{totale}} = \frac{L_{\odot} r^2 (5 - 2A)}{12R^2 c} + \frac{C(\omega - \Omega) r^2}{c} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} T \sin^2 \theta \cos \phi \, d\theta \, d\phi,$$

$$F_{\text{tangenziale}}^{\text{totale}} = \frac{C(\omega - \Omega) r^2}{c} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} T \sin^2 \theta \sin \phi \, d\theta \, d\phi.$$

3. Dimostrare che nel regime di bassa escursione termica il momento più freddo del giorno è alle 7:14 del mattino (ovviamente riscaldando le ore in modo che il giorno dell'asteroide ne duri 24).
4. Per via delle ipotesi del nostro modello, tra i regimi di alta e bassa escursione termica ce n'è uno che non si può mai applicare a tutta la superficie dell'asteroide: quale dei due? A quale zona della superficie non si può applicare?
5. Dimostrare che nel regime di bassa escursione termica le componenti della forza sono date da⁶

$$F_{\text{radiale}}^{\text{totale}} = F_{\text{radiazione}}^{\text{totale}} = \frac{L_{\odot} \pi r^2}{4\pi R^2 c},$$

$$F_{\text{tangenziale}}^{\text{totale}} = \frac{22\Gamma(3/8)}{35\sqrt{\pi}\Gamma(7/8)} \times \frac{\pi r^2}{c} \frac{(1 - A)^{7/4} L_{\odot}^{7/4} \sigma^{1/4}}{(4\pi R^2)^{7/4} C(\omega - \Omega)}.$$

⁶Può essere utile sapere che $\int_0^{\pi} \sin^{15/4} \theta \, d\theta = \frac{11\sqrt{\pi}\Gamma(3/8)}{35\Gamma(7/8)} \dots$ Ma non spaventatevi.

e che quindi $\alpha(0) = \pi/2$.

6. Dimostrare che nel regime di alta escursione termica la componente radiale della forza è data da

$$F_{\text{radiale}}^{\text{totale}} = \frac{L_{\odot} \pi r^2}{4\pi R^2 c} \left(1 + \frac{2}{3} \pi (1 - A) \right).$$

2 Effetto Poynting-Robertson

Un altro modo in cui la radiazione solare può influire sulle orbite degli asteroidi (in questo caso, in realtà, dei granelli di polvere) è dovuto al seguente fatto. Avendo l'asteroide una velocità di rivoluzione $v > 0$, nel suo sistema di riferimento la luce solare apparirà arrivare con un certo angolo non nullo rispetto alla congiungente asteroide-Sole.

Ignorando l'effetto Yarkovsky (cioè la forza dovuta all'irraggiamento dalla superficie),

1. spiegare l'origine dell'effetto Poynting-Robertson nel sistema di riferimento del Sole;
2. nell'approssimazione non relativistica ($v \ll c$), calcolare la componente radiale e quella tangenziale della forza di Poynting-Robertson (è necessario comunque utilizzare la relatività speciale, o almeno, non sono riuscito a farlo senza).

3 Pressione dentro una bolla e una goccia

Una goccia e una bolla dello stesso raggio R e composte dallo stesso liquido di tensione superficiale γ sono all'equilibrio nel vuoto. Qual è la pressione all'interno della bolla e della goccia?

4 Angolo di Brewster (difficile)

Supponiamo di avere un raggio di luce nel vuoto che incide su un materiale trasparente di indice di rifrazione n . In generale (e in modo qualitativo, ma sufficiente per i nostri scopi) gli atomi all'interfaccia, sotto l'azione forzante del campo esterno, irraggeranno onde come fossero tanti dipoli oscillanti in direzione del campo elettrico. L'onda incidente sommata con tutte queste onde forma due ulteriori raggi: uno trasmesso e uno riflesso.

Sperimentalmente si osserva che per una certa polarizzazione in ingresso e un certo angolo di incidenza, il raggio riflesso non esiste. Ricordando che un dipolo elettrico oscillante non irraggia lungo la direzione in cui sta oscillando (per simmetria), ma anzi irraggia più intensamente lungo le direzioni ortogonali a quella di oscillazione, sapreste determinare la polarizzazione e l'angolo d'ingresso per cui non c'è raggio riflesso? Tale angolo prende il nome di angolo di Brewster.

5 Oscillatore armonico

Ricavare l'energia dello stato fondamentale sfruttando il principio di Heisenberg.

6 Atomo di Bohr

In questo caso l'argomento (sempre euristico) porta a trovare l'energia di tutti i livelli energetici, e storicamente è dovuto a Bohr. Pensiamo ad un protone fisso intorno a cui orbita un elettrone. Seguendo l'ipotesi di de Broglie, associamo un'onda all'elettrone di lunghezza d'onda λ tale che per la quantità di moto dell'elettrone valga

$$p = \hbar k = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}.$$

L'onda è rappresentabile come fase complessa e^{ikx} (x è la posizione dell'elettrone nell'orbita circolare), ma per esistere deve “richiudersi” dopo un giro, cioè $k(2\pi r) = 2\pi n$.

Provare a ricavare i livelli energetici dell'atomo di idrogeno.

7 Degenerazione dell'atomo di idrogeno e effetto Zeeman

Quanti stati esistono ad una data energia nell'atomo di idrogeno, supponendo che uno stato sia identificato dalla terna n, l, m ?

Un modo per “sollevare” questa degenerazione degli stati è introdurre un campo magnetico esterno $\vec{B} = B\hat{z}$. Pensando l'elettrone come corrente elettrica intorno al protone, diciamo una spira, e assumendo che questa corrente non sia perturbata dall'introduzione del campo magnetico, calcolare lo shift nell'energia in funzione del momento angolare lungo la direzione del

campo. Questo calcolo è classico e concettualmente sbagliato, ma se alla fine si introduce a mano il fatto che il momento angolare lungo $\hat{z}$ è quantizzato, si ottiene il risultato corretto.

Soluzioni

1 Ancora effetto Jarkowsky, stavolta i conti

1. Consideriamo un piccolo elemento di suolo, di area A , che all'istante t si trova alle coordinate (θ, ϕ) (come definite nel testo) e all'istante $t + dt$ si trova alle coordinate $(\theta, \phi + (\omega - \Omega) dt)$ e sia $T(\theta, t)$ la sua temperatura (sottintenderemo la variabile θ). Allora,

$$CA(T(t+dt) - T(t)) = \frac{(1-A)L_{\odot}}{4\pi R^2} \underbrace{A \sin \theta \sin \phi}_{\text{area proiettata}} \chi_{[0,\pi]}(\phi) dt - \sigma AT(t)^4 dt.$$

Dividendo per $A dt$ e usando $\phi(t) = \phi + (\omega - \Omega)t$ (da cui $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial \phi} \frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial T}{\partial \phi}(\omega - \Omega)$), troviamo

$$C(\omega - \Omega) \frac{\partial T}{\partial \phi}(\theta, \phi) = \frac{(1-A)L_{\odot} \sin \theta \sin \phi}{4\pi R^2} \chi_{[0,\pi]}(\phi) - \sigma T(\theta, \phi)^4. \quad (10)$$

2. Dividendo la potenza emessa da un elemento di superficie per (meno) la velocità della luce, otteniamo, come spiegato nel testo, la forza di reazione alla radiazione generata da tale elemento. Quindi,

$$\begin{aligned} F_{\text{tangenziale}}^{\text{Yarkovsky}} &= - \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sigma T^4}{c} \overbrace{\sin \theta \cos \phi}^{\text{proiez. tangenz.}} \overbrace{r^2 d\phi \sin \theta d\theta}^{\text{elemento di area}} = \\ &= \frac{r^2}{c} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} C(\omega - \Omega) \frac{\partial T}{\partial \phi} \sin^2 \theta \cos \phi d\phi d\theta = \\ &= \frac{C(\omega - \Omega)r^2}{c} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} T \sin^2 \theta \sin \phi d\phi d\theta. \end{aligned}$$

dove abbiamo dapprima usato l'equazione (10) (insieme all'integrale $\int_0^{\pi} \sin \phi \cos \phi d\phi = 0$) e poi integrato per parti. Analogamente,

$$\begin{aligned} F_{\text{radiale}}^{\text{Yarkovsky}} &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sigma T^4}{c} \overbrace{\sin \theta \sin \phi}^{\text{proiez. tangenz.}} \overbrace{r^2 d\phi \sin \theta d\theta}^{\text{elemento di area}} = \\ &= \frac{(1-A)L_{\odot}r^2}{6R^2c} - \frac{r^2}{c} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} C(\omega - \Omega) \frac{\partial T}{\partial \phi} \sin^2 \theta \sin \phi d\phi d\theta = \\ &= \frac{(1-A)L_{\odot}r^2}{6R^2c} + \frac{C(\omega - \Omega)r^2}{c} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} T \sin^2 \theta \cos \phi d\phi d\theta, \end{aligned}$$

dove, nel primo passaggio, si sono usati i seguenti integrali:

$$\int_0^{2\pi} \chi_{[0,\pi]}(\phi) \sin^2 \phi \, d\phi = \int_0^\pi \sin^2 \phi \, d\phi = \int_0^\pi \frac{1 - \cos(2\phi)}{2} \, d\phi = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta = \left[-\cos \theta \sin^2 \theta \right]_0^\pi + 2 \int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta = \frac{2}{3} \left[-\cos^3 \theta \right]_0^\pi = \frac{4}{3}.$$

Sommando $F^{\text{radiazione}} = \frac{L_\odot \pi r^2}{4\pi R^2 c} \hat{R}$, si ottiene infine

$$F_{\text{radiale}}^{\text{totale}} = \frac{L_\odot r^2 (5 - 2A)}{12R^2 c} + \frac{C(\omega - \Omega)r^2}{c} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi T \sin^2 \theta \cos \phi \, d\theta \, d\phi,$$

$$F_{\text{tangenziale}}^{\text{totale}} = \frac{C(\omega - \Omega)r^2}{c} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi T \sin^2 \theta \sin \phi \, d\theta \, d\phi.$$

3. Integrando la (10) in $d\phi$, otteniamo

$$\int_0^{2\pi} T(\theta, \phi)^4 \, d\phi = \frac{(1 - A)L_\odot \sin \theta}{2\pi R^2 \sigma}. \quad (11)$$

Nel regime di bassa escursione termica, sviluppiamo

$$T(\theta, \phi) = T_{\text{eq}}(\theta) + \Delta T(\theta, \phi), \quad \text{con} \quad \Delta T \ll T_{\text{eq}}.$$

Sostituendo nella (11), troviamo

$$T_{\text{eq}}(\theta)^4 = \frac{(1 - A)L_\odot \sin \theta}{4\pi^2 R^2 \sigma}.$$

Vogliamo risolvere la (10) perturbativamente in ΔT . All'ordine più basso, semplicemente

$$T^4 = T_{\text{eq}}^4 + 4T_{\text{eq}}^3 \Delta T + 6T_{\text{eq}}^2 \Delta T^2 + 4T_{\text{eq}} \Delta T^3 + \Delta T^4 \approx T_{\text{eq}}^4,$$

quindi

$$C(\omega - \Omega) \frac{\partial \Delta T}{\partial \phi} = \sigma T_{\text{eq}}^4 (\pi \sin \phi \chi_{[0,\pi]}(\phi) - 1). \quad (12)$$

L'equazione può essere integrata separatamente nei due intervalli $[0, \pi]$ e $[\pi, 2\pi]$:

$$\Delta T = \begin{cases} \frac{\sigma T_{\text{eq}}^4}{C(\omega - \Omega)} (-\pi \cos \phi - \phi + C_1) & 0 \leq \phi \leq \pi \\ \frac{\sigma T_{\text{eq}}^4}{C(\omega - \Omega)} (-\phi + C_2) & \pi \leq \phi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Imponendo la continuità in $\phi = 0, 2\pi$ e $\phi = \pi$ si trova $C_1 = \pi/2$ e $C_2 = 3\pi/2$. Per trovare il minimo di ΔT , comunque, non era necessaria l'integrazione esplicita, perché dalla (12) vediamo subito che il minimo si ha in corrispondenza di $\sin \phi = 1/\pi$, ossia $\phi \approx 0.3239461$, che corrisponde alle 7:14:14 del mattino.

Nella notazione introdotta a lezione, vediamo che ΔT si può scrivere come

$$\frac{\Delta T}{T_{\text{eq}}} = \begin{cases} \mathcal{H}(\theta)(-\cos \phi - \phi/\pi + 1/2) & 0 \leq \phi \leq \pi \\ \mathcal{H}(\theta)(-\phi/\pi + 3/2) & \pi \leq \phi \leq 2\pi, \end{cases}$$

dove abbiamo definito $\mathcal{H}(\theta)$ inglobando un $\sin^{3/4} \theta$ nella definizione:

$$\mathcal{H}(\theta) = \mathcal{H} \sin^{3/4} \theta = \frac{(1-A)^{3/4} L_{\odot}^{3/4} \sin^{3/4} \theta \sigma^{1/4}}{(4\pi R^2)^{3/4} C(\omega - \Omega)}.$$

4. Aver trascurato la conducibilità implica che zone diverse dell'asteroide non si “parlano”: ogni latitudine avrà il suo profilo di temperatura indipendente da quello delle altre. Il profilo di temperatura si potrà sviluppare con l'espansione vista al punto precedente, nella quale il parametro di sviluppo è $\mathcal{H}(\theta)$. Poiché $\mathcal{H}(0) = \mathcal{H}(\pi) = 0$, ci sarà sempre una zona intorno ai poli in cui $\mathcal{H}$ è piccolo e in cui varrà, di conseguenza, il regime di bassa escursione termica. Quindi il regime che non si può mai applicare a tutta la superficie dell'asteroide è quello di alta escursione termica.
5. Inserendo il profilo di temperatura all'ordine 1 in $\mathcal{H}$, che abbiamo ricavato in precedenza, nelle formule per la forza, si ottiene, per la componente radiale,

$$\begin{aligned} F_{\text{radiale}}^{\text{Yarkovsky}} &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sigma r^2 T_{\text{eq}}(\theta)^4}{c} \left(1 + \frac{\Delta T(\theta, \phi)}{T_{\text{eq}}(\theta)} \right)^4 \sin^2 \theta \sin \phi \, d\phi \, d\theta \approx \\ &\approx \frac{(1-A)L_{\odot} r^2}{4\pi^2 R^2 c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(1 + 4 \frac{\Delta T}{T_{\text{eq}}} \right) \sin^3 \theta \sin \phi \, d\phi \, d\theta = \\ &= \frac{(1-A)L_{\odot} r^2}{4\pi^2 R^2 c} \times 4\mathcal{H} \times \int_0^\pi \sin^{15/4} \theta \, d\theta \times \\ &\quad \times \left\{ \int_0^\pi \left(-\cos \phi - \frac{\phi}{\pi} + \frac{1}{2} \right) \sin \phi \, d\phi + \right. \\ &\quad \left. + \int_\pi^{2\pi} \left(-\frac{\phi}{\pi} + \frac{3}{2} \right) \sin \phi \, d\phi \right\} = \\ &= -\frac{(1-A)L_{\odot} r^2}{4\pi^2 R^2 c} \times 4\mathcal{H} \times \int_0^\pi \sin^{15/4} \theta \, d\theta \times \left\{ 0 + 0 \right\} = 0 \end{aligned}$$

e, per la componente tangenziale,

$$\begin{aligned}
F_{\text{tangenziale}}^{\text{Yarkovsky}} &= - \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sigma r^2 T_{\text{eq}}(\theta)^4}{c} \left(1 + \frac{\Delta T(\theta, \phi)}{T_{\text{eq}}(\theta)} \right)^4 \sin^2 \theta \cos \phi \, d\phi \, d\theta \approx \\
&\approx - \frac{(1-A)L_\odot r^2}{4\pi^2 R^2 c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(1 + 4 \frac{\Delta T}{T_{\text{eq}}} \right) \sin^3 \theta \cos \phi \, d\phi \, d\theta = \\
&= - \frac{(1-A)L_\odot r^2}{4\pi^2 R^2 c} \times 4\mathcal{H} \times \int_0^\pi \sin^{15/4} \theta \, d\theta \times \\
&\quad \times \left\{ \int_0^\pi \left(-\cos \phi - \frac{\phi}{\pi} + \frac{1}{2} \right) \cos \phi \, d\phi + \right. \\
&\quad \left. + \int_\pi^{2\pi} \left(-\frac{\phi}{\pi} + \frac{3}{2} \right) \cos \phi \, d\phi \right\} = \\
&= - \frac{(1-A)L_\odot r^2}{4\pi^2 R^2 c} \times 4\mathcal{H} \times \int_0^\pi \sin^{15/4} \theta \, d\theta \times \left\{ \frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \right\} = \\
&= \frac{(1-A)L_\odot r^2}{4\pi R^2 c} \frac{4\mathcal{H}}{\pi} \times \frac{11\sqrt{\pi}\Gamma(3/8)}{35\Gamma(7/8)} \times \frac{\pi}{2} = \\
&= \frac{22\Gamma(3/8)}{35\sqrt{\pi}\Gamma(7/8)} \times \frac{(1-A)L_\odot \pi r^2}{4\pi R^2 c} \mathcal{H} = \\
&= \frac{22\Gamma(3/8)}{35\sqrt{\pi}\Gamma(7/8)} \times \frac{\pi r^2}{c} \frac{(1-A)^{7/4} L_\odot^{7/4} \sigma^{1/4}}{(4\pi R^2)^{7/4} C(\omega - \Omega)}.
\end{aligned}$$

Il numero $\frac{22\Gamma(3/8)}{35\sqrt{\pi}\Gamma(7/8)}$ vale circa 0.3857. Sommando $F^{\text{radiazione}} = \frac{L_\odot \pi r^2}{4\pi R^2 c} \hat{R}$ si ottengono immediatamente le formule date nella traccia.

Si noti che abbiamo usato la formula per la forza nella sua versione più “immediata”, cioè col termine di Stefan-Boltzmann, anziché con l’integrando lineare nella temperatura. Il motivo è che, nell’ottenere le formule finali del punto 2, si è usata l’equazione (10), la quale introduce un fattore $1/\mathcal{H}$ in più. Quindi, per trovare la forza avremmo dovuto calcolare la temperatura al second’ordine in $\mathcal{H}(\theta)$, la cui espressione è

$$\frac{\Delta T}{T_{\text{eq}}} = \begin{cases} \mathcal{H}(\theta) \left(\frac{1}{2} - \cos \phi - \frac{\phi}{\pi} \right) + \mathcal{H}(\theta)^2 \left(\frac{\sin \phi}{\pi} + \frac{\phi^2}{2\pi^2} - \frac{\phi}{2\pi} + \frac{1}{12} - \frac{1}{\pi^2} \right) & 0 \leq \phi \leq \pi \\ \mathcal{H}(\theta) \left(\frac{3}{2} - \frac{\phi}{\pi} \right) + \mathcal{H}(\theta)^2 \left(\frac{\phi^2}{2\pi^2} - \frac{3\phi}{2\pi} + \frac{13}{12} - \frac{1}{\pi^2} \right) & \pi \leq \phi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Il risultato ottenuto per questa via è ovviamente lo stesso, come si invita a verificare.

Per completezza, riportiamo anche l'espressione della forza all'ordine $\mathcal{H}^2$. Posto

$$\begin{aligned} d_1(\phi) &= \frac{1}{2} - \cos \phi - \frac{\phi}{\pi}, & d_2(\phi) &= \frac{\sin \phi}{\pi} + \frac{\phi^2}{2\pi^2} - \frac{\phi}{2\pi} + \frac{1}{12} - \frac{1}{\pi^2}, \\ n_1(\phi) &= \frac{3}{2} - \frac{\phi}{\pi}, & n_2(\phi) &= \frac{\phi^2}{2\pi^2} - \frac{3\phi}{2\pi} + \frac{13}{12} - \frac{1}{\pi^2}, \end{aligned}$$

notiamo che

$$d_1(\phi) = n_1(\pi + \phi) - \cos \phi, \quad d_2(\phi) = n_2(\pi + \phi) + \frac{\sin \phi}{\pi}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi (6d_1(\phi)^2 + 4d_2(\phi)) \sin \phi \, d\phi + \int_\pi^{2\pi} (6n_1(\phi)^2 + 4n_2(\phi)) \sin \phi \, d\phi = \\ &= \int_0^\pi \left\{ 6 \cos^2 \phi - 12 \cos \phi \left(\frac{1}{2} - \frac{\phi}{\pi} \right) + 4 \frac{\sin \phi}{\pi} \right\} \sin \phi \, d\phi = 3 \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} F_{\text{radiale}}^{\text{Yarkovsky}} &= \frac{(1-A)L_\odot r^2}{4\pi^2 R^2 c} \times \mathcal{H}^2 \times \int_0^\pi \sin^{9/2} \theta \, d\theta \times 3 = \\ &= \frac{(1-A)L_\odot r^2}{4\pi R^2 c} \times \underbrace{\frac{1}{\pi} \frac{7\Gamma(-\frac{1}{4})^2}{20\sqrt{2\pi}}}_{\approx 1.06786} \mathcal{H}^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F_{\text{radiale}}^{\text{totale}} &= \frac{L_\odot r^2}{4\pi R^2 c} \left(1 + \frac{7\Gamma(-\frac{1}{4})^2}{20\pi\sqrt{2\pi}} \times (1-A)\mathcal{H}^2 \right) = \\ &= \frac{L_\odot r^2}{4\pi R^2 c} \left(1 + \frac{7\Gamma(-\frac{1}{4})^2}{20\pi\sqrt{2\pi}} \times \frac{(1-A)^{5/2} L_\odot^{3/2} \sigma^{1/2}}{(4\pi R^2)^{3/2} C^2 (\omega - \Omega)^2} \right). \end{aligned}$$

Per la componente tangenziale, abbiamo similmente

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi (6d_1(\phi)^2 + 4d_2(\phi)) \cos \phi \, d\phi + \int_\pi^{2\pi} (6n_1(\phi)^2 + 4n_2(\phi)) \cos \phi \, d\phi = \\ &= \int_0^\pi \left\{ 6 \cos^2 \phi - 12 \cos \phi \left(\frac{1}{2} - \frac{\phi}{\pi} \right) + 4 \frac{\sin \phi}{\pi} \right\} \cos \phi \, d\phi = 0, \end{aligned}$$

quindi la correzione successiva a $F_{\text{tangenziale}}^{\text{totale}}$ è (almeno) di ordine $\mathcal{H}^3$, il che è in realtà una immediata conseguenza del fatto che $\alpha(0) = \pi/2$.

6. Nel regime di alta escursione termica, possiamo porre, all'ordine zero in $\mathcal{H}$, $(\omega - \Omega) = 0$ e ricavare

$$\sigma T(\theta, \phi)^4 = \frac{(1 - A)L_\odot \sin \theta \sin \phi}{4\pi R^2} \chi_{[0, \pi]}(\phi),$$

da cui

$$F_{\text{tangenziale}}^{\text{Yarkovsky}} = - \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sigma r^2 T(\theta, \phi)^4}{c} \sin^2 \theta \cos \phi \, d\phi \, d\theta = 0$$

(risultato ovvio all'ordine zero in $\mathcal{H}$) e

$$\begin{aligned} F_{\text{radiale}}^{\text{Yarkovsky}} &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sigma r^2 T(\theta, \phi)^4}{c} \sin^2 \theta \sin \phi \, d\phi \, d\theta = \\ &= \frac{(1 - A)L_\odot}{4\pi R^2 c} \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta \int_0^\pi \sin^2 \phi \, d\phi = \\ &= \frac{(1 - A)L_\odot}{4\pi R^2 c} \times \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

2 Effetto Poynting-Robertson

1. Nel sistema di riferimento del Sole, la luce ricevuta dall'asteroide è radiale, ma quella riflessa non è più isotropa, a causa della velocità dell'asteroide stesso. Questo ci suggerisce che l'effetto Poynting-Robertson sia nullo se $A = 0$.
2. Utilizziamo il formalismo dei quadri-vettori. Siano $\beta = v/c$ e $\gamma = \sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}}$, dove v è la velocità dell'asteroide. La radiazione incidente abbia, nel sistema di riferimento del Sole, quadrimpulso $(E/c, E/c, 0, 0)$. Applicando una trasformazione di Lorentz, troviamo che nel sistema dell'asteroide essa ha quadrimpulso $(\gamma E/c, E/c, -\beta \gamma E/c, 0)$. Si noti che abbiamo posizionato l'asse x lungo la congiungente Sole-asteroide e l'asse y lungo $\vec{v}$. In questo sistema di riferimento, il quadrimpulso dell'asteroide è $(Mc, 0, 0, 0)$, dove M è la sua massa. Se una frazione A dell'energia incidente viene riflessa in modo isotropo, e la restante parte assorbita, avremo che il quadrimpulso finale della radiazione sarà $(AE/c, 0, 0, 0)$ e quello dell'asteroide $(Mc + (1 - A)\gamma E/c, E/c, -\beta \gamma E/c, 0)$. Si noti che l'approssimazione di isotropia della radiazione riflessa vale solo nel limite $M \ll E$. A questo punto, con una trasformazione di Lorentz

inversa troviamo il quadrimpulso dell'asteroide nel sistema del Sole:

$$\begin{pmatrix} \gamma Mc + ((1-A)\gamma^2 - \beta^2\gamma^2)E/c \\ E/c \\ \beta\gamma Mc - A\beta\gamma^2 E/c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Mc \\ E/c \\ Mv - AvE/c^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(v^2/c^2),$$

da cui la forza $F_{PR} = -A \frac{v}{c^2} E = -A \frac{\bar{v}^2}{c} \frac{L_\odot \pi r^2}{4\pi R^2}$.

3 Pressione dentro una bolla e una goccia

Tagliamo mentalmente la sfera a metà. La forza dovuta alla pressione tende ad allontanare le due semisfere ed è pari a $P\pi R^2$. La forza che tende a mantenerle unite è la tensione superficiale. Nel caso della goccia, questa è $2\pi R\gamma$, e uguagliando si ottiene $P = \frac{2\gamma}{R}$. Nel caso della bolla è la stessa cosa ma le superfici che contribuiscono alla tensione superficiale sono due (la superficie interna e quella esterna). Dunque la tensione superficiale raddoppia e così anche la pressione $P = \frac{4\gamma}{R}$.

4 Angolo di Brewster

Sappiamo che il raggio riflesso dovrebbe formare un angolo con la superficie uguale all'angolo di incidenza. Sappiamo inoltre dalla legge di Snell che il raggio trasmesso forma un angolo θ_t con $n \sin \theta_t = \sin \theta_B$. Se la polarizzazione incidente è con il campo elettrico nel piano di incidenza si ha la situazione descritta in figura 6. Il campo elettrico in uscita è ortogonale alla direzione di propagazione; la direzione di tale campo è quella di oscillazione dei dipoli alla superficie. Se tale direzione di oscillazione fosse anche quella del raggio riflesso, ricordando che nella direzione di oscillazione di un dipolo non c'è irraggiamento, si può intuire che non ci sarebbe raggio riflesso. La condizione è quindi geometrica (sul lato destro ho l'angolo piatto):

$$\theta_t + \frac{\pi}{2} + \theta_B = \pi$$

Sostituendo nella legge di Snell si ricava facilmente

$$\theta_B = \arctan n$$

Osservazione: siamo stati concettualmente imprecisi perché abbiamo invocato, in alcune parti, una descrizione di ottica geometrica quando il

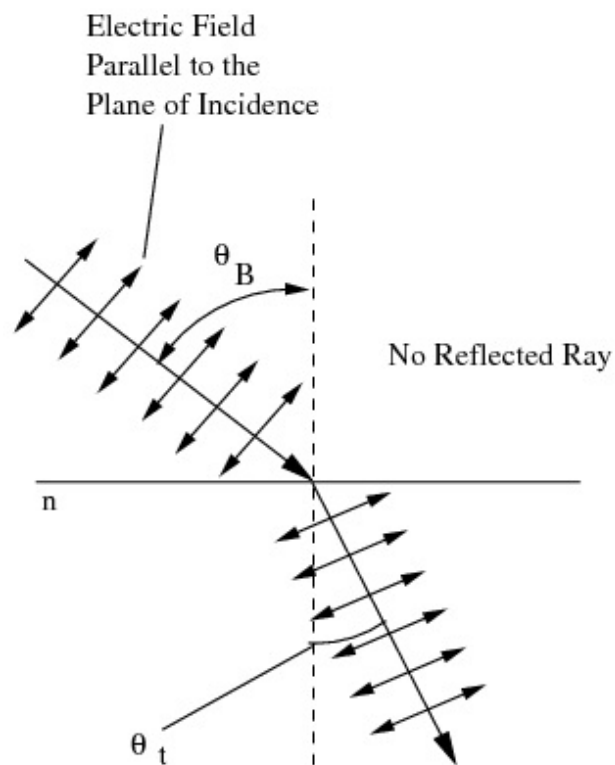


Figura 6: Riflessione di un raggio di luce attraverso una superficie, configurazione per cui non vi è raggio riflesso.

problema è puramente di ottica fisica. Il fatto è che alcuni concetti di ottica geometrica, come raggio di luce e sua direzione di propagazione, hanno una controparte anche in ottica fisica. Resta però che una trattazione completa del problema richiede conoscenze di ottica fisica che vanno oltre quelle presentate in queste lezioni.

5 Oscillatore armonico

Ricordo la definizione: $\langle x \rangle$ sia il valor medio di x ; allora $\Delta x^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$. Per lo stato fondamentale dell'oscillatore armonico, per simmetria, $\langle x \rangle = 0$, $\langle p \rangle = 0$. Dunque il principio di Heisenberg diventa (i valori medi sono ora sottintesi) $x^2 p^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}$. Aggiungendo $E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$ e assumendo che valga l'uguaglianza per il principio di Heisenberg (che ha senso se cerchiamo il minimo) si ricava che $E_{\min} = \frac{\hbar\omega}{2}$.

6 Atomo di Bohr

Si ricava immediatamente che $pr = n\hbar$, dunque $E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2 p}{4\pi\epsilon_0 n\hbar}$. Minimizzando in funzione di p si trova l'energia minima compatibile con il vincolo di quantizzazione. Si ricava $p = \frac{me^2}{4\pi\epsilon_0 n\hbar}$ e quindi $E = -\frac{1}{2n^2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_B}$ con a_B il raggio di Bohr $a_B = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2}$.

7 Degenerazione dell'atomo di idrogeno e effetto Zeeman

Il numero di stati a fisso n (fissa energia) è dato dal numero di coppie (l, m) soggette ai seguenti vincoli: $0 \leq l \leq n-1$, $-l \leq m \leq l$. Dunque $\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2$.

La spirale giace in un piano che forma con l'asse $\hat{z}$ un angolo θ . Il momento di dipolo magnetico della spirale è $m = IR^2\pi$, l'energia è $U = -mB \cos \theta = -IR^2\pi B \cos \theta$. Ricordando che la nostra spirale è un elettrone in movimento deduciamo $I = \frac{-e}{T}$, $L = rm \frac{2\pi r}{T}$ con T il periodo di rivoluzione dell'elettrone. Mettendo tutto insieme si ha $U = \frac{e}{2m} L_z B$. L_z è quantizzato e può assumere

solo valori discreti, multipli interi di $\hbar$. Dunque $L_z = \hbar m_z$ e, volendo scrivere $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$, si ricava $\vec{\mu} = -\mu_B \vec{L}$, $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$ il magnetone di Bohr.

In realtà l'elettrone ha un grado di libertà in più, cioè lo spin $s = \pm \frac{\hbar}{2}$, dove normalmente $\hbar$ è sottinteso. Questo implica che il ragionamento qui sopra fallisca, oltre che concettualmente, anche a livello fenomenologico: uno stato in onda s , cioè con $l = m = 0$, si separa comunque in due per via dell'accoppiamento fra spin e campo magnetico $\vec{B}$. L'accoppiamento si scrive $\delta E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$, $\vec{\mu} \simeq -2\frac{\mu_B}{\hbar} \vec{s}$ (il 2 non è esatto, ma questo lo si è scoperto ancora dopo...). Gli sperimentali, sapendo della quantizzazione del momento angolare orbitale lungo $\hat{z}$ ma non sapendo dello spin, accendendo il campo magnetico si aspettavano di trovare $2l + 1$ energie diverse per ogni dato l , dove $2l + 1$ sono i possibili valori di m a fisso l . Immaginate la sorpresa quando si trovarono con uno stato che si divide in 2, un numero pari! Per questo motivo questo effetto (esteso anche agli stati eccitati) si chiama effetto Zeeman anomalo.