

Miscellanea

Raffaele Salvia*, Marco Costa†

9 febbraio 2019

Sommario

Lo scopo della lezione è di illustrare alcuni problemi ed argomenti insoliti.

1 Modello a goccia

1.1 Introduzione

Il nucleo atomico è la regione più interna di un atomo, attorno alla quale “orbitano” gli elettroni. Il nucleo è uno stato legato di N neutroni e Z protoni (con $A = N + Z$ detto *peso atomico*). Gli elettroni *non* fanno parte del nucleo, e pertanto non verranno mai considerati nel resto dell’esercizio. Vogliamo studiare un modello elementare di un generico nucleo pesante (ossia $A \gg 1$) costituito da N neutroni e Z protoni.

Da osservazioni sperimentali possiamo fare le seguenti assunzioni preliminari:

- La forza nucleare è uguale per protoni e neutroni (che verranno entrambi chiamati *nucleoni*).

*raffaele.salvia@sns.it

†marco.costa@sns.it

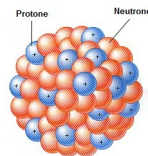


Figura 1: nucleo costituito da soli protoni e neutroni.

- La forza nucleare è una forza attrattiva di contatto (a corto raggio).
- Protoni e neutroni possono essere descritti come sfere identiche, indistinguibili ed incompressibili.

1.2 Energia di legame

Proviamo, partendo da queste ipotesi a costruire un modello per l'energia di legame B dell'intero nucleo. Lavoriamo con la convenzione per cui B è il lavoro che dobbiamo svolgere per separare i costituenti del nucleo e portarli all'infinito. Pertanto B positive indicano sistemi stabili. Come prima cosa, studiamo la possibile geometria del nucleo. Il fatto che la forza nucleare sia attrattiva e di contatto fa sì che in un nucleo stabile un generico nucleone tenda ad avere più nucleoni adiacenti possibili: non conviene energeticamente che uno di questi sia staccato (non in contatto) dagli altri costituenti. Se i nucleoni sono sfere incompressibili, questi non possono compenetrarsi, e quindi il volume V del nucleo deve essere proporzionale al loro numero A . È facile convincersi che, tramite ragionamenti di similitudine, se il volume scala come A , le dimensioni lineari del nucleo scalano come $A^{1/3}$ e la superficie come $A^{2/3}$. In tutto questo ragionamento, l'assunzione $A \gg 1$ fa sì che si possano trascurare le "imperfezioni" della forma del nucleo dovute alla finitezza delle sferette che lo compongono, e che si possa trattare il tutto come una sorta di continuo.

Adesso consideriamo l'energia di un nucleone che stia all'interno (e non sul bordo) del nucleo. Essendo l'interazione nucleare a corto raggio, il nucleone interagirà tramite questa forza solo con i nucleoni ad esso adiacenti. Pertanto esso avrà una certa energia $\mathcal{U}_{\text{nuc}}$ associata all'attrazione dei nucleoni vicini. Osserviamo come questa energia dipenda solo dal numero di nucleoni vicini, e quindi tutti i nucleoni che vivono nel mezzo del nucleo avranno la stessa energia dovuta a questa interazione. Segue che l'energia dell'intero nucleo sarà proporzionale al numero di nucleoni:

$$U_{\text{vol}} = \sum_i \mathcal{U}_{\text{nuc},i} = a_{\text{vol}} A$$

Tuttavia in questo calcolo si è trascurato un elemento: i nucleoni che vivono sul guscio del nucleo non hanno lo stesso numero di nucleoni vicini che hanno i nuclei che vivono nell'interno del nucleo. Sebbene sia difficile fare un calcolo preciso per questa correzione, per semplicità possiamo assumere che ciascun nucleone che vive sulla superficie perda una stessa quantità di energia rispetto ai nucleoni interni. Dato che la superficie del nucleo è $S \propto A^{2/3}$, una stima della correzione è:

$$U_{\text{sup}} = -a_{\text{sup}} A^{2/3}$$

L'ultima cosa da considerare è l'energia elettromagnetica del nucleo: infatti al suo interno abbiamo Z protoni, che essendo carichi interagiscono tra loro anche tramite forza elettromagnetica, e che pertanto tendono a respingersi. Calcolare esattamente l'energia elettromagnetica del nucleo richiede di conoscere esattamente la distribuzione dei protoni all'interno. Possiamo darne una buona stima assumendo che i protoni siano distribuiti più o meno uniformemente all'interno del nucleo, e che siano separati da una distanza tipica d proporzionale alla dimensione lineare tipica del nucleo, ossia a $A^{1/3}$.

Sotto queste ipotesi, si trova che l'energia elettromagnetica del nucleo è pari alla somma dei contributi delle $Z(Z-1)/2$ coppie di protoni:

$$U_c = -a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} \simeq a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

dove il fattore 2 è stato riassorbito nel coefficiente e si è sfruttato $Z \gg 1$. Un modello più raffinato consiste nel considerare il nucleo come una sfera uniformemente carica con carica totale $Z|e|$. L'integrale sferico dell'energia elettrica associata a questa configurazione consente pure di ottenere una stima del valore numerico del coefficiente a_c . In entrambi i casi si è utilizzata una ipotesi nascosta, ossia che la distanza media fra protoni dipenda esclusivamente dal numero totale di nucleoni A e non dal numero di nucleoni di ciascun tipo, ossia Z , N . Come vedremo in seguito, per nuclei sensati si ha $N \simeq Z$, pertanto una eventuale correzione della distanza tipica fra protoni ad A fissato è trascurabile.

Sommando tutti i contributi precedenti, si ottiene una stima dell'energia di legame del nucleo nel nostro modello:

$$B(A, Z) = a_{\text{vol}}A - a_{\text{sup}}A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

I vari coefficienti sono stati presi positivi, così da meglio sottolineare i contributi favorevoli e sfavorevoli all'energia di legame (nella nostra convenzione per il segno di B un nucleo è tanto più stabile quanto più B è grande). Si noti che stiamo assumendo che la forza nucleare sia del tutto indipendente e sovrapponibile linearmente a quella elettromagnetica. Inoltre, l'unico addendo che discrimina fra protoni e neutroni è quello legato all'interazione elettromagnetica: nel nostro modello l'interazione nucleare non distingue fra protoni e neutroni, come assunto inizialmente.

Un osservatore attento noterà che in questo modello la presenza di nuclei positivi è sempre sfavorita: le cariche positive tendono a respingersi e basta. Come spiegare quindi l'esistenza di nuclei con protoni all'interno? In realtà nel modello non si è tenuto in considerazione di effetti puramente quantistici come

il principio di Pauli: particelle identiche non possono occupare lo stesso stato quantistico. In parole povere: in un nucleo (ad A fissato) le configurazioni con tanti protoni rispetto ai neutroni (e viceversa) sono sfavorite rispetto a quelle in cui si ha un numero bilanciato di protoni e neutroni. Possiamo quindi inserire una correzione U_{sym} all'energia di legame per tenere in considerazione questo fatto. E' sensato assumere che U_{sym} sia una generica funzione dell'asimmetria relativa $x = \frac{N-Z}{A}$, ossia dell'eccesso di una specie di nucleoni relativamente al numero totale di essi. Dato che per nuclei stabili N non è troppo diverso da Z , è lecito sviluppare in serie di Taylor la correzione e tenere i termini di ordine più basso nella asimmetria relativa:

$$U_{\text{sym}} = a_1 x + a_2 x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

Il termine deve anche essere consistente con l'ipotesi che protoni e neutroni sono circa identici ai fini dell'interazione nucleare. Pertanto U_{sym} deve essere invariante sotto lo scambio $Z \leftrightarrow N$, ossia $x \leftrightarrow -x$. Questo fa sì che i termini dispari nell'asimmetria relativa nello sviluppo di Taylor di U_{sym} siano assenti. Si ottiene quindi la seguente forma per la correzione:

$$U_{\text{sym}} = -a_{\text{sym}} \frac{(N-Z)^2}{A} = -a_{\text{sym}} \frac{(A-2Z)^2}{A}$$

Si può arrivare allo stesso risultato anche con calcoli più rigorosi.

Mettendo tutti i pezzi assieme, si ha la cosiddetta formula semiempirica di massa¹.

$$B(A, Z) = a_{\text{vol}} A - a_{\text{sup}} A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(A-2Z)^2}{A} \quad (1)$$

Adesso abbiamo un modello per l'energia di legame che non ha più il problema di spiegare l'esistenza di nuclei con un numero di protoni circa pari a quello dei neutroni. Il modello è in buon accordo con i dati sperimentali, riportati in figura 2, per nuclei grandi. Per nuclei piccoli (come l'elio), il modello sbaglia: infatti si basa su assunzioni che non sono per nulla realistiche in questi casi. Si può fare un fit con i dati sperimentali per trovare i seguenti valori delle costanti, riportati in tabella 1:

1.3 Nuclei più stabili

Possiamo provare a calcolare quale siano i nuclei più stabili. Un nucleo sarà tanto più stabile quanto più i singoli costituenti sono legati. Pertanto la

¹In realtà ci sarebbe un termine ulteriore, detto di *pairing*, che però a questo livello possiamo trascurare

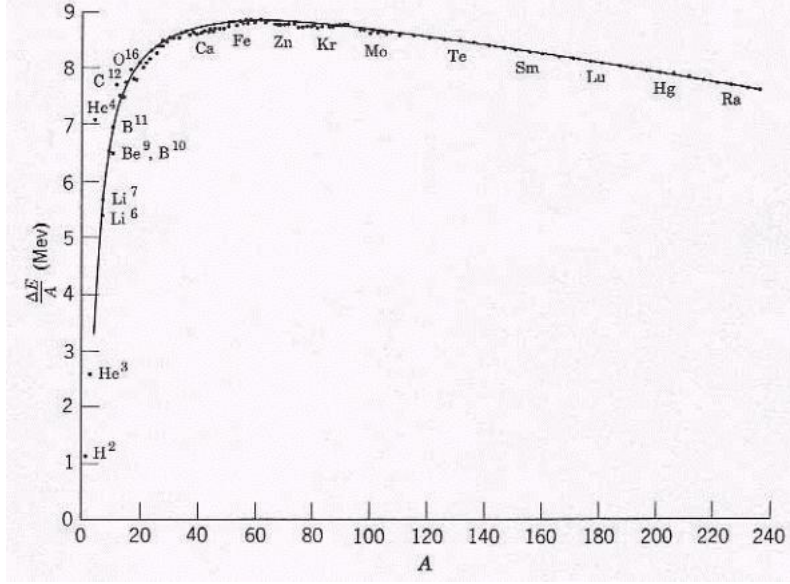


Figura 2: dati sperimentali e modello fittato per energia di legame per nucleone in funzione di A a Z migliore..

$a_{\text{vol}}[\text{MeV}]$	$a_{\text{sup}}[\text{MeV}]$	$a_c[\text{MeV}]$	$a_{\text{sym}}[\text{MeV}]$
15.76	17.81	0.711	23.7

Tabella 1: valori sperimentali dei coefficienti espressi in MeV ottenuti da fit. Si ricorda che $1 \text{ MeV} \simeq -1.6 \times 10^{-13} \text{ J}$ e che le energie tipiche di transizioni atomiche sono dell'ordine di $1 - 10 \text{ eV}$.

quantità da massimizzare è l'energia di legame per nucleone:

$$\frac{B}{A} = u(A, Z) = a_{\text{vol}} - a_{\text{sup}} \frac{1}{A^{1/3}} - a_c \frac{Z^2}{A^{4/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(A - 2Z)^2}{A^2} \quad (2)$$

Sebbene u dipenda da variabili fondamentalmente discrete, nel limite di grande numero di nucleoni (sia protoni che neutroni, visto che devono essere in numero bilanciato) è legittimo trattare queste variabili come circa continue e quindi derivarle invece di ridurci a prendere le differenze finite. Le condizioni da imporre contemporaneamente per trovare l'eventuale massimo di $u(A, Z)$ sono quindi:

$$\frac{\partial u}{\partial Z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial A} = 0$$

Come prima cosa, troviamo ad A fissato quale è il numero di protoni più conveniente $\bar{Z}(A)$. La condizione da imporre è la prima delle due condizioni

precedenti:

$$\frac{\partial u}{\partial Z} = 0 \Rightarrow \frac{a_c Z}{A^{4/3}} - 2a_{\text{sym}} \frac{A - 2Z}{A^2} = 0$$

Da cui si ottiene che il numero ottimale $\bar{Z}(A)$:

$$\bar{Z}(A) = \frac{1}{2} \frac{A}{1 + \frac{a_c}{4a_{\text{sym}}} A^{2/3}} \quad (3)$$

Si può ricavare facilmente il rapporto ottimale fra il numero di neutroni N e il numero di protoni Z ottimale:

$$\frac{N}{Z} = 1 + \frac{a_c}{2a_{\text{sym}}} A^{2/3} \quad (4)$$

Osserviamo come tendano ad esserci più neutroni che protoni per via della repulsione coulombiana, e come ci sia competizione fra questa e il termine di asimmetria. In effetti si osserva in figura 3 come per nuclei stabili ci sia un numero più elevato di neutroni.

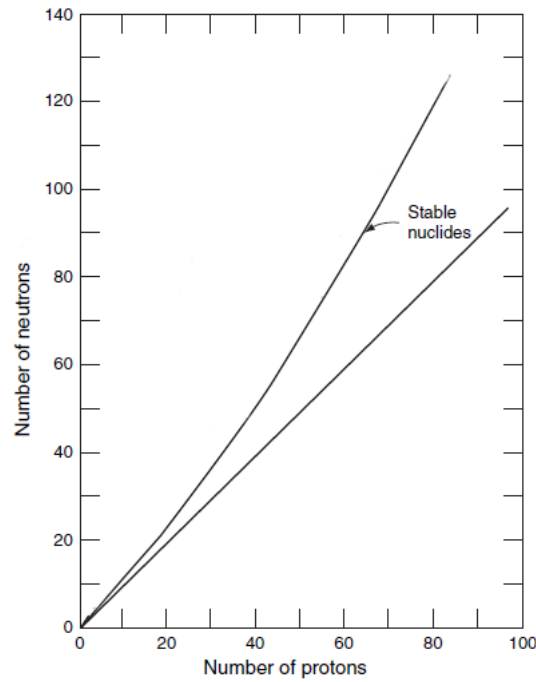


Figura 3: predizione per il rapporto ottimale N/Z .

Per trovare il nucleo più stabile, basta inserire nell'equazione 2 il valore di Z trovato nell'equazione 3 e minimizzare rispetto ad A . Il risultato del calcolo (che non riportiamo) dà come isotopo più stabile il rame ($A = 63$), vicino agli isotopi più stabili sperimentalmente: nickel ($A = 62$) e ferro ($A = 58$)

1.4 Modello a goccia “alternativo”

Sebbene ci siano forti evidenze sperimentali del fatto che la forza nucleare debba essere a corto raggio, possiamo chiederci quale sarebbe stata l'espressione per l'energia di legame nel caso in cui l'interazione nucleare fosse stata una forza a lungo raggio come quella di Coulomb $\propto \frac{1}{r^2}$. Cerchiamo di replicare i passaggi svolti sopra sotto le stesse assunzioni iniziali, ma rimuovendo l'ipotesi che la forza nucleare sia a corto raggio. Pertanto ogni nucleone porta una carica nucleare che è sempre attrattiva (esattamente come la massa origina sempre una forza gravitazionale attrattiva), e che genera una forza $\propto 1/r^2$. Le conclusioni che abbiamo tratto sulla geometria del nucleo sono identiche al punto precedente: infatti esse si basano solo sul fatto che i nucleoni sono sferette rigide che si attraggono, non dipendevano troppo dalla natura a corto raggio dell'interazione. Allora il calcolo dell'energia nucleare è esattamente identico a quello dell'energia elettromagnetica, con l'unica differenza che la carica nucleare totale è direttamente proporzionale al numero di nucleoni A :

$$U_{\text{nuc}} = a_{\text{nuc}} \frac{A^2}{A^{1/3}} = a_{\text{nuc}} A^{5/3}$$

da cui si ricava l'espressione alternativa per l'energia di legame:

$$B(A, Z) = a_{\text{nuc}} A^{5/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(A - 2Z)^2}{A} \quad (5)$$

Si noti come il fatto di avere la forza $\propto \frac{1}{r^2}$ evita di dover considerare correzioni superficiali come per la forza di contatto. Questo modello ovviamente non è in accordo con i dati sperimentali e tende a prediligere nuclei più massivi (A maggiore) rispetto a quello con la forza nucleare di contatto: una forza a lungo raggio riesce a vedere più nucleoni in questo caso.

1.5 Stima sezione d'urto nucleare

Adesso vogliamo studiare l'urto di due nuclei. In particolare, supponiamo di avere un nucleo fisso con peso atomico A_1 e Z_1 protoni. Abbiamo inoltre un fascio di nuclei con peso atomico A_2 e Z_2 protoni, il quale verrà fatto incidere sul nucleo bersaglio. Essenzialmente due nuclei interagiscono fra di loro via forza elettromagnetica (a lungo raggio) e forza nucleare (a corto raggio/di contatto). Vogliamo studiare come l'interazione nucleare faccia interagire il bersaglio con i nuclei del fascio. Per capire le proprietà dell'interazione nucleare, dobbiamo metterci in una condizione in cui questa forza sia dominante rispetto a quella coulombiana (i nuclei tenderanno a respingersi). Sotto le nostre assunzioni la forza nucleare è di contatto, perciò avverrà una reazione

nucleare (o comunque un evento causato da questa) soltanto se i due nuclei riescono a toccarsi:

$$d \leq r_1 + r_2 = r_0 \left(A_1^{1/3} + A_2^{1/3} \right)$$

Ciò avviene quando l'energia cinetica K_2 del fascio è pari o superiore alla cosiddetta *barriera coulombiana*, ossia l'energia potenziale fra i due nuclei interagenti:

$$K_2 \gg \frac{Z_1 Z_2}{r_1 + r_2} = \frac{Z_1 Z_2}{r_0 \left(A_1^{1/3} + A_2^{1/3} \right)}$$

Sotto questa ipotesi, tutti i nuclei del fascio vincono la barriera coulombiana, ed eventuali reazioni o urti saranno da attribuire all'interazione forte. Quanti sono i nuclei del fascio che effettivamente reagiscono in questo regime? La condizione necessaria affinché un nucleo del fascio reagisca con il bersaglio è che lo tocchi. In termini geometrici la distanza fra i centri dei due nuclei deve essere inferiore alla somma dei due raggi $r_1 + r_2$. Pertanto la “sezione” rilevante del fascio incidente è costituita dal cerchio che ha centro nel nucleo bersaglio e raggio pari a $r_1 + r_2$, quindi ha superficie

$$\sigma = \pi r_0^2 \left(A_1^{1/3} + A_2^{1/3} \right)^2$$

Inoltre questa condizione è sufficiente. Infatti per energie del fascio non troppo elevate, possiamo assumere i nucleoni come “impenetrabili” (in accordo con le nostre ipotesi iniziali). Pertanto nel momento in cui questi si toccano la forza nucleare farà sì che si respingano e quindi si avrà di fatto che il bersaglio ha reagito con il fascio. Per energie più alte, si avranno reazioni che vanno a cambiare la natura del nucleo bersaglio: questo si può scindere o addirittura fondere con il bersaglio. Il punto è che in entrambi i casi il fatto che i nucleoni siano impenetrabili fa sì che non sia mai contemplato il caso in cui questi si passano “attraverso”. Quindi la sezione del fascio che effettivamente interagisce tramite forza forte con il bersaglio è proprio σ .

2 Crimini di guerra in Medio Oriente

La raccolta di informazioni da zone di guerra è spesso un compito difficile, a causa delle difficoltà di comunicazione, e della necessità di distinguere le notizie vere dalla propaganda. Per questo, per i giornalisti investigativi è importante fare dei controlli sul materiale audiovisivo eventualmente disponibile. Questa è un'immagine di un cratere in una strada:



1. Usando il fotogramma qui sopra e un righello, stimare le dimensioni del cratere.

Un'importante verifica da fare sulle immagini è la *geolocalizzazione*: controllare se il luogo ritratto su una foto corrisponde effettivamente al luogo dove sarebbe avvenuto l'evento. Quella in Figura 4 è una foto aerea, presa da Google Earth, delle vicinanze del punto dove è caduta la bomba dell'immagine precedente.

2. Identificare dei punti nella ripresa da terra con elementi nella foto aerea in Figura 4.
3. Stimare la posizione del punto in cui è avvenuto l'impatto.

3 Altezza delle montagne

Stimare un limite massimo per l'altezza delle montagne sulla Terra, usando i seguenti dati:



Figura 4: foto aerea.

- Costante di Planck $\hbar$;
- Costante di gravitazione universale G ;
- Permittività elettrica del vuoto $4\pi\epsilon_0$;
- Carica dell'elettrone $-e$;
- Numero di protoni e neutroni nella Terra $N_{\oplus}$.

Suggerimenti:

1. Usando l'analisi dimensionale, fare una stima delle dimensioni di un atomo.
2. Usando il risultato precedente, stimare l'energia di un atomo. L'energia di legame tra due atomi e l'energia richiesta per sciogliere un solido saranno frazioni di questa energia.
3. Eguagliando l'energia potenziale gravitazionale con l'energia per sciogliere il solido, trovare l'altezza a cui la base di una montagna non regge più la pressione e si disgrega.

4 Piano inclinato

Una massa m , inizialmente ferma, si trova in cima ad un piano inclinato di altezza h e angolo θ .

1. Usando la conservazione dell'energia, trovare la velocità finale v_f con cui la massa arriva a terra.
2. Consideriamo ora il sistema di riferimento che si muove a velocità v_f : all'inizio la massa ha velocità $-v_f$ e altezza h , e alla fine è ferma ad altezza 0. L'energia si conserva in questo sistema di riferimento?

5 Matita in equilibrio sulla punta

Trovare un limite superiore al tempo in cui possiamo tenere una matita ben temperata in equilibrio sulla sua punta, usando il principio di indeterminazione. Suggestimenti:

1. Tradurre il principio di indeterminazione in una disuguaglianza che coinvolge l'angolo θ_0 a cui si trova inizialmente la matita e la sua velocità angolare iniziale ω_0 .
2. Usando l'approssimazione $\theta(t) \ll 1$, scrivere e risolvere l'equazione del moto della matita, in funzione delle condizioni iniziali.

6 Tempi di urinazione dei mammiferi

Misurando il tempo t_u impiegato ad urinare dagli animali dello zoo di Atlanta, dei ricercatori hanno constatato che esso non sembra dipendere dalle dimensioni e dalla massa dell'animale, ed è in media sempre uguale a 21 s (sebbene con una grande deviazione standard, pari a 13 s).

Usando questa informazione, e argomenti di analisi dimensionale, determinare se la principale forza responsabile della minzione sia la gravità oppure la pressione del muscolo, e se il comportamento dell'urina sia dominato dall'inerzia o dalla viscosità. Suggestimento:

1. Se l'urinazione è dominata dalla gravità, il tempo dovrà dipendere dalla densità di forza gravitazionale ρg ; altrimenti, dipenderà dalla pressione P fornita dal muscolo detrusore. Se la reazione dell'urina è dominata dalla sua massa, il tempo deve dipendere dalla densità ρ del liquido; in caso contrario, la grandezza dominante sarà la viscosità μ . Trovare una formula per il tempo di minzione in questi quattro casi.

7 Momenti di dipolo e spin

L'elettrone è una particella elementare dotata di carica elettrica $e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ e massa $m = 9.31 \times 10^{-31} \text{ kg}$. Inoltre possiede un momento di dipolo magnetico $\mu_e \simeq \frac{e\hbar}{2m} = -9.2 \times 10^{-24} \text{ JT}^{-1}$.

7.1 Origine del dipolo magnetico

Vogliamo studiare una eventuale origine del momento magnetico dell'elettrone. Brevemente, introduciamo il concetto di dipolo magnetico per una spira percorsa da corrente. Si consideri una spira planare (filo chiuso curvilineo che giace su un piano) percorsa da una corrente I ed immersa in un campo magnetico esterno $\vec{B} = B\hat{z}$ ortogonale al piano della spira.

1. Si mostri che il momento torcente $\vec{\tau}$ che agisce su una spira è pari a

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

dove si è definito il momento magnetico $\vec{\mu}$ proporzionale al vettore areolare $\vec{S}$ definito come il vettore ortogonale al piano della spira, di modulo pari alla superficie di essa e verso preso tramite regola della mano destra rispetto alla corrente I circolante. (Si veda la figura 5 per la relazione fra verso di percorrenza di I e verso del dipolo μ):

$$\vec{\mu} = \vec{S}I$$

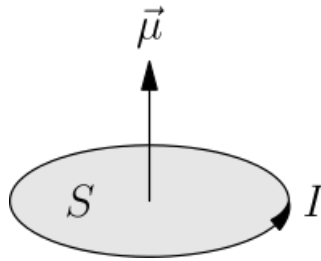


Figura 5: momento magnetico di una spira planare.

hint: si calcoli il momento di dipolo magnetico prima per una spira rettangolare. Si osservi che non abbiamo specificato il punto rispetto al quale calcolare il momento (sia magnetico che torcente). Perché?

7.2 Modello classico dell'elettrone

Adesso si consideri un modello in cui l'elettrone è una sfera uniformemente carica.

1. Assumendo che la massa dell'elettrone sia originata interamente dall'interazione elettromagnetica, si calcoli il raggio dell'elettrone r_e (Il cosiddetto *raggio classico*).
2. Si calcoli in questa configurazione geometrica la velocità angolare ω a cui deve ruotare su se stesso l'elettrone per avere un momento di dipolo magnetico pari al valore misurato sperimentalmente μ . Adesso abbiamo un modello classico per l'elettrone. Si definisce *spin* $\vec{s}$ dell'elettrone il momento angolare intrinseco dell'elettrone, ossia rispetto al proprio centro nel sistema di riferimento in cui è a riposo.
3. Calcolare il fattore di proporzionalità g fra lo spin e il momento di dipolo magnetico:

$$g\vec{s} = \vec{\mu}$$

4. *facoltativo* E se l'elettrone fosse un cubo quanto varrebbe la costante di proporzionalità fra spin e momento di dipolo magnetico?

7.3 Elettrone in campo magnetico

Si consideri un elettrone immerso in un campo magnetico esterno $\vec{B} = B\hat{z}$ con intensità costante. Per quanto detto in precedenza, se immergiamo l'elettrone in un campo magnetico esterno $\vec{B} = B\hat{z}$ nel sistema di riferimento in cui l'elettrone è a riposo le equazioni per l'evoluzione dello spin sono:

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{\mu} \times \vec{B} = g\vec{s} \times \vec{B} \quad (6)$$

1. Se lo spin $\vec{s}$ forma inizialmente un angolo θ con il campo magnetico, quale è la sua evoluzione temporale?
2. Si dimostri che il modulo dello spin è una costante del moto. Adesso si consideri l'elettrone in moto con una velocità iniziale $\vec{v} = v\hat{x} \ll c$. Si definisce polarizzazione longitudinale $\hat{e}_1$ il valore della direzione dello spin rispetto alla direzione della velocità istantanea dell'elettrone nel sistema del laboratorio. (Trascurare qualsiasi effetto relativistico nel passare dal sistema a riposo a quello del laboratorio)
3. Calcolare l'evoluzione temporale della polarizzazione longitudinale $\hat{e}_1$

7.4 Dipoli elettrici

Adesso introduciamo il concetto di dipolo elettrico. Data una distribuzione rigida di cariche, il dipolo elettrico rispetto ad una origine O è definito come:

$$\vec{d}_e = \sum_i q_i \vec{r}_i$$

con $\vec{r}_i$ il vettore posizione della carica i -esima rispetto all'origine O .

1. Mostrare che nel nostro modello dell'elettrone sferico il momento di dipolo elettrico è nullo se calcolato rispetto al suo centro. Per capire quale può essere l'effetto di un campo elettrico su un dipolo elettrico, si considera un problema più semplice. Abbiamo una distribuzione rigida (ossia le cui distanze relative non variano se il corpo è sottoposto a forze esterne) di cariche complessivamente neutra:

$$\sum_i q_i = 0$$

2. Si calcoli il momento di dipolo elettrico $\vec{d}$ di questa distribuzione (si noti che non abbiamo specificato l'origine rispetto alla quale calcolare il dipolo: perchè? Immergiamo questo dipolo in un campo elettrico $\vec{E}$).
3. Mostrare che si ha un momento torcente sul dipolo elettrico pari a:

$$\vec{\tau} = \vec{d} \times \vec{E} \quad (7)$$

Si osservi che anche qui non è necessario specificare il punto rispetto al quale calcolare il momento torcente.

7.5 Momento di dipolo elettrico del neutrone

Per testare questo modello, cerchiamo di capire quali possono essere le conseguenze sperimentali della presenza di un dipolo elettrico nel moto di qualche particella. Per semplicità, invece di studiare l'effetto su una particella carica, prendiamo in esame il neutrone. Il neutrone, sebbene sia una particella elettromagneticamente neutra, ha un momento di dipolo magnetico allineato con lo spin:

$$\mu_n = -9.6 \times 10^{-27} \text{ JT}^{-1}, g\vec{s} = \vec{\mu}_n$$

Per un neutrone (ma anche per l'elettrone), ci sono ottimi motivi per supporre che un eventuale momento di dipolo elettrico sia allineato al suo spin $\vec{s}$.

$$g'\vec{s} = \vec{d}_e$$

(per informazione: allo stato attuale, sia sperimentale che teorico, il momento di dipolo elettrico del neutrone è nullo, o se c'è, è davvero molto piccolo)
Adesso, nel sistema di riferimento in cui il neutrone è fermo accendiamo sia un campo magnetico che un campo elettrico.

1. Studiare il moto dello spin in questo caso.

8 Multiplo scattering

Quando una particella carica passa attraverso un materiale di spessore orizzontale L (asse x , questa rimbalzerà sugli atomi che incontra e tenderà a cambiare direzione. Dopo aver attraversato tutta la lastra, questa uscirà con una certa velocità finale. Chiameremo Θ l'angolo fra la velocità iniziale e la proiezione sul piano xy della velocità finale. Si assuma che inizialmente la particella entri perpendicolarmente alla lastra, ossia con la sua velocità diretta lungo l'asse x

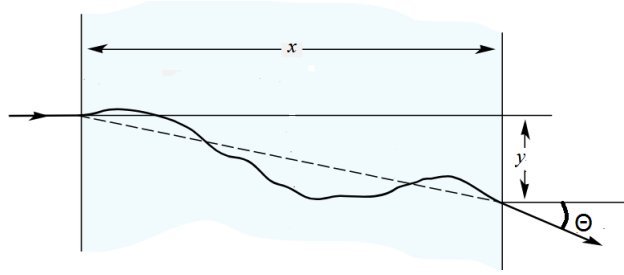


Figura 6: particella entrante nel materiale e uscente con angolo proiettato sul piano xy pari a Θ .

Vogliamo studiare un modello semplice per capire quale può essere la direzione finale dopo aver attraversato la lastra della particella entrante. Supponiamo di poter suddividere la lastra in N piccoli tratti orizzontali ciascuno lungo Δx , e che quando la particella percorre l' i -esimo tratto si ha che questa urta contro un atomo del materiale e cambia direzione in modo che l'angolo piano fra le proiezioni delle due velocità (prima e dopo l'urto) sia un certo θ_i . *Attenzione:* θ_i non è l'angolo fra la direzione dopo l'urto i -esimo e la direzione iniziale, ma fra la $i - 1$ -esima e la i -esima direzione.

E' ragionevole supporre che ad ogni urto il θ effettivamente realizzato sia estratto da una distribuzione molto stretta (circa gaussiana) di media nulla:

$$\mathbb{E}[\theta] = 0$$

e piccola varianza $\sigma^2 \ll 1$, definita come:

$$\sigma^2 = \text{Var}(\theta) = \mathbb{E}[(\theta - \mathbb{E}[\theta])^2]$$

dove con $\mathbb{E}[x]$ si intende il valore di aspettazione della variabile aleatoria x . Si osservi che, se θ è a media nulla, vale:

$$\text{Var}(\theta) = \mathbb{E}[\theta^2]$$

Inoltre si possono supporre le distribuzioni degli angoli indipendenti ad ogni urto.

1. Calcolare quanto vale in media l'angolo Θ fra la proiezione sul piano xy della velocità finale e la velocità iniziale. Calcolarne anche la varianza $\text{Var}(\Theta)$.
2. Calcolare quanto vale la media μ della coordinata y e la sua varianza $(y - \mu)^2$ dopo che la particella ha attraversato lo spessore L del materiale.
3. Calcolare in media quanto è lunga la distanza h percorsa dalla particella fra l'entrata e l'uscita dal materiale.

hint: per due eventi indipendenti, usare la seguente proprietà del valor medio del prodotto:

$$\mathbb{E}[\theta_i \cdot \theta_j] = \mathbb{E}[\theta_i] \cdot \mathbb{E}[\theta_j]$$

9 Processo Joule-Thomson

Si ha un cilindro isolato termicamente dall'esterno diviso in due parti da una membrana semipermeabile, come mostrato in figura 7.

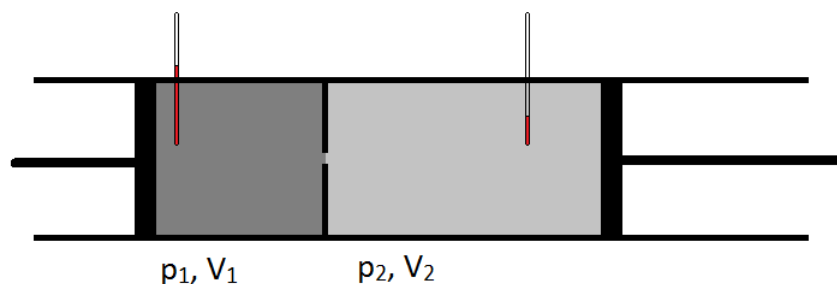


Figura 7: setti separati da membrana.

La membrana è tale da consentire un lento passaggio del gas fra i due setti. I volumi delle due camere sono variabili tramite pistoni. Inizialmente si ha un gas (non necessariamente perfetto) all'equilibrio nel primo setto a pressione p_1 e volume V_1 . Invece il secondo setto è vuoto e ha volume iniziale nullo. Durante tutto il processo, i pistoni vengono mossi in modo che la pressione del primo setto sia p_1 , mentre quello del secondo p_2 . Alla fine del processo, si avrà un certo volume V_2 di gas all'equilibrio a pressione p_2 nel secondo setto e il primo completamente vuoto.

1. Trovare una quantità conservata durante il processo
2. Nel caso di gas perfetto, la temperatura del gas iniziale è uguale a quella alla fine del processo?

10 Crimini di guerra

1. Se la foto è stata scattata ad un'altezza h da terra, un punto del suolo a distanza d verrà visto ad un angolo $\theta = \arctan(h/d)$ rispetto all'orizzonte. Chiamiamo d_0 l'ignota distanza in orizzontale tra il punto in cui è stata scattata la fotografia il punto più vicino ivi raffigurato, e con θ_{max} l'angolo tra l'orizzonte e il suddetto punto. Non abbiamo le informazioni per convertire l'angolo in un punto della foto (avremmo bisogno di conoscere la distanza focale della fotocamera e l'apertura angolare con cui è stata scattata). In mancanza di idee migliori, possiamo presumere che in prima approssimazione l'angolo dipenda linearmente dall'altezza y del pixel della foto, cioè che

$$\theta = \left(1 - \frac{y}{y_{orizzonte}}\right) \theta_{max}$$

La distanza fisica del punto varrà quindi

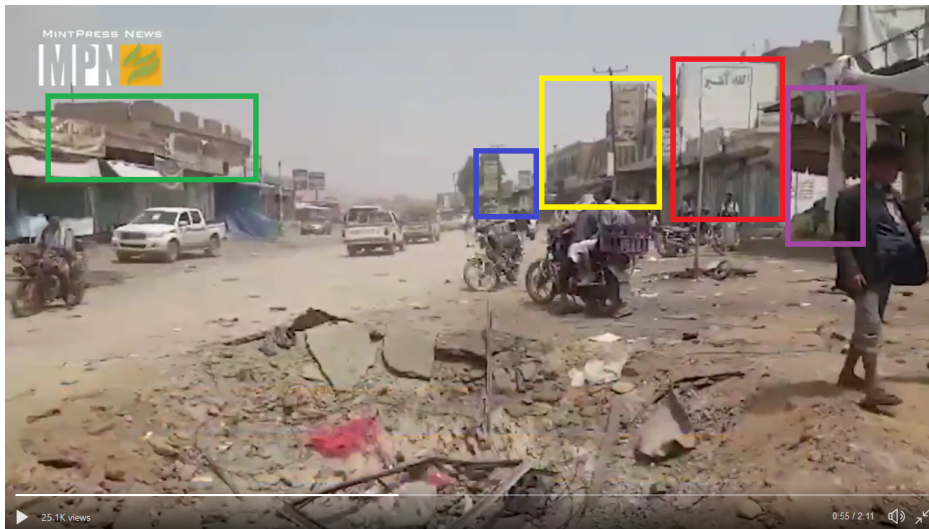
$$y = h \cotan \theta = h \cotan \left[\left(1 - \frac{y}{y_{orizzonte}}\right) \theta_{max} \right]$$

. La linea dell'orizzonte attraversa il petto dell'uomo con la giacca nera in primo piano, quindi stimiamo $h \simeq 1,5$ m. Nella foto, l'orizzonte si trova a $y_{orizzonte} = 540$ pixel.

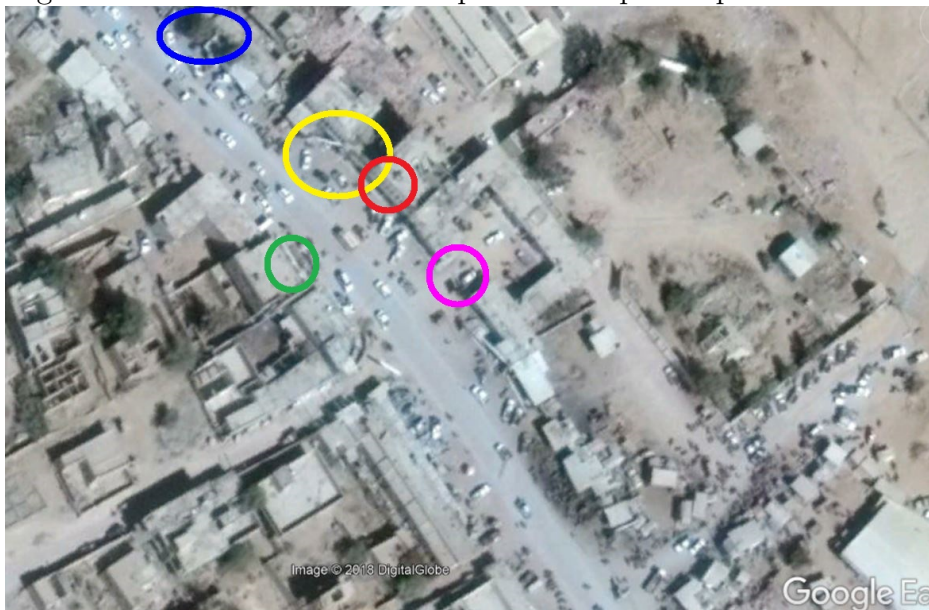
L'angolo θ_{max} sarà certamente minore di novanta gradi, ma non di molto; per mancanza di idee migliori, prendiamo proprio $\theta_{max} = \frac{\pi}{2}$. Il centro del cratere si trova a circa $y_0 \simeq 100$ pixel, che con $\theta_{max} = \pi/2$ corrisponde a $d_0 \simeq 0,3h$. Il punto più lontano del cratere è a $y' = 340$ pixel, che corrispondono a una distanza $d' = 1,5h$. Quindi il raggio del cratere è $R = d' - d_0 \simeq 1,2h \simeq 1,8$ m.

Per controllo, consideriamo il furgoncino bianco al centro della strada. Le ruote anteriori e posteriori toccano terra, nella versione digitale della foto, a $y_1 = 480$ pixel e $y_2 = 471$ pixel. Usando $y_{orizzonte} = 520$ pixel, le distanze corrispondenti sono $d_1 = 8,2h$ e $d_2 = 6,7h$, quindi la distanza tra le ruote verrebbe di $d_1 - d_2 = 1,5h \simeq 2,3$ m, che sembra giusta perlomeno entro un fattore 2.

2.



Segniamo alcuni edifici che corrispondono a quelli ripresi nel video.



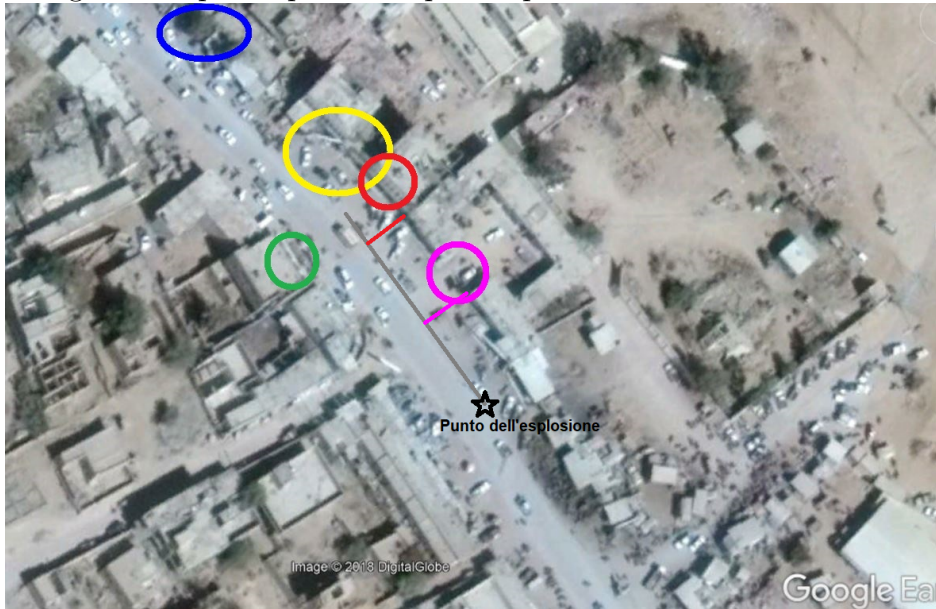
3. I bordi delle strade ci permettono di individuare il punto di fuga. Rispetto al punto di fuga, l'angolo tra il bordo destro della strada e il centro del cratere è circa i due quinti dell'angolo fra i due bordi della strada: questo ci permette di tracciare una linea di possibili posizioni per il cratere.



Resta da stimare la posizione nella direzione di percorrenza della strada. I bordi degli edifici, nelle facciate perpendicolari alla strada, sembrano orizzontali nella foto: presumiamo quindi che a uno stessa altezza y nella foto corrisponda una stessa distanza lungo la strada.

Scegliamo due punti di riferimento, per esempio la traversa che porta al cortiletto (punto di riferimento rosa), e la palazzina piú alta con la scritta (punto di riferimento rosso). La traversa inizia a $y_a = 500$ pixel, mentre la palazzina tocca il suolo a $y_a = 520$ pixel. Usando la formula adottata nel punto precedente, le corrispondenti distanze sarebbero $d_a = 8,6h$ e $d_b = 17,2h$. I due punti di riferimento distano quindi $d_b - d_a = 8,6h$, e questo dà una scala per le distanze nella foto aerea. In particolare, la traversa dovrebbe

essere circa a metà distanza tra il cratere e la palazzina. Questo ci permette di segnare un punto probabile per l'esplosione della bomba:



11 Altezza delle montagne

Combinando le grandezze disponibili per ottenere una lunghezza otteniamo

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} \simeq 5.2 \times 10^{-11} \text{ m}$$

La costante a_0 , chiamata *raggio di Bohr*, rappresenta le dimensioni tipiche di un atomo (se avessimo invece usato la massa del protone, avremmo ottenuto la scala di lunghezza del nucleo).

Se il protone e l'elettrone fossero cariche puntiformi classiche a distanza a_0 , la loro energia elettrostatica sarebbe

$$E = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} = \frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \simeq 2.2 \times 10^{-18} \text{ J}$$

Questa quantità di energia è talvolta usata come unità di misura in chimica, col nome di Rydberg: $1 \text{ Ry} = \frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2}$.

La grandezza tipica di una molecola inorganica sarà di qualche raggio di Bohr: $R = fa_0$, con f dell'ordine delle unità.

Chiamiamo A il numero di nucleoni medio di una molecola (per il silicio, $A \sim 50$). Se una molecola ha massa AM , la sua energia potenziale gravitazionale è $AMgH$. L'energia di liquefazione dipenderà dalla forza dei legami

tra le molecole: poniamo $E_l = \xi B$. Ci aspettiamo che β sia piccolo (fornendo l'intera energia di legame, il solido si vaporizzerebbe). Otteniamo quindi, come condizione per far sciogliere la base della montagna,

$$H = \xi \gamma \frac{\text{Ry}}{AMg} = \xi \gamma \frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 h^2 AMg}$$

Scegliendo per esempio $\xi = 0,05$ e $\gamma = 0,2$ (questi valori sono vicini a quelli tipici per un solido), si ottiene la stima $H \sim 26$ km.

Per completare il problema, dobbiamo esprimere l'accelerazione di gravità g in funzione dei dati del problema. Sappiamo che

$$g = \frac{GN_{\oplus}M}{R_{\oplus}^2}$$

dove $R_{\oplus}$ è il raggio della Terra. Quest'ultimo si può stimare rozzamente, a partire dal raggio di una singola molecola, come

$$R_{\oplus} \sim \left(\frac{N_{\oplus}}{A}\right)^{1/3} R = \left(\frac{N_{\oplus}}{A}\right)^{1/3} f a_0$$

Sostituendo tutto, otteniamo

$$H = \xi \gamma f^2 \frac{e^2}{GM^2} \frac{1}{N_{\oplus}^{1/3} A^{5/3}} a_0 = \xi \gamma f^2 \frac{e^2}{GM^2} \frac{1}{N_{\oplus}^{1/3} A^{5/3}} \frac{4\pi\epsilon_0 h^2}{me^2}$$

12 Piano inclinato

Nel sistema di riferimento solidale col piano inclinato, la forza di reazione vincolare $\vec{N} = (N \sin \theta, N \cos \theta) = (mg \cos \theta \sin \theta, mg \cos^2 \theta)$ è perpendicolare allo spostamento $d\vec{S} = (dS \cos \theta, -dS \sin \theta)$ (verificare che il loro prodotto scalare è 0) e quindi non compie lavoro. Invece, nel sistema di riferimento in moto a velocità v_f , la forza vincolare è sempre $\vec{N}' = (mg \cos \theta \sin \theta, mg \cos^2 \theta \cos \theta)$, ma lo spostamento diventa $d\vec{S}' = (dS \cos \theta - v_f dt, -dS \sin \theta)$. Il vincolo del piano inclinato compie dunque un lavoro $dL = \vec{N}' \cdot d\vec{S}' = -mg \cos \theta \sin \theta v_f \sin \theta dt$. La massa raggiunge il suolo $\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g \sin \theta}}$. Quindi, moltiplicando per il tempo totale, ritroviamo il lavoro mancante $L = 2mgh$.

Il piano inclinato spinge la massa, frenandola mentre cade.

13 Matita in equilibrio sulla punta

Proviamo a mettere in equilibrio una matita di massa m e lunghezza $2l$ (in modo che il centro di massa sia a distanza l). Inevitabilmente, non la metteremo esattamente a $\theta = 0$, ma a un certo angolo θ_0 . Inoltre, non riusciremo a metterla esattamente ferma, ma avrà una certa velocità angolare iniziale ω_0 .

La componente tangenziale della forza di gravità è pari a $mg \sin \theta \approx mg\theta$, e l'accelerazione del centro di massa si può scrivere come $a = l\alpha$ (dove α è l'accelerazione angolare). Quindi

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \frac{g}{l}\theta(t)$$

Questa è un'equazione differenziale lineare, omogenea e del secondo ordine. La sua soluzione più generale è:

$$\theta(t) = Ae^{t/\tau} + Be^{-t/\tau}$$

con $\tau = \sqrt{l/g}$. Le condizioni iniziali sono che $\theta(0) = \theta_0$, e $\omega(0) = \omega_0$. Da questo si può trovare $A = \frac{1}{2}(\theta_0 + \omega_0\tau)$ e $B = \frac{1}{2}(\theta_0 - \omega_0\tau)$. L'esponentiale negativo va a 0, e quindi ben presto rimarrà solo

$$\theta(t) \approx Ae^{t/\tau} = \frac{1}{2}(\theta_0 + \omega_0\tau)e^{t/\tau}$$

Il principio di indeterminazione ci dice che $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$, cioè che $(l\theta_0)(ml\omega_0) \geq \frac{\hbar}{2}$. Questo vuol dire che

$$\omega_0 \geq \frac{\hbar}{2ml^2\theta_0}$$

e quindi che

$$\theta(t) \geq \frac{1}{2} \left(\theta_0 + \frac{\hbar\tau}{2ml^2\theta_0} \right) e^{t/\tau}$$

Dalla disuguaglianza tra le medie aritmetica e geometrica, $x + \frac{a^2}{x} \geq a$, e quindi

$$\theta(t) \geq \frac{1}{2} \left(\theta_0 + \frac{\hbar\tau}{\sqrt{2}ml^2\theta_0} \right) e^{t/\tau} \geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar\tau}{\sqrt{2}ml^2}} e^{t/\tau} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar\tau}{\sqrt{2}ml^2}} e^{t/\tau}$$

Ponendo $\theta = 1$ e risolvendo per t , troviamo che la matita può resistere in equilibrio per un tempo massimo

$$t \leq \frac{1}{4} \sqrt{\frac{l}{g}} \ln \left(\frac{\sqrt{2}m^2l^3g}{\hbar^2} \right)$$

La costante di Planck è $\hbar = 1,07 \cdot 10^{-34}$ Js. Inserendo valori ragionevoli per massa e lunghezza della matita, possiamo calcolare il valore massimo di t .

14 Tempi di urinazione dei mammiferi

Supponiamo che la taglia dell'animale, le dimensioni della vescica che la lunghezza dell'uretra siano esprimibili in funzione di una stessa lunghezza caratteristica L .

Come primo caso, supponiamo che l'urina sia un fluido ideale, e che la forza nel processo di urinazione sia quella di gravità. In questo caso, il tempo di urinazione sarà funzione della densità di forza gravitazionale sull'urina, ρg (di dimensioni $[l]^{-2}[m]^1[t]^{-2}$), della densità dell'urina ρ ($[l]^{-3}[m]^1$), e della lunghezza dell'uretra, proporzionale a quella dell'animale L . Dobbiamo combinarle per ottenere un tempo. Imponendo

$$t_u \propto (\rho g)^\alpha \rho^\beta L^\gamma$$

troviamo che la soluzione è

$$t_u \propto (\rho g)^{-1/2} \rho^{1/2} L^{1/2} = \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Dipende da L , quindi non va bene.

Proviamo quindi a supporre che la forza principale che spinge fuori l'urina non sia la gravità, ma le contrazioni muscolari. Oltre che di ρ e di L , il tempo di minzione sarà allora funzione della pressione P fornita dal muscolo detrusore, di dimensione $[l]^{-1}[m]^1[t]^{-2}$. Ponendo quindi

$$t_u \propto (P)^\alpha \rho^\beta L^\gamma$$

troviamo

$$t_u \propto (P)^{-1/2} \rho^{1/2} L^1 = L \sqrt{\frac{\rho}{P}}$$

Ancora peggio: dipende linearmente dalla lunghezza.

Dobbiamo tirare fuori e sperimentare qualche altra costante. Invece che pensare che la caratteristica principale dell'urina sia la sua densità ρ , possiamo usare la sua viscosità η (scegliamo o l'una o l'altra, perché altrimenti avremmo tre equazioni e quattro incognite). La viscosità ha dimensioni $[l]^{-1}[m]^1[t]^{-1}$. Se la forza dominante è la gravità, allora

$$t_u \propto (\rho g)^\alpha \eta^\beta L^\gamma$$

che ha soluzione

$$t_u \propto (\rho g)^{-1} \eta^1 L^{-1} = \frac{\eta}{\rho g L}$$

In questo caso, gli animali più grandi urinerebbero più velocemente.

Rimane da provare il caso di un'urina viscosa e spinta prevalentemente dalla pressione del muscolo. In questo caso, le costanti in gioco sono la pressione del muscolo detrusore P , la viscosità η e la scala di lunghezza L . Ponendo

$$t_u \propto (P)^\alpha \eta^\beta L^\gamma$$

troviamo

$$t_u \propto (P)^{-1} \eta^1 L^0 = \frac{\eta}{P}$$

che non dipende dalle dimensioni dell'animale, in accordo con le osservazioni.

Di conseguenza, possiamo supporre che la principale forza responsabile dell'urinazione sia la pressione del muscolo, e che la risposta del fluido sia dominata dalla viscosità e non dall'inerzia.

15 Momenti di dipolo e spin

15.1 Origine del dipolo magnetico

1. E' facile mostrare che per una spira rettangolare in effetti vale la relazione desiderata se calcoliamo il momento torcente $d\vec{\tau}$ che agisce su di essa rispetto al suo centro. Inoltre il momento torcente agente sulla singola spira non dipende dal polo usato per calcolarlo. Per mostrarlo, proviamo a calcolare il momento torcente $\vec{\tau}'$ rispetto ad una origine O' in modo che $O'\vec{O} = \vec{b}$. Si ha che, detta $\vec{r}$ la posizione rispetto a O del tratto infinitesimo $d\vec{l}$ della spira, il momento torcente totale agente su di essa rispetto ad O' è

$$\vec{\tau}' = I \int (\vec{r} + \vec{b}) \times (d\vec{l} \times \vec{B}) = \vec{\tau} + \vec{b} \times \left(-\vec{B} \times \int d\vec{l} \right)$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che $\vec{b}$ e $\vec{B}$ sono vettori costanti e possono essere portati fuori dall'integrale. L'eventuale differenza fra i momenti torcenti è quindi:

$$\vec{b} \times \left(-\vec{B} \times \int d\vec{l} \right) = 0$$

Dove abbiamo utilizzato il fatto che la spira è chiusa e quindi l'integrale dei $d\vec{l}$ è 0. Un argomento del tutto simile funziona pure per il momento magnetico.

L'idea adesso è di decomporre la spira planare in somma di spire quadrate infinitesime, con le correnti I che le percorrono disposte in modo da risultare non nulle solo sul bordo della spira iniziale (nell'interno si vanno sempre a sovrapporre due correnti di segno opposto). Il momento torcente totale $\vec{\tau}$ agente sulla spira è somma dei momenti torcenti infinitesimi $d\vec{\tau}$ agenti sulle singole spirette (si possono sommare senza preoccuparsi del polo scelto visto la loro indipendenza da questo). Integrando sulle spirette (ossia sulla superficie A delimitata dalla spira) si ottiene:

$$\int_A d\vec{\tau} = \left(\int_A d\vec{\mu} \right) \times \vec{B} = \left(\int_A I d\vec{S} \right) \times \vec{B} = I \vec{S} \times \vec{B} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

dove si è definito il momento magnetico totale $\vec{\mu}$ sommando i singoli contributi delle spirette.

15.2 Modello classico dell'elettrone

1. Per calcolare l'energia elettrostatica di una sfera uniformemente carica (densità di carica $\rho = e/V$) si suddivide la sfera in gusci sferici. Il volumetto infinitesimo di un guscio compreso fra r e $r + dr$ è:

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

da cui la sua carica è:

$$dQ = \rho dV = 4\pi\rho r^2 dr$$

Il guscio non risente dell'attrazione dei gusci più esterni per il secondo teorema dei gusci sferici. Per il primo teorema dei gusci sferici i gusci più interni agiscono su di esso come una carica puntiforme posta nel centro della sfera con carica pari alla carica totale dei gusci interni $Q(r) = \frac{4\pi}{3}\rho r^3$. Pertanto segue che la sua energia elettrostatica è:

$$k \frac{Q(r) dQ}{r} = k \frac{16\pi^2}{3} \rho^2 r^4 dr$$

dove $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$. Integrando l'energia per tutti i gusci si ottiene:

$$U = k \frac{16\pi^2}{3} \rho^2 \int_0^{r_e} r^4 dr = k \frac{16\pi^2}{15} \rho^2 r_e^5 = k \frac{3}{5} \frac{e^2}{r_e}$$

dato che l'energia dell'elettrone a riposo è $U = mc^2$, si ha:

$$r_e = k \frac{3}{5} \frac{e^2}{mc^2} \simeq 1.7 \times 10^{-15} \text{ m}$$

Nella definizione di raggio classico dell'elettrone spesso si omette il fattore numerico $3/5$.

2. Per facilitare il calcolo, possiamo immaginare che l'elettrone sferico sia costituito da tante spire circolari con i centri allineati rispetto all'asse di rotazione, come si può vedere in figura 8.

La corrente che scorre in una spiretta di raggio r è pari alla carica dQ contenuta nella porzione di sfera che costituisce la spira diviso il periodo di rotazione $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Infatti la carica che attraversa una data sezione della spira in un tempo infinitesimo dt è $dQ \frac{dt}{T}$ per un semplice argomento di proporzionalità. Pertanto:

$$dI = dQ \frac{\omega}{2\pi} = \rho 2\pi r^2 \sin \theta dr d\theta \frac{\omega}{2\pi}$$

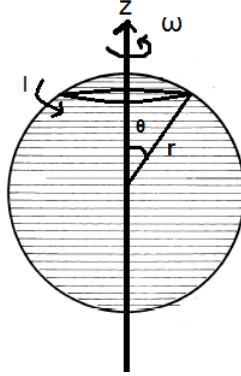


Figura 8: elettrone sferico costituito da tante spire coassiali e concentriche.

. Per quanto già detto, il momento magnetico infinitesimo associato a questa spira è:

$$d\vec{\mu} = dI\pi r^2 \sin^2 \theta \hat{z} = \rho\pi\omega r^4 \sin^3 \theta dr d\theta \hat{z}$$

Integrando si ottiene il momento magnetico totale dell'elettrone

$$\vec{\mu} = \frac{1}{5}e\omega R^2 \hat{z}$$

Invertendo si può ottenere il valore della frequenza di rotazione.

3. In modo del tutto analogo si può calcolare il momento angolare della sfera. Possiamo trattare l'elettrone come sfera rigida, per cui vale la pena di calcolare il momento di inerzia della sfera e poi sfruttare la ben nota formula che lega il momento angolare al momento di inerzia. (Per le notazioni geometriche ci si può riferire alla figura 8). Ogni anellino avrà un momento di inerzia infinitesimo pari a:

$$d\mathcal{I} = r^2 \sin^2 \theta \tilde{\rho} dV = r^4 \tilde{\rho} 2\pi \sin^3 \theta dr d\theta$$

con $\tilde{\rho} = m/V$ densità in massa dell'elettrone (che supponiamo essere uniforme). Integrando si ottiene il noto risultato:

$$\mathcal{I} = \int_0^R \int_0^\pi dr d\theta r^4 \tilde{\rho} 2\pi \sin^3 \theta = \frac{2}{5}mR^2$$

Segue che il momento angolare dell'elettrone è, se la sua velocità angolare è $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$:

$$\vec{s} = \frac{2}{5}mR^2\omega \hat{z}$$

Il fattore di proporzionalità fra lo spin e il momento magnetico è quindi:

$$g = \frac{\mu}{s} = \frac{e}{2m}$$

In realtà questo è un risultato del tutto generale che vale per ogni distribuzione classica di carica.

15.3 Elettrone in campo magnetico

1. Un modo rapido per risolvere le equazioni del moto è notare la somiglianza formale con le equazioni del moto di una particella carica con velocità $\vec{v}$ immersa in campo magnetico $\vec{B}$. Basta fare la sostituzione:

$$\vec{s} = \vec{v}, g = \frac{e}{m}$$

Dato che equazioni uguali avranno stesse soluzioni, si ha che il vettore di spin evolverà nel seguente modo: La componente parallela a $\vec{B} = s_z \hat{z}$ resterà costante. Invece le altre componenti si muoveranno di moto circolare uniforme, con frequenza pari a $\omega = gB$:

$$\begin{cases} s_x = s_{\perp} \cos(gBt) \\ s_y = s_{\perp} \sin(gBt) \end{cases}$$

con

$$s_{\perp} = \vec{s} \cdot \hat{z} = |\vec{s}| \cos \theta$$

2. Pure qui basta l'analogia con il caso della forza di Lorentz che non fa lavoro e quindi non cambia $|\vec{v}|$ per convincersi che il modulo dello spin è una costante del moto. Alternativamente si può mostrare derivando brutalmente:

$$\frac{d\vec{s} \cdot \vec{s}}{dt} = 2\vec{s} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = 2\vec{s} \cdot (g\vec{s} \times \vec{B}) = 0$$

Dove l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che $\vec{s} \times \vec{B}$ è ortogonale a $\vec{s}$.

3. Di fatto quello che dobbiamo calcolare è la proiezione della direzione del vettore di spin $\vec{s}$ rispetto alla direzione della velocità, ossia:

$$\hat{e}_1 = \frac{\vec{s}}{s} \cdot \hat{v}$$

Sappiamo come evolve la velocità visto che il campo magnetico farà muovere di moto circolare uniforme l'elettrone:

$$\begin{cases} v_x = v \cos\left(\frac{eB}{m}t\right) \\ v_y = v \sin\left(\frac{eB}{m}t\right) \end{cases}$$

Quindi il prodotto scalare da calcolare è banalmente:

$$\hat{e}_1 = (s_x v_x + s_y v_y) / sv = \cos\left(\frac{eB}{m}t\right) \cos(gBt) + \sin\left(\frac{eB}{m}t\right) \sin(gBt)$$

. Ossia, utilizzando le note identità trigonometriche:

$$\hat{e}_1 = \cos\left(\left(\frac{e}{m} - g\right) Bt\right)$$

Si noti come entri in gioco la differenza delle due frequenze di precessione. Questo fatto può essere utilizzato per misurare con precisione il fattore g .

15.4 Dipoli elettrici

1. Banalmente l'integrale che dobbiamo calcolare si annulla per simmetria (parità):

$$\vec{d} = \rho \int dV \vec{r} = 0$$

che è nullo perchè l'integrale è fatto su tutta la sfera.

2. Assumiamo al solito di dover calcolare il momento $\vec{d}'$ rispetto alla nuova origine O' tale che $\vec{O'O} = \vec{b}$. Si ha:

$$\vec{d}' = \int (\vec{r} + \vec{b}) \rho dV = \vec{d} + \vec{b} \int \rho dV = \vec{d}$$

dove si è sfruttato che la carica totale è nulla per ipotesi.

3. Su ogni carica della distribuzione agisce una forza

$$d\vec{F} = dQ\vec{E} = \rho\vec{E} dV$$

che integrata dà 0 per ipotesi di neutralità.

Il momento che agisce sulla carica invece è:

$$d\vec{\tau} = \vec{r} \times d\vec{F} = (\rho dV) \vec{r} \times \vec{E}$$

che integrata dà:

$$\vec{\tau} = \left(\int \rho dV \vec{r} \right) \times \vec{E} = \vec{d} \times \vec{E}$$

che è quanto dovevamo mostrare.

15.5 Momento di dipolo elettrico del neutrone

1. Sfruttando le formule precedenti si ha che l'equazione nel sistema di riferimento in cui il neutrone è a riposo è:

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = g\vec{s} \times \vec{B} + g'\vec{s} \times \vec{E} = \vec{s} \times (g\vec{B} + g'\vec{E})$$

ossia si ha che lo spin del neutrone precessa attorno alla direzione data dal vettore $g\vec{B} + g'\vec{E}$. In particolare si ha che la componente dello spin parallela a questa direzione resta invariata, mentre quelle sul piano ortogonale ruotano con frequenza

$$\omega = |g\vec{B} + g'\vec{E}|$$

ossia pari al modulo di questo vettore “misto”.

16 Multiplo scattering

1. L'angolo Θ_i che forma la velocità $\vec{v}_i$ dopo l' i -esimo urto con l'asse orizzontale x è data dalla somma di tutte le deviazioni precedenti:

$$\Theta_i = \sum_1^i \theta_i$$

E' quindi ovvio per linearità che il valor medio della direzione è nullo:

$$\mathbb{E} [\Theta_N] = 0$$

La varianza pertanto sarà pari al valor medio di Θ^2 .

$$\mathbb{E} [\Theta_N^2] = \sum_{i=1}^N \theta_i^2 + 2 \sum_{i < j} \theta_i \theta_j$$

Per ipotesi di indipendenza, il valor medio dei doppi prodotti sparisce:

$$\mathbb{E} [\theta_i \theta_j] = \mathbb{E} [\theta_i] \mathbb{E} [\theta_j] = 0$$

Pertanto si ha che la varianza dell'angolo fra velocità finale ed iniziale è:

$$\mathbb{E} [\Theta_N^2] = \sum_{i=1}^N \mathbb{E} [\theta_i^2] = N\sigma^2$$

2. Sia y_i la coordinata y della particella al momento dell' i -esimo urto.

E' facile vedere che vale la seguente relazione ricorsiva per la coordinata y :

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x \sin \Theta_i \simeq y_i + \Delta x \Theta_i$$

dove abbiamo sfruttato che, essendo le singole deviazioni θ_j molto piccole e nulle in media, anche la direzione della particella dopo l' i -esimo urto sarà piccola.

Possiamo quindi riscrivere il tutto in funzione delle singole deviazioni θ_i :

$$y_N = y_{N-1} + \Delta x \sum_{k=1}^N \theta_k = \Delta x \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^j \theta_k$$

che riscritto in forma meno compatta è:

$$y_N = \theta_N + 2\theta_{N-1} + \dots + (N-1)\theta_2 + N\theta_1$$

Si osserva subito che il valor medio (essendo lineare) di questa quantità è 0. Per calcolare la varianza quindi basta calcolare il valor medio di y^2 . Si ha:

$$y^2 = (\Delta x)^2 \sum_{i=1}^N (N-i+1)^2 \theta_i^2 + (\Delta x)^2 \sum_{i \neq j} 2\theta_i \theta_j (N-i+1)(N-j+1)$$

Ora dobbiamo prendere il valor medio di questa espressione. I doppi prodotti ($i \neq j$) hanno valore di aspettazione nullo per ipotesi di indipendenza:

$$\mathbb{E}[\theta_i \theta_j] = \mathbb{E}[\theta_i] \mathbb{E}[\theta_j] = 0$$

Resta da calcolare il valor medio dei quadrati. Di fatto, si deve calcolare la somma dei primi N quadrati.

$$\mathbb{E} \left[(\Delta x)^2 \sum_{i=1}^N (N-i+1)^2 \theta_i^2 \right] = (\Delta x)^2 \sigma^2 \sum_{i=1}^N i^2 = (\Delta x)^2 \sigma^2 \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

Nel limite di N grande possiamo limitarci a prendere il contributo leading, ottenendo quindi:

$$(\Delta x)^2 \sigma^2 \frac{N^3}{3} = \mathbb{E}[\Theta_N^2] \frac{L^2}{3}$$

Un modo più semplice per valutare la somma dei primi N quadrati è di ricordare che nel limite di N grande si può approssimare la somma con l'integrale:

$$\sum_{i=1}^N i^2 \simeq \int_0^N z^2 dz = \frac{N^3}{3}$$

3. Sia h_i la distanza percorsa dalla particella al momento dell' i -esimo urto. E' facile verificare tramite teorema di Pitagora che vale la relazione ricorsiva:

$$h_{i+1} = h_i + \Delta x \left(1 + \frac{\Theta_i^2}{2} \right) = h_i + \Delta x \left(1 + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^i \theta_k \right)^2 \right)$$

da cui segue che all'uscita dello spessore, la particella avrà compiuto un tragitto pari a:

$$h_N = N\Delta x + \frac{1}{2}\Delta x \sum_{i=1}^N \left(\sum_{k=1}^i \theta_k \right)^2$$

Adesso dobbiamo prendere il valore di aspettazione. Al solito, i termini che contengono doppi prodotti, essendo indipendenti, hanno valore di aspettazione nullo. Resta quindi:

$$\mathbb{E}[h_N] = L + \frac{1}{2}\Delta x \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^i \sigma^2 = L + \frac{\sigma^2}{2}\Delta x \sum_{i=1}^N i \simeq L + \frac{\sigma^2}{4}\Delta x N^2$$

Introducendo nell'espressione il valore per la varianza media dell'angolo sul piano xy $\mathbb{E}[\Theta_N^2]$, si ottiene:

$$\mathbb{E}[h_N] = L \left(1 + \frac{1}{4}\mathbb{E}[\Theta_N^2] \right)$$

17 Processo Joule-Thomson

1. Visto che il contenitore è termicamente isolato, il gas non assorbe calore e quindi si ha :

$$Q = 0$$

Dalla prima legge della termodinamica si ha che:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = L$$

Dove $U_{1,2}$ sono le energie quando il gas è nel primo o secondo setto rispettivamente (quindi all'inizio e alla fine del processo), e L è il lavoro svolto sul sistema dai pistoni. Purtroppo U in generale dipenderà da T e dalle altre variabili termodinamiche tramite equazione di stato (che è ignota a questo punto). Pertanto concentriamoci sull'espressione per L . Il lavoro svolto sul gas è pari a $p_1 V_1$ per comprimerlo dall'altra parte, mentre il pistone della seconda camera svolge un lavoro pari a $-p_2 V_2$. Segue quindi dal primo principio:

$$U_2 - U_1 = p_1 V_1 - p_2 V_2 \Rightarrow U_1 + p_1 V_1 = U_2 + p_2 V_2$$

che è una legge di conservazione. Infatti l'*entalpia* H definita come:

$$H = U + pV$$

è una quantità conservata prima e dopo il processo per quanto appena mostrato.

2. E' facile vedere come per gas perfetti questo processo non porti ad alcuna variazione della temperatura. Detto in altro modo: le linee isoentalpiche dei gas perfetti seguono le isoterme. Per mostrarlo, basta utilizzare l'equazione di stato per i gas perfetti all'inizio ed alla fine del processo. Dato che le condizioni finali ed iniziali sono di equilibrio, è legittimo fare ciò. L'energia di un gas perfetto è funzione solo della temperatura:

$$U = nC_V RT$$

Utilizzando l'equazione di stato si può quindi ottenere una espressione per l'entalpia H che dipende solo da T .

$$H = nC_V RT + pV = nRT(1 + C_V)$$

Se questa si conserva durante il processo, è evidente come si debba conservare pure T , da cui la tesi.

Per inciso, in generale un gas reale varia la sua temperatura a seguito di un processo di questo tipo. In particolare, la variazione di temperatura è legata al coefficiente di Joule-Thomson:

$$\mu_{JT} = \left. \frac{\partial T}{\partial p} \right|_H$$

che indica quanto varia la temperatura di un gas al variare della pressione (nel nostro la variazione di pressione delle due camere) se il processo avviene ad entalpia costante. In generale è funzione della temperatura e può essere positivo o negativo. Come mostrato in precedenza, per un gas perfetto, $\mu_{JT} = 0$