

Meccanica Celeste

Daniele Battesimo Provenzano* Daniele Romano Pavarini†

Stage di fisica, 8 Febbraio 2021, Pisa

Sommario

Questa lezione verterà inizialmente sulle coordinate polari, fondamentali per trattare il moto di corpi soggetti a forze centrali. In questo framework analizzeremo l'equazione generale delle coniche, mostrando come possa essere dedotta a partire dalla conservazione del vettore di Lenz, per campi che variano col reciproco del quadrato della distanza. Successivamente verranno mostrate le principali tecniche di Problem Solving tramite cui affrontare problemi riguardanti corpi in orbita e manovre orbitali. Infine verrà analizzato il formalismo delle piccole perturbazioni, il quale permette di capire cosa succede quando il potenziale Newtoniano viene modificato dalla presenza di termini non proporzionali al reciproco della distanza.

1 Moto in campo centrale

1.1 Coordinate polari

Conosciamo tutti come individuare univocamente punti sul piano attraverso le coordinate cartesiane: per molti sistemi fisici tuttavia risulta più comodo e significativo utilizzare un altro sistema di coordinate, normalmente chiamate *coordinate polari*, in cui ogni punto è identificato da due parametri (siamo sempre su un piano, quindi avremo sempre due gradi di libertà!), di solito indicati con r (la distanza del punto in questione dall'origine) e θ (l'angolo orientato tra la congiungente punto-origine e l'asse x), come indicato in Figura 1. Risulta immediato verificare che è sempre possibile passare da coordinate

*daniele.provenzano@sns.it

†daniele.pavarini@sns.it

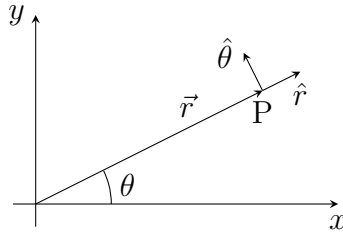


Figura 1: Individuazione di un punto sul piano attraverso le coordinate polari. Ogni punto è univocamente determinato dai parametri r e θ .

polari a cartesiane mediante le relazioni:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

così come, viceversa, passare dalle cartesiane alle polari:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)^1$$

Osserviamo che questa operazione non è altro che un cambio della base, ossia del sistema di versori, che utilizziamo per rappresentare i nostri vettori nel piano: se prima i nostri versori erano $\hat{x}$ ed $\hat{y}$ (vettori di modulo 1 diretti rispettivamente lungo l'asse x ed y), ora abbiamo scelto di considerare $\hat{r}$ (il versore radiale, un vettore di modulo 1 diretto lungo la congiungente origine-punto) ed $\hat{\theta}$ (sempre di modulo 1, che possiamo considerare perpendicolare a $\hat{r}$ e diretto in modo che il verso positivo sia quello antiorario). In quest'ottica facciamo attenzione a non confonderci tra le *componenti* e i *versori*: questi ultimi, caratterizzati da una notazione con il “cappellino” (come $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{r}$, $\hat{\theta}$), sono vettori e ci dicono “in che direzione ci stiamo muovendo” per trovare il punto, mentre le prime (indicate come x , y , r , θ associate ai rispettivi versori) sono degli scalari che ci dicono “di quanto ci muoviamo” in ciascuna direzione.

1.2 Vettori in coordinate polari

Ora che sappiamo cosa sono le coordinate polari e come usarle per descrivere i vettori vogliamo scoprire come operare su di essi: l'operatore più

¹Questa relazione in realtà vale solo per $x > 0$; possiamo dare una definizione leggermente diversa che dia sempre $\theta \in [-\pi, \pi]$ ed è $\theta = \text{sign}(y) \cdot \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$.

importante che non risulta di immediata formalizzazione in questo sistema è probabilmente quello di derivata temporale, che passiamo quindi ad illustrare (nel seguito utilizzeremo la notazione “puntata” per indicare la derivata rispetto al tempo dell’oggetto, ad esempio dx/dt sarà indicato con $\dot{x}$). Ricordando il formalismo di prima, un punto può essere individuato come:

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

dove r è lo scalare che ci indica di quanto ci siamo allontanati dall’origine e $\hat{r}$ ci dice in che direzione. Ora, per effettuare la derivata temporale di $\vec{r}$ in realtà dobbiamo calcolare due derivate temporali diverse, che tengano conto delle due diverse quantità che possono cambiare nel tempo, ossia r ed $\hat{r}$, per poi combinarle tra loro (utilizzando la normale regola del prodotto):

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}}$$

Il primo termine è la derivata di una normalissima funzione scalare che moltiplica un vettore, mentre il secondo termine ci preoccupa un po’ di più: come può cambiare un versore nel tempo? Riflettiamo: il suo modulo non può cambiare (è fisso a 1 per definizione) e non risente di traslazioni del sistema poiché l’unica informazione che porta è una direzione; l’unico modo in cui si modifica l’informazione di cui si fa carico è una rotazione (l’unico modo di cambiare direzione, in un certo senso), che può essere rappresentata da un vettore $\vec{\Omega}$ di modulo Ω (la velocità angolare con cui ruota il vettore) e perpendicolare al piano del moto (quindi parallelo all’asse di rotazione).

Ruotando il versore di un angolo infinitesimo Ωdt , è facile convincersi che esso varia di un vettore infinitesimo di modulo Ωdt e perpendicolare a $\hat{r}$. Ciò può essere scritto compattamente con la formula

$$\dot{\hat{r}} = \vec{\Omega} \times \hat{r}$$

che prenderemo d’ora in poi per buona².

Dato che in questo caso stiamo assumendo che $\vec{r}$ sia sempre sul piano xy , il sistema di coordinate polari ci permette di scrivere:

$$\vec{\Omega} = \dot{\theta}\hat{z}$$

che con le dovute sostituzioni ci porta a:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{z} \times \hat{r}$$

²Una dimostrazione rigorosa di questo risultato è riportata nell’Appendice A.

Ossia, sviluppando $\hat{z} \times \hat{r} = \hat{\theta}$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \quad (1)$$

Derivando la velocità si ottiene l'accelerazione, e dunque, riapplicando l'operazione di derivata a $\dot{\vec{r}}$ si ottiene l'accelerazione espressa in coordinate polari:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{z} \times \hat{r} + \dot{r}\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}^2\hat{z} \times \hat{\theta} \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} \end{aligned}$$

Quindi, quando si ha tra le mani un problema di dinamica, bisogna risolvere il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = f_r \\ m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = f_\theta \end{cases} \quad (2)$$

che corrisponde proprio alla seconda legge di Newton ($m\mathbf{a} = \mathbf{F}$). Vediamo ora un'applicazione di questa *nuova* metodologia, molto utile nel caso di forze dirette verso un punto fisso.

Consideriamo una molla vincolata nell'origine, con costante elastica k , alla cui estremità è agganciata una massa m libera di ruotare nel piano xy , come in Figura 2.

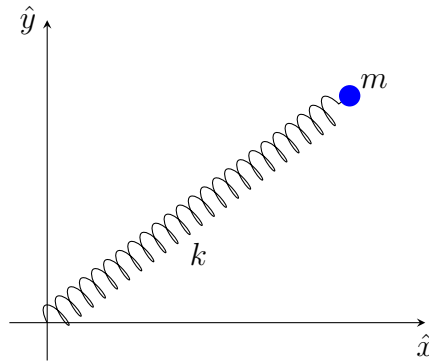


Figura 2: Massa collegata a una molla.

In questo caso il sistema (2) diventa

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= -kr \\ m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) &= 0 \end{aligned}$$

Per trovare il raggio di equilibrio (quello per cui si ha un moto circolare) basterà imporre $\ddot{r} = \dot{r} = 0$ che riduce le equazioni di prima a:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}^2 &= \frac{k}{m} \\ \ddot{\theta} &= 0\end{aligned}$$

A questo punto, fissato un punto di riferimento O , definiamo *campo radiale* un campo vettoriale i cui vettori puntano sempre nella direzione radiale $\hat{r}$, mentre un *campo centrale* è un campo radiale in cui vale la condizione aggiuntiva che il modulo di ciascun vettore dipende solo dalla sua distanza dal centro. A titolo di esempio, il campo $\vec{F}_1 = 3r^2 \cos \theta \hat{r}$ è solo radiale a causa della dipendenza dalla coordinata angolare, mentre il campo $\vec{F}_2 = 3r^2 e^{-\alpha r} \hat{r}$ è centrale.

Detto questo, tornando alle equazioni del moto del sistema massa-molla, possiamo vedere come in un campo radiale si conserva il momento angolare calcolato rispetto all'origine O . Infatti dalla prima equazione della dinamica si ha che la componente tangenziale della forza è nulla, dunque

$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0$$

Moltiplicando per r si ottiene:

$$m(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}) = 0$$

in cui riconosciamo una derivata temporale:

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$$

da cui la quantità $L = mr^2\dot{\theta}$ risulta costante. Essa non è nient'altro che il modulo del momento angolare del corpo in rotazione. In questo caso il momento angolare si conserva perché la forza elastica agente sulla massa non produce alcun momento torcente, essendo una forza radiale.

2 Gravitazione

La base di partenza per descrivere il moto dei pianeti è la legge di gravitazione universale, che esprime la forza di attrazione tra due masse poste ad una certa distanza

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$$

Mettiamoci nell'ipotesi in cui una delle due masse sia molto più grande dell'altra ($M \gg m$), in modo da interessarci solo al moto della seconda (ad esempio, se consideriamo l'attrazione tra un satellite e la Terra, quest'ultima può considerarsi ferma). In questo modo possiamo fissare l'origine del sistema di coordinate nel centro del corpo grande. Eliminando i pedici, la forza agente sul corpo piccolo potrà scriversi come

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

Questa è una forza centrale che ammette un potenziale, esprimibile come

$$U = -\frac{GMm}{r} \equiv -\frac{\alpha}{r}$$

A partire da queste semplici relazioni è possibile ricavare le famose *Leggi di Keplero*, che recitano

1. Le orbite descritte dai un pianeti sono delle ellissi, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.
2. Il raggio vettore che unisce il centro del Sole con il centro dei pianeti descrive aree uguali in tempi uguali.
3. I quadrati dei tempi che i pianeti impiegano a percorrere le loro orbite sono proporzionali al cubo dei semiassi maggiori delle rispettive ellissi.

La prima legge stabilisce il tipo di traiettoria percorsa dai pianeti. Per i pianeti del sistema solare sono solo ellissi, ma nel caso generale le orbite possibili sono delle coniche, quindi circonferenze, ellissi, parabole od iperboli. L'equazione generale delle coniche in coordinate polari è

$$r(\theta) = \frac{l}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad (3)$$

dove l è un parametro con le dimensioni di una lunghezza e ϵ è l'eccentricità dell'orbita, che vale

- $\epsilon = 0$ per le circonferenze;

- $0 < \epsilon < 1$ per le ellissi;
- $\epsilon = 1$ per le parabole;
- $\epsilon > 1$ per le iperboli.

In questa lezione siamo interessati solamente alle orbite limitate, quindi ci limiteremo al caso $0 < \epsilon < 1$. Nella sezione seguente vedremo alcune strategie con cui affrontare parte dei problemi di meccanica celeste.

2.1 Quantità conservate

Generalmente esistono due modi di risolvere un problema di meccanica: il primo consiste nel trovare le leggi orarie dei corpi del sistema a partire dalla seconda legge di Newton ($\vec{F} = m\vec{a}$), mentre il secondo si basa su alcune leggi di conservazione che legano la velocità alla posizione. Noi useremo quest'ultima strada per trovare alcuni risultati importanti della meccanica orbitale, riguardanti il *problema dei due corpi* nello specifico. Durante il moto di un pianeta attorno ad una stella, sono tre le quantità che si conservano:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 - \frac{\alpha}{|\vec{r}|} && \text{Energia Meccanica} \\ \vec{L} &= m\vec{r} \times \vec{v} && \text{Momento Angolare} \\ \vec{A} &= m\vec{v} \times \vec{L} - m\alpha\hat{r} && \text{Vettore di Lenz} \end{aligned}$$

L'energia meccanica si conserva perché la forza gravitazionale è una forza conservativa e sul sistema non agiscono forze dissipative. Come già detto nella parte iniziale della lezione, il momento angolare si conserva perché la forza gravitazionale è una forza radiale (più particolarmente è una forza centrale) che non produce alcun momento torcente sul sistema. Prima di passare a discutere la terza quantità conservata, vale la pena sfruttare la conservazione di E e $\vec{L}$ per caratterizzare le orbite chiuse, cioè ellissi e circonferenze. Sfruttando la conservazione dell'energia e del momento angolare tra l'afelio e il perielio, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GMm}{r_A} = \frac{1}{2}mv_P^2 - \frac{GMm}{r_P} \\ L &= mr_A v_A = mr_P v_P \longrightarrow v_P = v_A \frac{r_A}{r_P} \end{aligned}$$

dove r_A e r_P sono rispettivamente la massima e minima distanza dal corpo attrattore, tali che

$$r_A + r_P = 2a \qquad r_A - r_P = 2c$$

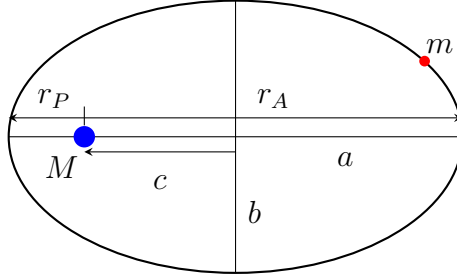


Figura 3: Satellite in moto su un'orbita ellittica di semiassi a e b .

Ricavando v_P dalla conservazione del momento angolare e sostituendola nella conservazione dell'energia, otteniamo

$$\frac{1}{2}mv_A^2 \left(1 - \frac{r_A^2}{r_P^2}\right) = GMm \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_P}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 = GMm \left(\frac{r_P - r_A}{r_A}\right) \frac{r_P}{r_P^2 - r_A^2}$$

Avendo trovato un'espressione per l'energia cinetica all'afelio, possiamo usarla per trovare l'energia meccanica totale

$$E = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GMm}{r_A} = \frac{GMm}{r_A} \left(\frac{r_P}{r_P + r_A} - 1\right) = -\frac{GMm}{2a}$$

che, ovviamente, è indipendente dal punto dell'ellisse in cui ci troviamo. Notiamo inoltre che $E < 0$, caratteristica di ogni traiettoria limitata in un campo coulombiano come quello gravitazionale. Questa relazione è importantissima per risolvere problemi di meccanica spaziale. Notiamo che nel limite di circonferenza $a \rightarrow R$ e l'energia è proprio quella di un satellite in moto circolare uniforme attorno al corpo attrattore. Per quanto riguarda il momento angolare, invece, possiamo scrivere

$$L = mr_A v_A = m \sqrt{2GM \frac{r_A r_P}{r_P + r_A}} = m \sqrt{2GM \frac{b^2}{2a}} = mb \sqrt{\frac{GM}{a}}$$

Notiamo che nel caso di ellisse degenera (ovvero il segmento orizzontale di lunghezza $2a$) il momento angolare è nullo. Ciò ha senso perché il moto avviene lungo una retta, quindi il prodotto scalare tra raggio vettore e quantità di moto è sempre nullo.

L'ultima quantità conservata è la più esotica tra le tre. Essa, come è chiaro dalla sua espressione, è necessariamente collocata sul piano dell'orbita. Vedremo a breve che il vettore di Lenz è legato all'eccentricità dell'orbita percorsa dal pianeta. Per mostrare che il vettore di Lenz è una costante del moto,

dimostriamo che la sua derivata rispetto al tempo è nulla. Sfruttiamo il fatto che $\vec{L}$ è a sua volta una costante del moto:

$$0 = \frac{d\vec{A}}{dt} = m \frac{d(\vec{v} \times \vec{L} - \alpha \hat{r})}{dt} \iff \alpha \dot{\hat{r}} = \vec{a} \times \vec{L}$$

Usando l'espressione della forza gravitazionale, la definizione di momento angolare, le proprietà del prodotto vettoriale e l'espressione della velocità in coordinate polari, troviamo la seguente catena di disuguaglianze

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{L} &= \left(\frac{-\alpha}{mr^2} \hat{r} \right) \times (m\vec{r} \times \vec{v}) = -\frac{\alpha}{r} (\hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{v})) = -\frac{\alpha}{r} (\hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{v}) - \vec{v}(\hat{r} \cdot \hat{r})) = \\ &= -\frac{\alpha}{r} (\hat{r} \dot{r} - \vec{v}) = \frac{\alpha}{r} (r\dot{\hat{r}}) = \alpha \dot{\hat{r}} \end{aligned}$$

Ciò conclude la dimostrazione della conservazione del vettore di Lenz.

2.2 Equazione delle orbite

Sfruttando la conservazione del vettore di Lenz, è possibile ricavare l'equazione delle possibili orbite percorribili dai satelliti. Consideriamo il seguente prodotto scalare

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = Ar \cos \theta$$

Dalla definizione di $\vec{A}$ segue che

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = (m\vec{v} \times \vec{L}) \cdot \vec{r} - m\alpha \hat{r} \cdot \vec{r} = (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{L} - m\alpha r = \vec{L} \cdot \vec{L} - m\alpha r = L^2 - m\alpha r$$

Questo ci conduce all'espressione finale

$$\begin{aligned} Ar \cos \theta &= L^2 - m\alpha r \\ \implies r(\theta) &= \frac{\frac{L^2}{m}}{m\alpha + A \cos \theta} = \frac{\frac{L^2}{\alpha m}}{1 + \frac{A}{m\alpha} \cos \theta} \end{aligned}$$

Calcoliamo adesso il modulo del vettore $\vec{A}$ sfruttando la perpendicolarità di $\vec{v}$ e $\vec{L}$:

$$\begin{aligned} \vec{A}^2 &= \alpha^2 - 2\alpha \hat{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{L}) + (\vec{v} \times \vec{L})^2 = \alpha^2 - \frac{2\alpha L^2}{mr} + v^2 L^2 \\ &= \alpha^2 + \frac{2L^2}{m} \left(-\frac{\alpha}{r} + \frac{1}{2}mv^2 \right) = \alpha^2 + \frac{2EL^2}{m} \end{aligned}$$

Sostituendo questo risultato nell'espressione per $r(\theta)$, otteniamo

$$r(\theta) = \frac{\frac{L^2}{\alpha m}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \cos \theta} \quad (4)$$

Mettendo a confronto le equazioni (3) e (4) notiamo che i parametri dell'orbita possono scriversi come

$$l = \frac{L^2}{GMm^2} \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{(GMm)^2 m}}$$

Osservando l'espressione dell'eccentricità, notiamo che l'unica quantità che può essere negativa all'interno della radice è l'energia E . Questo ci porta alla seguente caratterizzazione delle orbite in base all'energia meccanica totale

- $E = -\frac{G^2 M^2 m^3}{2L^2}$ per orbite circolari;
- $-\frac{G^2 M^2 m^3}{2L^2} < E < 0$ per orbite ellittiche;
- $E = 0$ per orbite paraboliche;
- $E > 0$ per orbite iperboliche.

3 Manovre Orbitali Notevoli

Consideriamo due orbite circolari complanari, rispettivamente di raggio r_i e r_f ($r_f > r_i$). Analizziamo due tipi di manovre che consentono di spostare un satellite dall'orbita interna all'orbita esterna. In entrambi i casi le manovre verranno considerate longitudinali (cioè parallele alla direzione di moto) e completamente *impulsive*, in altre parole *istantanee*.

3.1 Manovra alla Hohmann

La manovra alla Hohmann consiste nel trasferimento di un satellite da un'orbita circolare all'altra per mezzo di una semi-ellisse, come mostrato in Fig. 4. Tra tutti i possibili tipi di manovre a due impulsi, questa è quella che richiede il minor costo di energia per la sua realizzazione. Analizziamo cosa succede dal punto di vista matematico.

- Step 1: mentre il satellite sta viaggiando lungo l'orbita circolare iniziale, un impulso longitudinale ed istantaneo causa un aumento della sua

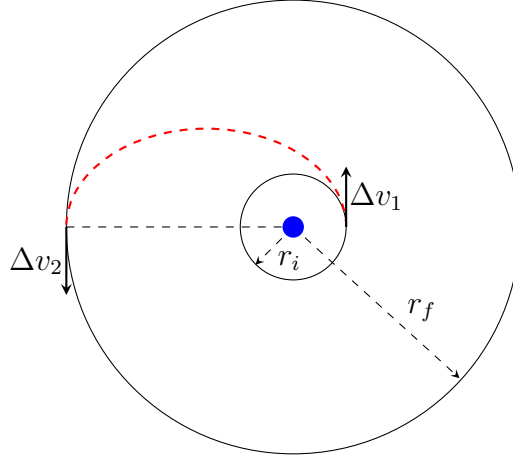


Figura 4: Schematizzazione della manovra alla Hohmann.

velocità orbitale, deformando l'orbita in un'ellisse. Per far in modo che l'afelio di quest'ultima coincida con un punto dell'orbita circolare di arrivo, bisogna imporre che l'asse maggiore sia

$$a = \frac{r_i + r_f}{2}$$

Ricordando che l'energia meccanica di un'orbita ellittica si può scrivere come $E = -\frac{GMm}{2a}$, possiamo calcolare l'aumento di velocità Δv_1 dalla relazione

$$-\frac{GMm}{r_i + r_f} = -\frac{GMm}{r_i} + \frac{1}{2}m \left(\sqrt{\frac{GM}{r_i}} + \Delta v_1 \right)^2$$

che restituisce

$$\Delta v_1 = \sqrt{2GM \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_i + r_f} \right)} - \sqrt{\frac{GM}{r_i}} = v_{\text{peri}} - v_{\text{circ}_i}$$

- Step 2: dopo aver percorso mezza ellisse in un tempo $t = \pi \sqrt{\frac{(r_i + r_f)^3}{8GM}}$, un secondo impulso istantaneo causa un ulteriore aumento della velocità orbitale Δv_2 , ricavabile dalla relazione

$$-\frac{GMm}{2r_f} = -\frac{GMm}{r_f} + \frac{1}{2}m \left(\sqrt{2GM \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i + r_f} \right)} + \Delta v_2 \right)^2$$

$$\Rightarrow \Delta v_2 = \sqrt{\frac{GM}{r_f}} - \sqrt{2GM \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i + r_f} \right)} = v_{\text{circ}_f} - v_{\text{apo}}$$

L'impulso totale trasferito durante tutto il processo vale

$$I = m(\Delta v_1 + \Delta v_2) \quad (5)$$

$$= m \left(\sqrt{2GM \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_i + r_f} \right)} - \sqrt{\frac{GM}{r_i}} + \sqrt{\frac{GM}{r_f}} - \sqrt{2GM \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i + r_f} \right)} \right) \quad (6)$$

Scriviamo la precedente espressione in una forma esteticamente più gradevole, dividendo ambo i membri per la velocità $v_{\text{circ}_i} = \sqrt{\frac{GM}{r_i}}$

$$\frac{I}{mv_{\text{circ}_i}} = \sqrt{2 \left(1 - \frac{r_i}{r_i + r_f} \right)} - 1 + \sqrt{\frac{r_i}{r_f}} - \sqrt{2 \left(\frac{r_i}{r_f} - \frac{r_i}{r_i + r_f} \right)} \quad (7)$$

$$\equiv \sqrt{\frac{2\alpha}{1+\alpha}} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) + \sqrt{\frac{1}{\alpha}} - 1 \quad (8)$$

dove α è definito come $\alpha = \frac{r_f}{r_i}$. La funzione

$$f(\alpha) = \sqrt{\frac{2\alpha}{1+\alpha}} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) + \sqrt{\frac{1}{\alpha}} - 1$$

ha un massimo per $\alpha \approx 15.58$.

3.2 Manovra Bi-ellittica

La manovra bi-ellittica consiste nel trasferimento di un satellite da un'orbita circolare all'altra per mezzo di due semi-ellissi, come mostrato in Fig. 5. Questo tipo di trasferimento consiste in tre diversi impulsi dati al satellite e, come vedremo, è generalmente più conveniente della manovra alla Hohmann in termini di costo energetico.

- Step 1: mentre il satellite sta viaggiando lungo l'orbita circolare iniziale, un impulso longitudinale ed istantaneo causa un aumento della sua velocità orbitale, deformando l'orbita in un'ellisse di asse maggiore

$$a_1 = \frac{r_i + r_t}{2}$$

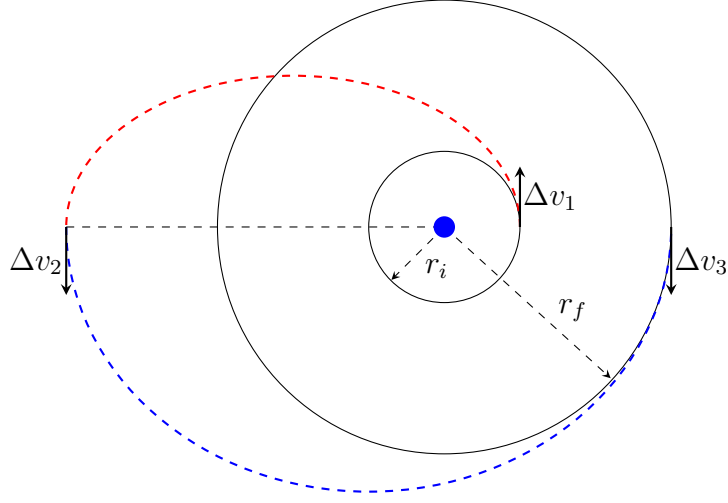


Figura 5: Schematizzazione della manovra bi-ellittica.

La variazione di velocità Δv_1 causata dall'impulso istantaneo dei razzi può essere calcolata tramite

$$-\frac{GMm}{r_i + r_t} = -\frac{GMm}{r_i} + \frac{1}{2}m \left(\sqrt{\frac{GM}{r_i}} + \Delta v_1 \right)^2$$

che restituisce

$$\Delta v_1 = \sqrt{2GM \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_i + r_t} \right)} - \sqrt{\frac{GM}{r_i}} = v_{\text{peri}_1} - v_{\text{circ}_i}$$

- Step 2: dopo aver percorso mezza ellisse in un tempo $t = \pi \sqrt{\frac{(r_i + r_t)^3}{8GM}}$, un secondo impulso istantaneo causa un ulteriore aumento della velocità orbitale Δv_2 , in modo da trasferire il satellite su una seconda ellisse di asse maggiore

$$a_2 = \frac{r_f + r_t}{2}$$

L'energia meccanica del satellite subito dopo il boost vale

$$-\frac{GMm}{r_f + r_t} = -\frac{GMm}{r_t} + \frac{1}{2}m \left(\sqrt{2GM \left(\frac{1}{r_t} - \frac{1}{r_i + r_t} \right)} + \Delta v_2 \right)^2$$

$$\Rightarrow \Delta v_2 = \sqrt{2GM \left(\frac{1}{r_t} - \frac{1}{r_f + r_t} \right)} - \sqrt{2GM \left(\frac{1}{r_t} - \frac{1}{r_i + r_t} \right)} = v_{\text{apo}_2} - v_{\text{apo}_1}$$

- Step 3: dopo aver percorso mezza ellisse in un tempo $t = \pi\sqrt{\frac{(r_f+r_t)^3}{8GM}}$, un terzo impulso opposto al moto causa una diminuzione della velocità orbitale Δv_3 , che consente al satellite di stabilirsi sull'orbita circolare finale. In questo caso si ha

$$-\frac{GMm}{2r_f} = -\frac{GMm}{r_f} + \frac{1}{2}m \left(\sqrt{2GM \left(\frac{1}{r_t} - \frac{1}{r_f + r_t} \right)} - \Delta v_3 \right)^2$$

$$\Rightarrow \Delta v_3 = \sqrt{2GM \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_f + r_t} \right)} - \sqrt{\frac{GM}{r_f}} = v_{\text{per}_2} - v_{\text{circ}_f}$$

L'impulso totale trasferito durante tutto il processo vale

$$I = m(\Delta v_1 + \Delta v_2 + \Delta v_3) \quad (9)$$

$$= \sqrt{2GM \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_i + r_t} \right)} - \sqrt{\frac{GM}{r_i}} + \sqrt{2GM \left(\frac{1}{r_t} - \frac{1}{r_f + r_t} \right)} + \quad (10)$$

$$- \sqrt{2GM \left(\frac{1}{r_t} - \frac{1}{r_i + r_t} \right)} + \sqrt{2GM \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_f + r_t} \right)} - \sqrt{\frac{GM}{r_f}} \quad (11)$$

Come nel paragrafo precedente, scriviamo la precedente espressione in una forma esteticamente più gradevole, dividendo ambo i membri per la massa del satellite e per la velocità $v_{\text{circ}_i} = \sqrt{\frac{GM}{r_i}}$

$$\frac{I}{mv_{\text{circ}_i}} = \sqrt{2 \left(1 - \frac{r_i}{r_i + r_t} \right)} - 1 + \sqrt{2 \left(\frac{r_i}{r_f} - \frac{r_i}{r_i + r_f} \right)} + \quad (12)$$

$$- \sqrt{2 \left(\frac{r_i}{r_t} - \frac{r_i}{r_i + r_t} \right)} + \sqrt{2 \left(\frac{r_i}{r_f} - \frac{r_i}{r_f + r_t} \right)} - \sqrt{\frac{r_i}{r_f}} \quad (13)$$

$$\equiv \sqrt{\frac{2(\alpha + \beta)}{\alpha\beta}} - \frac{1 + \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}} + (\beta - 1)\sqrt{\frac{2}{\beta(1 + \beta)}} \quad (14)$$

dove $\alpha \equiv \frac{r_f}{r_i}$ e $\beta \equiv \frac{r_t}{r_i}$. Si può verificare facilmente che per $\beta = \alpha$, l'impulso trasferito si riduce a quello della manovra di Hohmann. Invece per $\beta \rightarrow \infty$, il trasferimento è detto *bi-parabolico* e il costo totale si riduce ad

$$\frac{I}{mv_{\text{circ}_i}} = (\sqrt{2} - 1) \left(1 + \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \right)$$

Si può mostrare che proprio nel limite $\beta \rightarrow \infty$ la quantità $\frac{I}{mv_{\text{circ}_i}}$ è minima per ogni valore di α . In questo caso, la manovra bi-ellittica risulta più conveniente di quella di Hohmann.

4 Potenziali perturbati

Consideriamo di voler studiare il caso di un potenziale Newtoniano perturbato da un termine che non rispetta la legge di gravitazione universale, che sarà solitamente proporzionale a una potenza della distanza dall'origine, e di voler studiare come cambiano le orbite. Possiamo considerare il caso di una perturbazione generica se ci restringiamo al caso di orbita quasi circolare o possiamo considerare un'orbita ellittica se assumiamo che la perturbazione sia piccola rispetto al termine Newtoniano del potenziale

4.1 Orbita quasi circolare

Consideriamo un potenziale del tipo

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\varepsilon}{r^\beta}$$

in cui il termine α/r è il solito potenziale Newtoniano e β è un generico esponente che caratterizza il termine perturbativo.

Abbiamo quindi che il potenziale efficace sarà

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\varepsilon}{r^\beta} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

Potremmo seguire una strategia generale che consiste nello scrivere l'energia totale del corpo in orbita come

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}$$

ma in questo caso è possibile seguire una strategia più sintetica che ci permetterà di trovare la frequenza con cui oscilla la coordinata r intorno al suo valore centrale che sarà quello corrispondente all'orbita perfettamente circolare, la condizione di essere in un'orbita quasi circolare ci dice che il raggio dell'orbita oscilla intorno al valore del minimo del potenziale efficace, possiamo quindi imporre che la derivata del potenziale efficace sia uguale a 0 per ottenere un'equazione che coinvolge il raggio dell'orbita circolare

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dr}(r) = \frac{\alpha}{r^2} - \frac{\varepsilon\beta}{r^{\beta+1}} - \frac{L^2}{mr^3}$$

$$0 = \frac{\alpha}{r_0^2} - \frac{\varepsilon\beta}{r_0^{\beta+1}} - \frac{L^2}{mr_0^3} \quad (15)$$

In generale non è possibile risolvere questa equazione per r_0 ma possiamo calcolare la frequenza di oscillazione derivando ancora il potenziale, si ottiene quindi

$$\frac{d^2 V_{\text{eff}}}{dr^2}(r) = -\frac{2\alpha}{r^3} + \frac{\varepsilon\beta(\beta+1)}{r^{\beta+2}} + \frac{3L^2}{mr^4}$$

possiamo ora usare che

$$\omega_r = \sqrt{\frac{\frac{d^2 V}{dr^2}(r_0)}{m}}$$

che unita alla condizione (15) trovata su r_0 diventa

$$\omega_r = \sqrt{\frac{\alpha}{mr_0^3}(\beta-1) + \frac{L^2}{m^2 r_0^4}(2-\beta)}$$

che differisce dalla frequenza con cui si compie il moto lungo θ . Possiamo valutare $\dot{\theta}$ considerando come potrebbe verificarsi la situazione descritta: immaginiamo di prendere un oggetto in orbita circolare a distanza r_0 dal centro attrattore e imprimergli un impulso nella direzione radiale ovvero perpendicolare alla velocità iniziale, questo processo non cambia il momento angolare L i quanto il momento torcente rispetto al centro attrattore è nullo, di conseguenza il raggio attorno al quale oscilla il punto materiale rimane r_0 perché, come si vede dalla relazione (15), questo dipende solo da costanti naturali, dalla massa e dal momento angolare. Possiamo concludere quindi che in questo caso vale la formula analoga al moto circolare ovvero

$$\dot{\theta} = \omega_\theta = \frac{L}{mr_0^2}$$

Siamo interessati ora a vedere come si comportano le orbite percorse, in particolare il fatto che $\omega_r \neq \omega_\theta$ implica che le orbite precedono ovvero non si chiudono dopo una oscillazione del valore di r come invece accadeva per le orbite ellittiche.

Si ottiene quindi che in un tempo $T = 2\pi/\omega_r$ il raggio sarà passato da un minimo a un minimo successivo e avrà percorso un angolo intorno all'origine di $\Delta\theta = \omega_\theta T$ che in generale sarà diverso da 2π e quindi l'orbita precede di

$$\delta\theta = \Delta\theta - 2\pi = \frac{2\pi}{\sqrt{(\beta-1)\left(\frac{\alpha mr_0}{L^2} - 1\right) + 1}} - 2\pi = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{m\varepsilon\beta(\beta-1)}{L^2 r_0^{\beta-2}} + 1}} - 2\pi \quad (16)$$

Notiamo che l'angolo di precessione non dipende dall'ampiezza della perturbazione, che deve comunque rimanere piccola³ per poter usare le approssi-

³Lasciamo al lettore come esercizio di quantificare cosa si intende con piccola

mazioni fatte.

4.2 Piccola perturbazione

Nel caso di piccola perturbazione dal potenziale Newtoniano vogliamo trovare un'espressione valida anche per orbite ellittiche di eccentricità e generica, per fare questo ci servirà una teoria più generale. Supponiamo di avere un potenziale noto $V_0(r)$, ovvero sappiamo come si comporta un corpo immerso nel potenziale V_0 , e consideriamo una perturbazione $\delta V(r)$ che considereremo piccola rispetto al termine noto, otteniamo quindi

$$V(r) = V_0(r) + \delta V(r)$$

Se consideriamo la relazione

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

possiamo risolvere per $\dot{r}$ e ottenere la seguente equazione differenziale

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2} \right)}$$

Essendo di solito interessati alla forma delle orbite piuttosto che a come queste vengono percorse nel tempo possiamo cambiare variabile da t a θ usando la relazione

$$L = mr^2\dot{\theta} = mr^2 \frac{d\theta}{dr} \frac{dr}{dt}$$

con il vantaggio che L è una costante del moto e non dipende né da r né da θ potrà quindi essere considerato come un parametro o una variabile indipendente come vedremo in seguito, troviamo così

$$d\theta = \pm \frac{L/r^2}{\sqrt{2m(E - V(r)) - L^2/r^2}} dr \quad (17)$$

da cui otteniamo la seguente espressione per l'angolo spazzato dal raggio nel passare da un minimo al minimo successivo,

$$\delta\theta = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{L/r^2}{\sqrt{2m(E - V(r)) - L^2/r^2}} dr$$

Notiamo che è possibile trovare una primitiva della funzione integranda se questa è vista come una funzione di L

$$\Delta\theta = -2 \frac{\partial}{\partial L} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{L^2}{r^2}} dr$$

Fin ora non abbiamo usato alcuna approssimazione, è il momento di sfruttare l'espressione del potenziale per espandere l'integrando in termini di oggetti più semplici. Possiamo usare l'approssimazione data dalla serie di Taylor in funzione di $V = V_0 + \delta V$:

$$\sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{L^2}{r^2}} = \sqrt{2m(E - V_0(r)) - \frac{L^2}{r^2}} - \frac{m\delta V(r)}{\sqrt{2m(E - V_0(r)) - L^2/r^2}}$$

sostituendo nell'espressione per θ si trova

$$\begin{aligned} \Delta\theta = -2\frac{\partial}{\partial L} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \sqrt{2m(E - V_0(r)) - \frac{L^2}{r^2}} dr + \\ + 2m\frac{\partial}{\partial L} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\delta V(r)}{\sqrt{2m(E - V_0(r)) - L^2/r^2}} dr \quad (18) \end{aligned}$$

Il primo termine non contiene la perturbazione e quindi corrisponde all'angolo spazzato seguendo un'orbita Kepleriana che sappiamo valere 2π , per valutare il secondo termine possiamo usare ancora che la perturbazione è piccola e dunque l'orbita seguita sarà vicina a un'ellisse e possiamo integrare lungo questa traiettoria, l'errore introdotto da questa approssimazione sarà almeno quadratico nel termine perturbativo e per i nostri scopi può essere ignorato. Questo nel nostro caso significa che assumeremo che alla variazione del raggio da r_{min} a r_{max} corrisponde (all'ordine 0) una variazione dell'angolo da 0 a π e che potremo usare la relazione (17) per effettuare il cambio di variabile, otteniamo quindi

$$\delta\theta = 2m\frac{\partial}{\partial L} \frac{1}{L} \int_0^\pi r^2 \delta V(r) d\theta$$

questa è una formulazione generale, valida per ogni tipo di piccola perturbazione del potenziale Newtoniano.

Per integrare questa funzione sarà necessario fare uso ancora una volta del fatto che l'orbita sia quasi ellittica per usare la relazione

$$r = \frac{L^2/m\alpha}{1 + \epsilon \cos \theta}$$

A titolo di esempio calcoliamo l'angolo di precessione nel caso $\delta V_0(r) = \epsilon/r^3$, dobbiamo quindi valutare

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{r} = \frac{\pi}{L^2/m\alpha}$$

troviamo quindi

$$\delta\theta = \frac{6\pi m^2 \epsilon \alpha}{L^4}$$

Possiamo inoltre notare che sostituendo $\beta = 3$ nell'equazione (16) ed espandendo per ε piccoli si trova che le due espressioni di $\delta\theta$ sono in accordo tra di loro.

Appendici

A Derivate dei versori

I versori $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ possono essere scritti in coordinate cartesiane

$$\hat{r} = \hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta \quad (19)$$

$$\hat{\theta} = -\hat{x} \sin \theta + \hat{y} \cos \theta \quad (20)$$

Possiamo calcolare le derivate dei secondi membri delle Equazioni (19) e (20) senza particolari problemi, perchè i versori $\hat{x}$ e $\hat{y}$ sono fissi. Si ha

$$\begin{aligned} \dot{\hat{r}} &= -\hat{x}\dot{\theta} \sin \theta + \hat{y}\dot{\theta} \cos \theta = \dot{\theta}\hat{\theta} \\ \dot{\hat{\theta}} &= -\hat{x}\dot{\theta} \cos \theta - \hat{y}\dot{\theta} \sin \theta = -\dot{\theta}\hat{r} \end{aligned}$$

Queste derivate sono proprio della forma

$$\begin{aligned} \dot{\hat{r}} &= \vec{\Omega} \times \hat{r} \\ \dot{\hat{\theta}} &= \vec{\Omega} \times \hat{\theta} \end{aligned}$$

a patto di porre $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\hat{z}$. Più in generale, consideriamo un vettore $\vec{v}$ di modulo costante ed eseguiamo su di esso una rotazione attorno ad un asse $\hat{n}$ di un angolo θ , come in Figura 6. La componente di $\vec{v}$ parallela a $\hat{n}$, ossia

$$\vec{v}_{\parallel} = (\vec{v} \cdot \hat{n})\hat{n}$$

è lasciata inalterata dalla trasformazione. Al contrario, la componente perpendicolare

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{\parallel}$$

è ruotata di un angolo θ e rimane nel piano perpendicolare ad $\hat{n}$. In particolare, se indichiamo con un apice i vettori dopo la rotazione si avrà

$$\vec{v}'_{\perp} = (\vec{v} - \vec{v}_{\parallel}) \cos \theta + (\hat{n} \times \vec{v}) \sin \theta$$

Di conseguenza il vettore ruotato sarà

$$\vec{v}' = (\vec{v} \cdot \hat{n})\hat{n} + (\vec{v} - (\vec{v} \cdot \hat{n})\hat{n}) \cos \theta + (\hat{n} \times \vec{v}) \sin \theta$$

Supponiamo ora che un vettore $\vec{v}$ ruoti a velocità angolare ω (in generale dipendente dal tempo) attorno ad un asse $\hat{n}$. Se $d\theta = \omega dt$ è l'angolo infinitesimo di cui ruota $\vec{v}$, al primo ordine in dt abbiamo

$$\vec{v}(t+dt) = (\vec{v}(t) \cdot \hat{n})\hat{n} + (\vec{v} - (\vec{v}(t) \cdot \hat{n})\hat{n}) + (\hat{n} \times \vec{v}(t))\omega dt = \vec{v}(t) + \omega(\hat{n} \times \vec{v}(t)) dt$$

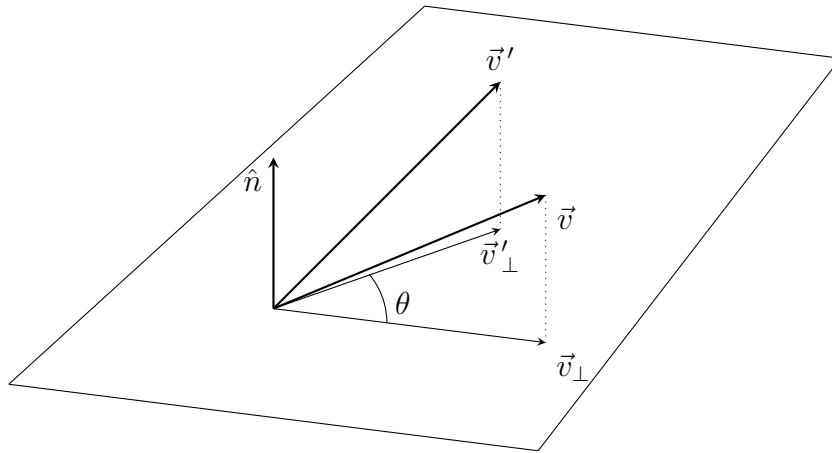


Figura 6: rotazione di $\vec{v}$ intorno a $\hat{n}$.

Ossia

$$\frac{\vec{v}(t + dt) - \vec{v}(t)}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

e al limite $dt \rightarrow 0$ si ha

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

Problemi

1.1 Esercizio base

Consideriamo un satellite di massa m su un'orbita circolare di raggio R attorno alla Terra (di massa M), che supporremo ferma.

1. Trova la velocità v_R ed il periodo orbitale T del satellite.
2. Trova l'energia meccanica totale del satellite ed il suo momento angolare.
3. Trova il valore di R nel caso dell'orbita geostazionaria.

Supponiamo adesso che il satellite si muove su un'orbita ellittica (di semiasse maggiore a ed eccentricità ϵ) attorno alla Terra.

4. Trova v_m e v_M , rispettivamente la velocità minima e massima del satellite durante il moto orbitale
5. Trova il periodo T del moto orbitale.
6. Dimostra che

$$a = \frac{T}{2\pi} \sqrt{v_m v_M}$$

7. Trova l'energia meccanica totale del satellite.

1.2 Farfalle kamikaze

Per spiegare il motivo che porta una farfalla notturna a cadere a spirale sulla fiamma di una candela, si può fare l'ipotesi che normalmente esse facciano riferimento alla luce della luna per guidarsi, mantenendo costante l'angolo tra la direzione di provenienza di questa e la propria direzione di volo. Mostrare che questa è una strategia suicida se la luce di riferimento è quella di una fiamma vicina. Perché invece funziona se la luce è molto lontana?

1.3 Razzo su Marte

Marte è un pianeta roccioso con approssimativamente la stessa densità della Terra, solo che la sua gravità in superficie è $k = 0.38$ volte quella terrestre.

1. Detta V_T la velocità di fuga dalla superficie della Terra, e V_M la velocità di fuga dalla superficie di Marte, calcolare V_T/V_M .

2. Modelliamo un razzo come una massa m , corrispondente a tutta la struttura del razzo, e una massa M di propellente, che viene espulso ad una velocità w dal razzo. Noto che la densità tipica di un pianeta roccioso è di 5500 kg m^{-3} , e che sulla Terra $g_T = 9.81 \text{ m s}^{-2}$, calcolare il rapporto M/m nel caso della Terra e nel caso di Marte.

1.4 Missile verso l'equatore

Un missile viene lanciato dal polo Nord (con la prima velocità cosmica) in modo tale da farlo cadere su un punto posto all'equatore.

1. Trova il semiasse maggiore dell'orbita del missile.
2. Qual'è la massima altezza dalla superficie terrestre a cui il satellite arriva?
3. Quanto vale il tempo di volo del satellite? (Ricorda che l'area di un'ellisse vale $S = \pi ab$)

1.5 Asteroide dentro l'orbita terrestre

Un asteroide di massa m si muove su una traiettoria parabolica intorno al Sole (la cui massa è M_s) nello stesso piano dell'orbita terrestre, che si assume essere circolare e di raggio R . Trascurare l'attrazione tra asteroide e Terra.

1. Sia p la distanza di minimo avvicinamento dell'asteroide dal Sole. Nel caso in cui $p < R$, trovare il tempo T che la cometa spende all'interno dell'orbita terrestre.
2. Calcolare il massimo valore possibile di T in giorni. Per quale valore di p avviene ciò?

Se, invece, p è minore del raggio del Sole, l'asteroide ci cadrà dentro e la massa del Sole aumenterà di una frazione $\alpha \equiv \frac{m}{M_s}$.

3. Studiare come cambiano i parametri dell'orbita terrestre (asse maggiore ed eccentricità) al variare di α .

1.6 Pianeti e palline

Due pianeti identici, di raggio $R = 1000 \text{ km}$, sono fissi nello spazio e distano fra loro $d = 5R$. Su uno di questi pianeti ci sono n palline in contatto l'una sopra l'altra, con masse $m_1 \gg m_2 \gg \dots \gg m_n$ (denominando con 1 la

pallina più in basso, con 2 quella soprastante e così via), poste in modo che i baricentri di tutte le palline si trovano sulla congiungente dei centri dei due pianeti. La pallina più in basso viene lasciata libera di cadere da un metro d'altezza dalla superficie di uno dei pianeti. Supponendo che tutti gli urti siano elastici e che le dimensioni delle palline siano trascurabili, determinare il minimo valore di n tale che almeno una pallina possa arrivare sull'altro pianeta.

1.7 Orbite poligonali

Trovare un potenziale del tipo $V(r) = \lambda r^\beta$ per cui l'orbita generata da una piccola perturbazione dall'orbita circolare sia chiusa e abbia n raggi minimi e n raggi massimi.

1.8 Perturbazione del potenziale armonico

Cosa cambia nella trattazione dei potenziali perturbati se come potenziale noto consideriamo il potenziale armonico $V(r) = \alpha r^2$ invece del potenziale Newtoniano $V(r) = \alpha r^{-1}$?

1.9 Potenziale Miracoloso

Trovare *esattamente* il moto di un corpo soggetto a un potenziale $V(r) = \alpha/r + \lambda/r^2$. Calcolare quanto vale l'angolo di precessione nel caso di orbita limitata e verificare che il risultato sia concorde con quanto trovato nei due casi trattati a lezione.

Soluzioni

1.1 Esercizio base

1. Eguagliando la forza gravitazionale a quella centripeta si trova

$$m \frac{v^2}{R} = \frac{GMm}{R^2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Dall'equazione dell'energia segue

$$-\frac{GMm}{2a} = \frac{1}{2}m \left(\frac{GM}{R} \right) - \frac{GMm}{R}$$

Il periodo del moto non è altro che la lunghezza della circonferenza divisa per la velocità del satellite

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \frac{R^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM}}$$

2. L'energia meccanica totale è pari alla somma di energia cinetica e potenziale

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{GMm}{2R} - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{2R}$$

Il momento angolare, dalla definizione, vale

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = mRv \hat{z} = m\sqrt{GMR} \hat{z}$$

dove $\hat{z}$ è la direzione perpendicolare al piano dell'orbita.

3. L'orbita geostazionaria ha lo stesso periodo della rotazione terrestre (1 giorno). Allora, usando nuovamente la seconda legge di Newton, troviamo

$$m \left(\frac{2\pi}{T_{Giorno}} \right)^2 R_{GEO} = \frac{GMm}{R_{GEO}^2} \rightarrow R_{GEO} = \left(\frac{GMT_{Giorno}^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 42000 \text{ Km}$$

4. La velocità massima sarà assunta in corrispondenza del perielio, mentre la minima all'afelio. I valori desiderati si trovano facilmente uguagliando l'energia totale a $-\frac{GMm}{2a}$. Si trova che

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{GM r_{\max}}{a r_{\min}}}$$
$$v_{\min} = \sqrt{\frac{GM r_{\min}}{a r_{\max}}}$$

5. Il periodo del moto orbitale è semplicemente dato dalla legge di Keplero

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}$$

6. Questa identità segue direttamente dalle due richieste precedenti.

7. Infine, questo ultimo punto non è altro che la dimostrazione della famosa relazione usata in precedenza

$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

Esistono tanti modi per dimostrarla, uno lo abbiamo visto nella parte di teoria. Un modo alternativo consiste nell'utilizzare un'operazione di media temporale dell'energia meccanica. Abbiamo visto che nel caso di un'orbita circolare

$$E = -\frac{GMm}{2R}$$

Cosa succede se R non è costante nel tempo? Calcoliamo la media temporale dell'energia

$$-\frac{1}{T} \int_0^T \frac{GMm}{2r(t)} dt$$

dove T è il periodo orbitale. Ricordando che $L = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$ e che $r(\theta) = \frac{L^2}{GMm^2(1+\varepsilon \cos \theta)}$ e sostituendo sopra, si ottiene

$$-\frac{1}{T} \int_0^T \frac{GMm}{2r(t)} dt = -\frac{L}{2T} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+\varepsilon \cos \theta} = -\frac{GMm}{2a}$$

1.2 Farfalle kamikaze

Posta la sorgente nell'origine, nel formalismo delle coordinate polari la velocità della farfalla, può essere scritta come

$$\vec{v} = \dot{R}\hat{r} + R\dot{\theta}\hat{\theta} = -v \cos \alpha \hat{r} + v \sin \alpha \hat{\theta}$$

dove v è il modulo della velocità (non necessariamente costante), e α è l'angolo fissato tra la direzione del moto e la direzione della sorgente. Da questo segue

$$\begin{aligned}\dot{R} &= v \cos \alpha \\ R\dot{\theta} &= -v \sin \alpha\end{aligned}$$

e quindi

$$\dot{\theta} = -\frac{\dot{R}}{R} \tan \alpha$$

da cui integrando si ha

$$R = R_0 e^{-\frac{\theta}{\tan \alpha}}$$

che per $\tan \alpha > 0$ rappresenta una spirale logaritmica attorno all'origine. Se R_0 è molto grande possiamo osservare che la traiettoria diventi quasi essenzialmente rettilinea.

1.3 Razzo su Marte

1. Nell'approssimazione in cui un pianeta è un corpo sferico di massa M e raggio R , con densità ρ :

$$g = G \frac{M}{R^2} = \frac{4}{3} \pi G \rho R \quad ; \quad \frac{1}{2} V_f^2 = G \frac{M}{R} = \frac{4}{3} \pi G \rho R^2$$

$$\Rightarrow \frac{V_T^2}{V_M^2} = \frac{R_T^2}{R_M^2} = \frac{g_T^2}{g_M^2} = \frac{1}{k^2} \Rightarrow \frac{V_T}{V_M} = \frac{1}{k} \approx 2.63$$

2. Ci chiediamo innanzitutto quale velocità può raggiungere un razzo come quello descritto dal testo: analizziamo il problema nel sistema tangente (ovvero quello che è inerziale e con la stessa velocità del razzo al tempo t). Sia λ la massa rimanente di combustibile. In un istante dt il razzo perde una massa $d\lambda$ e prende un impulso $-w d\lambda$, da redistribuire su una massa $\lambda + m$, per cui prende una velocità $\frac{-w d\lambda}{\lambda + m}$. Il valore iniziale di λ è M e quello finale è 0:

$$\Delta V = \int_M^0 \frac{-w d\lambda}{\lambda + m} = w \int_0^M \frac{1}{\lambda + m} d\lambda = w \log \frac{M + m}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{M}{m} = e^{\Delta V/w} - 1$$

Possiamo a questo punto osservare che:

$$g = \frac{GM}{R^2}, \quad \rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{g}{\frac{4}{3}\pi \rho G}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} V_f^2 = \frac{4}{3} \pi G \rho R^2 \Rightarrow V_f = \sqrt{\frac{3}{2\pi \rho G}} g$$

Richiedendo che il ΔV sia proprio V_f :

$$\left(\frac{M}{m}\right)_T = e^{V_T/w} - 1 \quad , \quad V_T = \sqrt{\frac{3}{2\pi\rho G}} g_T \approx 11.2 \text{ km/s}$$

$$\left(\frac{M}{m}\right)_M = e^{V_M/w} - 1 \quad , \quad V_M = \sqrt{\frac{3}{2\pi\rho G}} g_T k \approx 4.3 \text{ km/s}$$

1.4 Missile verso l'equatore

1. Dall'equazione dell'energia segue

$$-\frac{GMm}{2a} = \frac{1}{2}m \left(\frac{GM}{R} \right) - \frac{GMm}{R}$$

Segue quindi che $a = R$.

2. L'ellisse ha la proprietà per cui la somma delle distanze da ciascun punto ai due fuochi è costante (ed uguale a $2a$). Quindi il secondo fuoco dell'ellisse (quello che non sta nel centro della Terra) sta a distanza R sia dal polo che dall'equatore. Quindi, l'altezza desiderata vale

$$h = R \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - R = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

3. Il tempo di volo può essere trovato ricordando che esso è proporzionale all'area spazzata dal raggio vettore. In questo caso vale

$$T = (\pi + 2) \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

1.5 Asteroide dentro l'orbita terrestre

1. Se la traiettoria è parabolica, allora l'energia meccanica totale è nulla

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GmM_S}{r} = 0$$

Nel punto della parabola più vicino al sole si ha $r = r_{\min} = p$ e $\dot{r} = 0$, quindi sostituendo si trova $L^2 = 2m^2pGM_S$. Per un generico valore di r si ha che

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{GmM_S}{r} - \frac{L^2}{2mr^2} \right)}$$

Separando le variabili da quest'ultima equazione è possibile integrare entrambi i membri e trovare che

$$T = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr \left[\frac{2}{m} \left(\frac{GmM_S}{r} - \frac{L^2}{2mr^2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2GM_S}} \int_p^R \frac{rdr}{\sqrt{r-p}}$$

Questo integrale è risolvibile operando la sostituzione $y = \sqrt{r-p}$. Quello che si ottiene è

$$T = \frac{4R^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2GM_S}} \left(1 + \frac{2p}{R} \right) \sqrt{1 - \frac{p}{R}}$$

2. Considerando T come una funzione della variabile p e annullando la sua derivata prima si trova che il valore massimo viene assunto per $p = \frac{R}{2}$ ed è

$$T_{Max} = \frac{4R^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{GM_S}} = \frac{2}{3\pi} T_t \simeq 77 \text{ giorni}$$

3. L'energia meccanica della Terra dopo la caduta dell'asteroide sul Sole è

$$-\frac{GM_S(1+\alpha)M_T}{2a} = \frac{GM_S M_T}{2R} - \frac{GM_S(1+\alpha)M_T}{R}$$

dove a è il semiasse maggiore della nuova orbita. Semplificando si trova

$$a = \frac{1+\alpha}{1+2\alpha} R$$

Come era prevedibile, $a < R$ perché quello che prima era R adesso è la distanza massima dal fuoco.

$$R = a + c \longrightarrow e \equiv \frac{c}{a} = \frac{R}{a} - 1 = \frac{\alpha}{1+\alpha}$$

Questa eccentricità è una funzione crescente di α , limitata superiormente dal valore unitario. Quindi per ogni valore di $\alpha > 0$ si hanno delle orbite ellittiche.

1.6 Pianeti e palline

Essendo i due pianeti identici, basta che una pallina arrivi a metà strada tra i due con una velocità infinitesimale, in modo da cadere sul pianeta di

arrivo. Calcoliamo quanto deve essere la velocità di lancio per fare avvenire ciò. Usando la conservazione dell'energia meccanica si trova

$$v_{\text{lancio}} = \sqrt{\frac{9GM}{10R}}$$

D'altra parte, la velocità di rimbalzo della pallina 1 è

$$v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{\frac{2GMh}{R^2}}$$

dove $h = 1m$. Dalla teoria degli urti elastici, sotto le ipotesi date nella traccia, segue che la velocità di rimbalzo della pallina n -esima vale

$$v_n = (2^n - 1)v_1 = (2^n - 1)\sqrt{\frac{2GMh}{R^2}}$$

Uguagliando la velocità di lancio necessaria affinché la pallina arrivi a metà strada e la velocità di rimbalzo della pallina n -esima, si trova

$$n = \log_2 \left(1 + \sqrt{\frac{9R}{20h}} \right) \approx 9.39$$

Il primo intero utile è quindi $n = 10$.

1.7 Orbite poligonali

Scriviamo l'energia totale del satellite come

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \lambda r^\beta$$

per le piccole oscillazioni intorno all'orbita circolare vale

$$L = mr_0^2\dot{\theta}$$

dove r_0 è il raggio dell'orbita circolare, che possiamo trovare derivando il potenziale efficace e imponendo che sia nullo

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = -\frac{L^2}{mr^3} + \lambda\beta r^{\beta-1}$$

$$\frac{L^2}{mr_0^2} = \lambda\beta r_0^\beta$$

possiamo trovare la frequenza con cui il raggio oscilla intorno alla posizione di equilibrio derivano ancora il potenziale efficace

$$\frac{d^2 V_{\text{eff}}}{dr^2} = \frac{3L^2}{mr^4} + \lambda\beta(\beta - 1)r^{\beta-2}$$

quindi sostituendo r_0 dalla relazione trovata prima troviamo

$$\frac{d^2 V_{\text{eff}}}{dr^2} = 3\lambda\beta r^{\beta-2} + \lambda\beta(\beta - 1)r^{\beta-2} = \lambda(\beta + 2)r^{\beta-2}$$

possiamo adesso usare la relazione per ω_r che si può esprimere come $\sqrt{\frac{d^2 V}{dr^2}(r_0)/m}$, la condizione che l'orbita abbia n raggi massimi e n raggi minimi si traduce come $\omega_r = n\dot{\theta}$, sostituendo all'interno di questa relazione quanto abbiamo trovato prima si trova

$$\frac{\lambda\beta(\beta + 2)}{m} r_o^{\beta-2} = n^2 \frac{\lambda\beta}{m} r_o^{\beta-2}$$

ovvero $\beta = n^2 - 2$, l'unica condizione su λ si trova dalla condizione che esista il minimo del potenziale efficace, per $n > 1$ si ha $\beta > 0$ e quindi dalla formula $\frac{L^2}{mr_0^2} = \lambda\beta r_0^\beta$ si trova che anche λ deve essere positivo, per $n = 1$ si trova $\beta = -1$ che è il caso ben noto di potenziale Newtoniano in cui $\lambda < 0$.

1.8 Perturbazione del potenziale armonico

Ripercorrendo la trattazione generale dei potenziali perturbati si nota che si è solo usato alla fine che il potenziale non perturbato ammetta orbite ellittiche, il potenziale armonico ammette orbite ellittiche chiuse e quindi i risultati finali ottenuti dal caso generale valgono anche in questo caso.

1.9 Potenziale Miracoloso

Scriviamo l'espressione generale per l'energia totale del satellite

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r} + \frac{\lambda}{r^2}$$

essendo interessati alla forma delle orbite cambiamo la variabile indipendente passando da t a θ quindi sostituiamo $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$ e usando la relazione per il momento angolare $L = mr^2\dot{\theta}$ troviamo

$$E = \frac{L^2}{2mr^4} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r} + \frac{\lambda}{r^2}$$

è utile adesso il cambio di variabile $u = 1/r$ $du = -\frac{1}{r^2} dr$ sostituendo troviamo

$$E = \frac{L^2}{2m} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{L^2 u^2}{2m} + \alpha u + \lambda u^2$$

L'energia è una costante del moto quindi possiamo derivare rispetto a θ e imporre che la derivata sia nulla,

$$0 = \frac{L^2}{m} \frac{d^2 u}{d\theta^2} + \frac{L^2 u}{m} + 2\lambda u + \alpha$$

se chiamiamo

$$\chi = \sqrt{1 + \frac{2m\lambda}{L^2}}$$

le soluzioni dipendono qualitativamente dal segno di χ . Se questo è nullo si trova che $u(\theta)$ segue una parabola la cui concavità dipende dal segno di α , se χ è negativo $u(\theta)$ assume la forma di un esponenziale che può essere divergente o convergente a seconda delle condizioni iniziali. Nel caso di χ positivo si hanno le soluzioni oscillanti

$$u = c_1 \cos(\sqrt{\chi}\theta + \phi) - \alpha \left(\frac{L^2}{m} + 2\lambda \right)^{-1}$$

e da questa si trova che l'angolo di precessione nel caso di orbita limitata (chiaramente anche questo caso ammette orbite illimitate) è

$$\delta\theta = 2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{\chi}} - 1 \right)$$

quindi vediamo che il verso in cui precedono le orbite dipende dal modulo di χ ed in particolare cambia segno per $\chi = 1$, che corrisponde al potenziale Newtoniano in cui $\delta\theta = 0$.