

Miscellanea

Daniele Battesimo Provenzano*

10 febbraio 2022

Sommario

L'obiettivo della lezione è trattare alcuni argomenti di fisica moderna, accompagnati da molti esercizi base rivolti a chi sa poco o niente sull'argomento. La prima metà della lezione sarà dedicata ai concetti chiave della relatività ristretta, come le trasformazioni di Lorentz e la dilatazione/contrazione di tempi/lunghezze¹. Nella seconda metà sarà trattato il modello atomico di Bohr e verranno introdotti i principali risultati della meccanica quantistica.

1 Introduzione

Le equazioni di Maxwell, completate verso la metà del diciannovesimo secolo, predicono la propagazione di onde elettromagnetiche con velocità pari a c , il cui valore può essere determinato con degli esperimenti. Le equazioni d'onda a cui i campi elettromagnetici obbediscono nel vuoto sono

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x_i^2} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x_i^2} = 0 \quad (2)$$

Agli inizi del 1900, le equazioni dell'elettrodinamica erano in accordo con tutte le verifiche sperimentali effettuate. Il pilastro della fisica fino ad allora era la

*daniele.provenzano@sns.it

¹Sottolineiamo che questa lezione contiene solo concetti basilari della relatività. Quindi, se si desidera approfondire l'argomento, consigliamo di dare un'occhiata alle dispense di "Relatività Ristretta" degli anni passati.

meccanica classica, che è supposta essere invariante sotto le trasformazioni di Galileo:

$$\begin{cases} t' = t \\ \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \end{cases} \quad (3)$$

Queste consentono di cambiare le coordinate da un sistema di riferimento inerziale S ad uno inerziale S' che si muove di moto rettilineo uniforme con velocità $\vec{v}$ rispetto al primo.

La fisica era supposta essere invariante sotto queste trasformazioni: *le leggi fisiche sono le stesse nei vari sistemi di riferimento inerziali*. Tuttavia le equazioni (1) e (2), non sono invarianti sotto queste trasformazioni: nel sistema S' i campi elettromagnetici obbedirebbero ad equazioni diverse dalle Eq. (1) e (2).

In particolare, dato che le trasformazioni Eq. (3) implicano che le velocità debbano essere additive, ci aspettiamo che la velocità di propagazione della luce non sia sempre c nei vari sistemi di riferimento! Per cercare di spiegare il disaccordo fra le due teorie si possono intraprendere due strade.

- Si assume che le trasformazioni di Galileo e quindi la meccanica di Newton siano leggi valide in ogni sistema di riferimento, mentre la velocità della luce pari a c come un fatto valido sono nel sistema di riferimento di un mezzo detto *etere*.
- Si suppone, come fatto da Einstein, che le equazioni di Maxwell siano le vere in tutti i sdr inerziali. Conseguentemente si deve assumere che la velocità c della luce sia la stessa in ogni sistema di riferimento.

Vari esperimenti (Michelson-Morley, Fizeau, tutti gli esperimenti di alte energie negli acceleratori di particelle) hanno sempre confermato la seconda ipotesi, che sta alla base della teoria della relatività ristretta. Nella sezione successiva studieremo sistematicamente i postulati di questa teoria.

2 Postulati della Relatività Ristretta

La relatività ristretta si basa su due postulati fondamentali:

Postulato 2.1. *Le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali.*

Postulato 2.2. *La velocità della luce è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali.*

Inoltre, si assume che lo spazio sia omogeneo ed isotropo (ossia che non ci siano né punti né direzioni privilegiate). Il primo postulato sostanzialmente afferma che una legge della natura, espressa nella coordinate di un sistema inerziale S , è la stessa in forma se scritta in un altro sistema inerziale S' nelle coordinate di S' . Si osservi che questo postulato era valido pure in meccanica classica (il cosiddetto principio di relatività galileiano). Pertanto le principali differenze fra la meccanica classica e la relatività ristretta provengono dall'altro postulato. Esso è molto meno intuitivo del primo e consente subito di predire qualche caratteristica della nuova teoria. In particolare, segue subito che le velocità non possono più essere sommate come semplici vettori, altrimenti la velocità della luce non sarebbe la stessa in sistemi inerziali diversi. Ad esempio, supponiamo di essere fermi a terra. Un'auto sta viaggiando con velocità $\vec{v}$ verso di noi e sul tettuccio ha una lampadina che irraggia luce nella direzione del moto. Allora, sia nel nostro sistema (solidale col terreno) che nel sistema solidale all'auto, osserveremo la luce muoversi alla velocità c , e non $\vec{c} + \vec{v}$! Si può mostrare, a partire dai postulati, che sistemi inerziali² si muovono a velocità relativa costante³. Nella trattazione che segue, assumeremo che questi siano tra loro in moto rettilineo uniforme e non ci soffermeremo su dettagli più tecnici.

3 Ritardo dell'informazione

Come vedremo, i segnali non possono propagarsi più velocemente della luce. Da questo segue che dobbiamo porre attenzione a come si misurano in pratica le distanze e gli intervalli temporali.

3.1 Definizioni operative

Dobbiamo adesso dare un modo operativo per poter misurare i tempi e le distanze in relatività ristretta.

3.1.1 Orologio-Luce e Misura di Tempo

Per misurare i tempi si utilizza un cosiddetto *orologio-luce*, schematizzato in Fig. 1. Questo dispositivo è costituito da due superfici piane e parallele, separate da una distanza L . Su una poniamo un rilevatore di luce ed un dispositivo laser puntato perpendicolarmente verso la seconda superficie, che

²Ossia in cui un corpo libero si muove di moto rettilineo uniforme.

³Esistono anche approcci in cui si assume direttamente che sistemi inerziali si debbano muovere di moto rettilineo uniforme, in accordo con il caso classico.

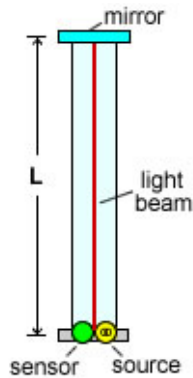


Figura 1: Schematizzazione di un orologio-luce.

sarà uno specchio riflettente. La sorgente emette luce che giunge allo specchio, viene riflessa e torna indietro sul rilevatore. Una volta che la luce è stata rilevata, il laser emette un nuovo raggio di luce, e così via. Così sappiamo che il tempo trascorso fra un'emissione di un raggio di luce e la successiva è $\frac{2L}{c}$. In pratica misurare il tempo significa “contare” quante volte la luce torna sul rilevatore.

3.1.2 Regolo Rigido e Misura delle Distanze

Cosa si intende per misura di distanza? Se vogliamo misurare la distanza fra diversi punti dello spazio, l'idea è di costruire un reticolo cartesiano tridimensionale e poi usare il teorema di Pitagora per calcolare le distanze nel modo solito. Un procedimento equivalente è quello di porre uno specchio nel punto di cui si vuole la distanza, mandarci perpendicolarmente un raggio di luce dall'origine e misurare il tempo τ (stando con l'orologio fermi nell'origine) di andata e ritorno del raggio. E' naturale definire la distanza fra l'origine e il punto come $\frac{c\tau}{2}$. Si osservi che in questo modo si può facilmente costruire un sistema di coordinate cartesiane, ripetendo la procedura nelle tre direzioni ortogonali. Inoltre, con questo modo di assegnare distanze, si riesce a capire quanto un punto sia da noi lontano guardando il “ritardo” dell'orologio posto in quel punto. Ad esempio, supponiamo che sul sole (distante circa 8 minuti-luce da noi) ci sia un enorme orologio digitale, le cui cifre siano visibili fino sulla terra. Allora un osservatore sulla terra lo vedrebbe segnare il tempo con 8 minuti di ritardo rispetto al proprio orologio luce (supponendo che questi siano stati sincronizzati, vedi sezione successiva).

Una volta costruito il sistema cartesiano, si può calcolare la lunghezza di sbarre ferme nel nostro sistema di riferimento semplicemente misurando la distanza fra gli estremi.

Cosa fare se invece il corpo è in moto relativo al sistema, ad esempio lungo l'asse x ? Per semplicità consideriamo una sottile sbarra direzionata lungo l'asse x . Si definisce lunghezza la distanza euclidea degli estremi calcolata con le loro coordinate prese allo stesso tempo t . Ad una più attenta analisi questa prescrizione è utilizzata anche per misurare lunghezze in uno spaziotempo newtoniano, e non rappresenta davvero nulla di nuovo. Tuttavia, mentre non ci sono particolari problemi per misurare lunghezze di corpi a riposo, per corpi in movimento abbiamo bisogno di avere orologi agli estremi della lunghezza da misurare che siano sincronizzati fra loro per poter prendere le misure in modo corretto.

3.1.3 Sincronizzazione di Orologi

Supponiamo di essere in un sistema inerziale S . Supponiamo che ci siano due osservatori a riposo in S , A e B , che si trovano in punti spaziali distanti d . Entrambi sono dotati di orologi-luce. Entrambi possono utilizzare i loro orologi per misurare i tempi a cui avviene un qualche evento nel loro punto spaziale. Se tuttavia non c'è modo di sincronizzare gli orologi di A e B , ossia di porre una comune origine dei tempi, le misure fatte saranno inutili.

Per sincronizzare gli orologi, esiste la seguente procedura:

- Si inizia con entrambi gli orologi spenti; gli orologi sono costruiti in modo tale da essere attivati da un raggio di luce.
- Si fissa l'origine temporale dell'orologio A a 0, e l'origine del secondo a $\frac{d}{c}$.
- Si sposta l'orologio B nel punto desiderato a distanza d , sempre senza accenderlo.
- L'osservatore A attiva il proprio orologio e contemporaneamente invia un segnale luminoso a B .
- Dopo un tempo $\frac{d}{c}$, B riceve il segnale e il suo orologio si attiva.

Si osservi che per questo metodo abbiamo solo bisogno di misurare una distanza fra punti fissi e non in moto relativo, e quindi non c'è bisogno di una sincronizzazione degli orologi per mettere in atto la procedura delineata.

In questo modo abbiamo che i due orologi sono sincronizzati. Si osservi che questa procedura può essere ripetuta per un qualsiasi numero di orologi che vogliamo utilizzare in vari punti dello spazio.

Un ulteriore metodo per sincronizzare gli orologi è quello di azionarli nello stesso punto contemporaneamente e poi di spostare l'orologio B nel punto

desiderato molto lentamente, in modo da rendere piccole a piacere eventuali dilatazioni temporali, di cui parleremo nella prossima sezione.

4 Conseguenze Fondamentali: Dilatazione dei Tempi e Contrazione delle Lunghezze

4.1 Dilatazione dei Tempi

Consideriamo un osservatore A che si trova in una stazione dei treni con un orologio luce i cui raggi siano visibili anche ad altri osservatori (possiamo immaginare che l'orologio abbia una "custodia" esterna trasparente). Un treno sta sfrecciando per la stazione a velocità uniforme v in direzione orizzontale $\hat{x}$ rispetto all'osservatore A . A bordo di questo, c'è un osservatore B che vuole misurare con il suo orologio luce il tempo $\Delta t'$ che intercorre fra gli eventi "emissione raggio di luce da orologio di A " e "rivelazione raggio di luce dell'orologio di A ", visti dal suo sistema di riferimento S_B (in pratica vuole misurare il tempo che A usa per misurare i propri tempi). Il percorso del

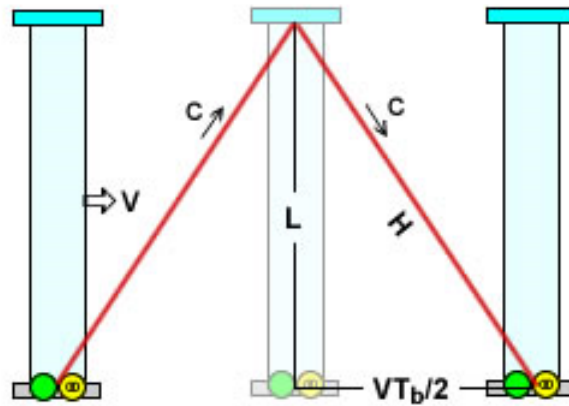


Figura 2: traiettoria dei raggi di luce dell'orologio di A visti da B .

raggio di luce dell'orologio di A visto nel sistema S_B è riportato in figura Fig. 2. Dato che il raggio di luce in A fa un solo "viaggio di andata e ritorno" dalla sorgente laser durante i due eventi considerati, $\Delta t'$ è per definizione il tempo impiegato in S_B dal raggio di luce dell'orologio di A per fare andata e ritorno. Utilizzando il teorema di Pitagora, è facile accorgersi che la distanza percorsa

dalla luce in S_B è

$$d = 2\sqrt{L^2 + v^2 \frac{\Delta t'^2}{4}} = \sqrt{4L^2 + v^2 \Delta t'^2}$$

E' cruciale osservare che la velocità del raggio di luce dell'orologio di A visto in S_B è comunque c ! Segue quindi che

$$\Delta t' = \frac{d}{c} = \sqrt{4 \frac{L^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2} \Delta t'^2}$$

Ma $\Delta t = 2L/c$ per definizione!⁴ Segue quindi la relazione:

$$\Delta t'^2 = \Delta t^2 + \frac{v^2}{c^2} \Delta t'^2$$

da cui segue la formula:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \cdot \Delta t \quad (4)$$

dove abbiamo definito le quantità

$$\begin{cases} \beta = \frac{v}{c} \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{cases}$$

Il fatto che la velocità della luce sia uguale in tutti i sistemi di riferimento ha quindi l'importante conseguenza che la distanza temporale fra due eventi che si trovano sulla stessa coordinata x in S si dilata di un fattore $\gamma > 1$ per $v < c$. Si osservi anche che nel limite classico $v \ll c$, si ha che $\gamma \approx 1$, ossia $\Delta t \approx \Delta t'$, in accordo con le trasformazioni di Galileo. Precisiamo una cosa: in tutto questa discussione abbiamo supposto che l'osservatore B tenesse in conto durante le misure del tempo di propagazione finito della luce che, emessa da A , si propaga fino a lui, sottraendo opportunamente i ritardi temporali. La cosa importante è appunto che questa trasformazione dei tempi avviene indipendentemente dal tempo di ritardo impiegato dalla luce per arrivare all'apparato sperimentale di B . Altra precisazione molto importante da fare è che questa semplice formula di dilatazione dei tempi vale perché gli eventi "emissione luce" e "rilevazione luce" avvengono in punti con stessa coordinata

⁴Stiamo assumendo che le lunghezze in direzione ortogonale al moto relativo siano uguali nei due sistemi.

x (direzione del moto relativo) in S^5 . Proprio per questo motivo non è lecito utilizzare la formula di dilatazione dei tempi “al contrario” invertendo i ruoli di S e S' : gli eventi che abbiamo considerato non avvengono nella stessa x' in S' . Il lettore più attento potrebbe contestare che in questa derivazione abbiamo assunto che la distanza che separa i due estremi dell’orologio luce di A sia lunga L in entrambi i sistemi di riferimento. In effetti si può mostrare che lunghezze ortogonali alla direzione del moto relativo dei due osservatori sono le stesse in entrambi i sistemi di riferimento. Un argomento che si può utilizzare per giustificare questo fatto è il seguente: consideriamo due osservatori C , D che si corrono incontro. Entrambi hanno in mano dei bastoni che tengono orizzontalmente e ortogonalmente alla direzione del moto. Le punte dei due bastoni sono colorate con vernice fresca. Se adesso ci fosse una contrazione delle lunghezze ortogonali al moto relativo, C dovrebbe vedere il bastone di D più corto del suo. Pertanto dopo l’urto fra C e D il bastone di C riporterebbe delle tacche di vernice sul manico causate dal bastone di D . Se ripetiamo il ragionamento dal punto di vista di D , essendo la situazione completamente simmetrica, è il bastone di D ad avere le tacche sul proprio manico. Quando però C e D si fermano e confrontano l’accaduto, devono ovviamente mettersi d’accordo su quanto successo. Quindi non può esserci stata alcuna contrazione delle lunghezze ortogonali poiché altrimenti C e D non potrebbero concordare sul risultato dello scontro. Ribadiamo che questa situazione, a differenza di quella studiata per spiegare la dilatazione dei tempi, è simmetrica nei due osservatori.

4.2 Contrazione delle lunghezze

Il fatto che l’intervallo temporale tra due eventi sia diverso per due osservatori in differenti sistemi si riflette sulle distanze spaziali. Consideriamo un’auto che si muove a velocità relativistica v su una pista rettilinea. Consideriamo due sistemi di riferimento

- S_1 Il sistema solidale alla pista
- S_2 Il sistema solidale all’auto

L’auto percorre un tratto di strada che secondo S_1 è lungo L_1 in un tempo Δt_1 . Vogliamo trovare che cosa misura invece l’osservatore 2.

Facciamo chiarezza su cosa viene misurato e cosa sono le grandezze che abbiamo identificato. Denotiamo il tratto di strada mettendo due paletti nel terreno, il paletto A , il primo, e il paletto B , il secondo. Secondo S_1 , la

⁵Con il formalismo delle trasformazioni di Lorentz sarà più chiaro il perché.

distanza fra i due paletti è L_1 . Inoltre, sempre secondo S_1 , l'auto impiega un tempo Δt_1 ad andare dal paletto A al paletto B .

Nel sistema S_2 , invece, i due paletti disteranno L_2 , a priori $L_2 \neq L_1$, e impiegherà un tempo Δt_2 da quando vede il paletto A sfrecciare accanto a lui a quando vede il paletto B .

Nel riferimento S_2 quindi gli eventi *passo davanti ad A* e *passo davanti a B* accadono nello stesso luogo. Di conseguenza si può usare la formula Eq. (4) e dire che

$$\Delta t_1 = \gamma \Delta t_2$$

Ovvero che secondo l'osservatore sulla pista l'auto ci mette più tempo. Dato che nel riferimento S_2 il palo B viaggia a velocità v verso l'auto, nel tempo Δt_2 il palo B percorre una distanza $L_2 = v \Delta t_2$. Usando la relazione di prima

$$L_2 = \frac{L_1}{\gamma} \quad (5)$$

Che è la formula di contrazione relativistica delle lunghezze. Come per la formula Eq. (4), ha senso utilizzarla da S_1 a S_2 e non al contrario in quanto la misurazione di S_1 ha qualcosa di più di quello che misura S_2 in quanto nel riferimento S_1 **l'oggetto misurato è fermo**.

Questa lunghezza caratteristica viene chiamata lunghezza a riposo ed è qualcosa di intrinseco nell'oggetto che non dipende dal riferimento⁶.

Teniamo a precisare che la lunghezza misurata nel sistema del laboratorio è effettivamente minore della lunghezza della sbarra misurata nel sistema in cui questa è a riposo. La contrazione delle lunghezze **non** è un effetto dovuto ai ritardi della luce utilizzata per misurare.

5 Trasformazioni di Lorentz

Come già anticipato, le trasformazioni di Galileo vanno in contraddizione col secondo postulato. Esse vanno sostituite nuove trasformazioni, che, dato un boost a velocità v lungo l'asse x , si leggono

$$\begin{cases} ct' = \gamma ct - \gamma \beta x \\ x' = -\gamma \beta ct + \gamma x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (6)$$

⁶In quanto per misurarla si prende un riferimento in cui è fermo.

Queste sono le cosiddette *trasformazioni di Lorentz*, in cui $\beta \equiv \frac{v}{c}$. Ecco alcune loro proprietà:

- La composizione di due trasformazioni di Lorentz è ancora una trasformazione di Lorentz.
- Ogni trasformazione ammette una trasformazione inversa.
- La composizione di trasformazioni di Lorentz è associativa

Le trasformazioni di Lorentz si dividono in due classi⁷: le rotazioni attorno ai tre assi cartesiani (di cui non ci occuperemo in questa lezione) e i boost lungo i tre assi. L'equazione (6) rappresenta un cambio di coordinate per passare da un sistema S ad uno S' che si sta muovendo con velocità uniforme $v = \beta c$ lungo l'asse x rispetto ad S (per convincersene, basta vedere come si muove l'origine di S' in S). Si osservi che i boost galileiani (equazione (3)) sono il limite dei boost di Lorentz per $\frac{v}{c} \ll 1$. Esplicitamente, le trasformazioni di Galileo si ottengono con il limite formale $\gamma \rightarrow 1$, $\beta \rightarrow 0$, ma tenendo fissa la quantità $\beta c = v$. In questo modo, le trasformazioni (6) diventano

$$\begin{cases} ct' = ct \\ x' = -vt + x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

che, semplificando le c , diventano semplicemente le note trasformazioni di Galileo.

5.1 Importanza della linearità

Riscriviamo le trasformazioni di Lorentz che indicano un boost lungo l'asse x a velocità βc nel seguente modo:

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (7)$$

Notiamo che queste trasformazioni sono lineari. Questo ha delle importanti conseguenze in tutta la teoria. Per esempio, possiamo andare a considerare due

⁷più tutte le composizioni generate dalle combinazioni delle due

eventi nel riferimento S , che indicheremo con le loro 4 coordinate (ct_1, x_1, y_1, z_1) e (ct_2, x_2, y_2, z_2) . Questi due eventi verranno ovviamente visti entrambi da un riferimento S' con una trasformazione di Lorentz, ovvero avremo rispettivamente

$$\begin{cases} ct'_1 = \gamma(ct_1 - \beta x_1) \\ x'_1 = \gamma(x_1 - \beta ct_1) \\ y'_1 = y_1 \\ z'_1 = z_1 \end{cases} \quad \begin{cases} ct'_2 = \gamma(ct_2 - \beta x_2) \\ x'_2 = \gamma(x_2 - \beta ct_2) \\ y'_2 = y_2 \\ z'_2 = z_2 \end{cases}$$

Facendo le differenze equazione per equazione otteniamo, per esempio prendendo la componente temporale,

$$c(t'_2 - t'_1) = \gamma(c(t_2 - t_1) - \beta(x_2 - x_1))$$

Ovvero

$$c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta\Delta x)$$

Facendo il conto per le altre componenti, si ha

$$\begin{cases} c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta\Delta x) \\ \Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c\Delta t) \\ \Delta y' = \Delta y \\ \Delta z' = \Delta z \end{cases}$$

Questo significa che le differenze di coordinate spazio-temporali trasformano secondo le stesse trasformazioni di Lorentz!

6 Composizione delle Velocità

Nelle sezioni precedenti abbiamo visto che la velocità non può essere additiva. Vediamo allora qual è la vera legge di trasformazione delle velocità. Consideriamo un oggetto che si muove lungo l'asse x , con una velocità $\vec{v} = v\hat{x} = \beta_v c\hat{x}$ rispetto a terra. Calcoliamo $\vec{v}'$, cioè la velocità dello stesso oggetto percepita da un riferimento che si muove a velocità $\vec{u} = u\hat{x} = \beta_u c\hat{x}$ rispetto a terra. Per la definizione di derivata,

$$\vec{v}' = \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x - \beta_u c\Delta t}{\Delta t - \beta_u \Delta x/c} = c \frac{\beta_v - \beta_u}{1 - \beta_v \beta_u}$$

Notiamo che, dato che entrambe i β sono compresi fra -1 e 1 , la nuova velocità non può mai essere maggiore di c . Infatti, il caso limite si ottiene proprio quando $\beta_v = 1$. In tal caso, si ottiene $\vec{v}' = c\hat{n}$ in ogni sistema di riferimento, coerentemente con quanto ci si aspetta dai postulati.

A questo punto siamo pronti per vedere come trasforma la velocità per una direzione generica e non solo per boost paralleli. Innanzitutto notiamo che se abbiamo a disposizione solo due vettori, ovvero la velocità iniziale $\vec{v} = \vec{\beta}_v c$ e il boost $\vec{u} = \vec{\beta}_u c$, allora siamo sicuri che queste due velocità stanno in un piano, per cui possiamo, senza perdita di generalità, mettere $\vec{u} = u\hat{x}$ e mettere $\vec{v}$ nel piano xy . Per semplicità indicheremo $\vec{v} = \vec{\beta}c = c(\beta_x\hat{x} + \beta_y\hat{y})$ e $\vec{u} = \beta_u c$

$$\begin{cases} \beta'_x = \frac{1}{c} \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{1}{c} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\gamma(\Delta x - \beta_u c \Delta t)}{\gamma(\Delta t - \beta_u \Delta x / c)} = \frac{\beta_x - \beta_u}{1 - \beta_u \beta_x} \\ \beta'_y = \frac{1}{c} \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{1}{c} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\gamma(\Delta t - \beta_u \Delta x / c)} = \frac{\beta_y}{\gamma(1 - \beta_u \beta_x)} \end{cases}$$

La cosa che bisogna notare è che mentre la *lunghezza* su un asse perpendicolare alla direzione del boost è invariante, a causa della dilatazione dei tempi la velocità cambia e non di poco. È abbastanza semplice immaginare un andamento simile. Infatti, il modulo quadro della velocità deve comunque essere $\leq c^2$. Se cambiasse solo la componente x , la velocità potrebbe tendere asintoticamente a c per opportuni cambi di riferimento. Se non cambiasse la componente ortogonale, ad un certo punto la velocità sarebbe maggiore di c , cosa che non può accadere.

7 Esercizi di Relatività

Problema 7.1. Una tavola di legno si muove verso destra con velocità $\frac{c}{2}$ rispetto al suolo. Nel sistema di riferimento del suolo, la sua lunghezza vale l_0 . Quanto vale la lunghezza della tavola nel sistema di riferimento di un uccello che vola verso destra alla velocità $\frac{3c}{4}$?

Problema 7.2. Due locomotive hanno la stessa lunghezza propria l_0 e si stanno muovendo nella stessa direzione (e nello stesso verso). La velocità della prima è $\frac{3c}{4}$, mentre quella della seconda è $\frac{c}{2}$.

1. Se un osservatore posto a terra vede la punta della prima allineata con l'estremo posteriore della seconda, dopo quanto tempo lo stesso vedrà la prima superare completamente la seconda?

2. Nella stessa configurazione del punto 1, quanto impiega la prima locomotiva a superare la seconda nei sistemi di riferimento rispettivi?

Problema 7.3. Si consideri uno strumento fatto in questo modo: due specchi paralleli, posti uno di fronte all'altro, all'interno del quale rimbalza un fotone (in pratica è un orologio-luce). Il numero di rimbalzi del fotone segna lo scorrere del tempo. Si studi il comportamento dell'orologio luce che si muove perpendicolarmente all'asse degli specchi, con velocità v . Quanti rimbalzi avvengono in un intervallo di tempo Δt ? Invece, quanti rimbalzi devono avvenire per l'osservatore che si muove assieme allo specchio, se tutti i sistemi di riferimento inerziali sono ugualmente privilegiati? Che effetto relativistico abbiamo dedotto?

Problema 7.4. Si calcoli come cambiano gli angoli tra due sistemi di riferimento S e S' legati da un boost. Quindi un'astronave che si muove a $v \lesssim c$, dove vedrà quasi tutte le stelle del cielo? Inoltre, le vedrà rosse o blu?

Problema 7.5. Consideriamo una pasta per biscotti su un nastro trasportatore che si muove a velocità v (comparabile con quella della luce) in una data direzione. Sopra di questo c'è uno stampo di forma circolare (diametro L a riposo). Quando azionato, questo scende perpendicolarmente sul nastro e taglia nella pasta un biscotto. Quando poi il nastro si ferma, quale sarà nel sistema a riposo la forma del biscotto? Le risposte che si possono dare sono tre:

1. Il biscotto sarà circolare.
2. Il biscotto apparirà di forma ovale, con il semiasse maggiore parallelo alla direzione del moto.
3. Il biscotto apparirà di forma ovale, ma con il semiasse maggiore perpendicolare alla direzione del moto.

8 Soluzioni degli Esercizi di Relatività

Soluzione 8.1. Nel sistema di riferimento dell'uccello, la velocità con cui si muove la tavola è

$$\frac{\frac{3c}{4} - \frac{c}{2}}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2c}{5}$$

Per la legge di contrazione delle lunghezze, la lunghezza percepita è

$$l = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{5} l_0.$$

Soluzione 8.2. 1. Per l'osservatore posto a terra, le lunghezze delle locomotive sono rispettivamente

$$l_1 = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}l_0}{4} \quad l_2 = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}l_0}{2}$$

Quindi il tempo di sorpasso è dato da

$$\Delta t = \frac{l_1 + l_2}{v_1 - v_2} = \frac{2l_0}{c} \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{3} \right).$$

2. Calcoliamo il tempo di sorpasso percepito da un osservatore solidale con la seconda locomotiva. Esso vedrà la prima locomotiva muoversi alla velocità

$$v = \frac{\frac{3c}{4} - \frac{c}{2}}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2c}{5}$$

e percepirà la sua lunghezza contratta

$$l = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{5} l_0$$

Allora il tempo di sorpasso sarà

$$\Delta t = \frac{l + l_0}{v} = \frac{5l_0}{2c} \left(\frac{\sqrt{21}}{5} + 1 \right)$$

Il risultato è analogo per un osservatore solidale alla prima locomotiva per motivi simmetria.

Soluzione 8.3. Se lo specchio fosse fermo, con i due estremi a distanza ℓ , in un intervallo di tempo Δt vengono fatti $N = \frac{\ell}{c\Delta t}$ rimbalzi.

Per un osservatore che vede lo specchio muoversi a velocità v , la luce si muove a velocità c ma in modo inclinato, perciò la velocità parallela all'asse che separa i due specchi, per il teorema di Pitagora, è $\sqrt{c^2 - v^2}$. Il numero di rimbalzi è dunque $N' = \frac{\ell}{\sqrt{c^2 - v^2}\Delta t} = \gamma N$.

Un osservatore in movimento con lo specchio vede dunque N' rimbalzi? Questo è in contrasto col principio di relatività, visto che lui non può sapere se si sta muovendo o no! Perciò, il tempo dovrebbe scorrere in modo diverso per lui, in modo che anche lui veda N rimbalzi. Abbiamo dedotto la dilatazione dei tempi!

Soluzione 8.4. Studiamo cosa succede agli angoli sul piano xy , considerando un boost lungo l'asse x . Il caso generico è troppo complicato. Immaginiamo un raggio di luce che arriva su un'astronave nel sistema di riferimento O , con un angolo θ rispetto all'asse dell'astronave (se $\theta = 0$ vuol dire che il raggio di luce arriva da davanti). La traiettoria del raggio di luce è perciò

$$\begin{cases} x = -ct \cos \theta \\ y = -ct \sin \theta \end{cases}$$

Quando cambio sistema di riferimento ho $x' = \gamma(x + \beta ct)$ e $y' = y$, quindi

$$\tan \theta' = \frac{\gamma(\cos \theta - \beta)}{\sin \theta}$$

Si noti come gli angoli diminuiscono quando l'astronave accelera in avanti. Questo vuol dire che un'astronave che si muove a velocità molto vicine a quelle della luce, vede quasi tutte le stelle del cielo davanti a sé, e le vede blu (la frequenza dei raggi luminosi aumenta a causa dell'effetto Doppler) mentre le poche stelle non ammassate a prua, sono spostate verso il rosso.

Soluzione 8.5. Vista dal sistema di riferimento dello stampo, in cui la pasta è in movimento, lo stampo crea una forma circolare di una pasta la quale è contratta nella direzione del moto di un fattore γ . Quando il nastro trasportatore si ferma, la pasta si riallungherà di un fattore γ nella direzione del moto. La risposta giusta è la 2.

9 Modello Atomico di Bohr

Tra fine '800 ed inizio '900 furono proposti diversi modelli che descrivessero la composizione ed il funzionamento degli atomi che costituiscono la materia. Thompson propose il modello *a panettone*, Rutherford il modello *planetario*. Entrambi erano basati su una trattazione puramente classica, non essendo ancora nata la meccanica quantistica. Il terreno era comunque pronto per Niels Bohr che, nel 1913, presentò un nuovo modello dell'atomo di idrogeno, il quale aggirò i problemi del modello planetario di Rutherford. Bohr applicò l'idea dei livelli energetici quantizzati, che 13 anni prima consentì a Planck di risolvere il problema della catastrofe ultravioletta. La teoria di Bohr è stata storicamente importante per lo sviluppo della fisica quantistica, e sembrava spiegare le serie di righe che venivano osservate studiando gli spettri emessi dalle stelle. Sebbene il modello di Bohr sia ormai considerato obsoleto e sia stato completamente sostituito da una teoria quanto-meccanica, possiamo usarlo per sviluppare le nozioni di quantizzazione di energia e momento angolare in sistemi di dimensioni atomiche. Bohr combinò le idee della teoria di Planck, il concetto di fotone di Einstein ed il modello planetario di Rutherford per arrivare ad un modello strutturale *semiclassico*, basato su alcune idee rivoluzionarie. Le principali caratteristiche del modello sono:

- L'elettrone si muove in orbite circolari attorno al protone sotto l'influenza della forza di attrazione elettrica.
- Solo alcune orbite degli elettroni sono stabili. In tali stati, detti *stati stazionari* l'elettrone non emette radiazione, sebbene esso stia accelerando continuamente. Quindi l'energia del sistema rimane costante.
- L'atomo emette radiazione quando l'elettrone compie una transizione da uno stato stazionario iniziale più energetico ad uno stato stazionario con energia inferiore. Questa transizione non è concepibile in modo classico. La frequenza ν della radiazione emessa si ricava dall'espressione della conservazione dell'energia

$$E_f - E_i = h\nu$$

dove E_i è l'energia dello stato iniziale, E_f è l'energia dello stato finale e h è la costante di Planck. Similmente, la promozione di elettroni a livelli energetici più alti avviene tramite l'assorbimento di un fotone.

- Il raggio delle orbite consentite è determinato dalla quantizzazione del momento angolare orbitale dell'elettrone: gli stati consentiti sono quelli per cui vale che $L = m_e v r = n \frac{h}{2\pi}$, dove n è un numero intero positivo.

Queste caratteristiche sono una miscela di principi completamente nuovi e di idee che all'epoca non erano ancora chiare. Usando questi postulati, possiamo calcolare i livelli di energia consentiti e trovare i valori delle lunghezze d'onda di emissione dell'atomo di idrogeno. L'energia totale dell'atomo, che consiste nell'energia cinetica dell'elettrone e nell'energia potenziale del sistema, è

$$E = K + U = \frac{1}{2}m_e v^2 - k_e \frac{e^2}{r} = -\frac{k_e e^2}{2r}$$

Poiché l'energia totale è negativa, il che indica che il sistema elettrone-protone è legato, bisogna cedere all'atomo un'energia pari a $\frac{k_e e^2}{2r}$ per portare l'elettrone a distanza infinita dal protone. Il raggio dell'orbita dell'elettrone può essere facilmente ricavato usando l'espressione della velocità orbitale e la condizione $m_e v r = n \frac{h}{2\pi}$. Esso vale

$$r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{m_e k_e e^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

dove $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$. Ciò implica che il raggio delle orbite ammesse ha valori discreti, quindi è quantizzato. Il raggio più piccolo corrisponde ad $n = 1$ ed è chiamato *raggio di Bohr*. Il suo valore è

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e k_e e^2} = 0.0529 \text{ nm}$$

Possiamo ottenere anche il raggio dell'orbita per un generico numero quantico n , ovvero

$$r_n = n^2 a_0 = n^2 (0.0529 \text{ nm}) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

La quantizzazione del raggio implica la quantizzazione dell'energia dell'orbita: sostituendo l'equazione appena trovata nell'espressione per l'energia totale, si ottiene

$$E_n = -\frac{k_e e^2}{2a_0} \left(\frac{1}{n^2} \right) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Inserendo i valori numerici delle costanti, otteniamo

$$E_n = -\frac{13.606 \text{ eV}}{n^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

dove l'elettronvolt ($\text{eV} \equiv 1,6022 \cdot 10^{-19} \text{ J}$) è una nuova unità di misura dell'energia e corrisponde all'energia di un elettrone posto in una differenza di potenziale di un Volt. Supponiamo di voler studiare la transizione energetica di un elettrone da uno stato iniziale n_i ad uno stato finale n_f . Per la

conservazione dell'energia, la frequenza del fotone coinvolto nella transizione è

$$f = \frac{E_i - E_f}{h} = \frac{k_e e^2}{2a_0 h} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

mentre la lunghezza d'onda si trova tramite

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{f}{c} = \frac{k_e e^2}{2a_0 h c} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

Questa relazione è identica alla forma generale delle relazioni empiriche scoperte da Balmer e Rydberg mentre cercavano una spiegazione per la presenza delle righe di emissione:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

in cui R_H è la costante di Rydberg. Cosa succede se il nucleo ha più protoni? Il raggio e l'energia associati alle orbite si scriveranno come

$$r_n = n^2 \frac{a_0}{Z}$$

$$E_n = -\frac{k_e e^2}{2a_0} \left(\frac{Z^2}{n^2} \right) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

dove Z è il numero atomico dell'elemento considerato. La dipendenza di r_n dal reciproco di Z ha senso perché più protoni ci sono, più l'elettrone verrà attratto verso il nucleo, quindi più piccola sarà la sua orbita.

Nonostante la teoria di Bohr dia una spiegazione alla presenza delle righe di emissione/assorbimento nei rispettivi spettri, essa non fornisce dei metodi per studiare cosa succede in atomi con tanti elettroni e non riesce a predire molti fenomeni che prendono luogo in presenza di campi elettrici/magnetici esterni. Inoltre, il fatto che gli elettroni in orbite stazionarie non irradiano energia rimane un postulato, quindi il modello non dà una spiegazione fisica del perché ciò accada. Per far ciò, bisogna introdurre il concetto di funzione d'onda, passando così ad una vera teoria quanto-meccanica. Facciamo un passo indietro e calcoliamo il tempo di collasso dell'elettrone sul nucleo per irraggiamento di onde elettromagnetiche (*Breakdown di Rutherford*).

Decadimento per irraggiamento da accelerazione: calcoliamo il tempo di caduta dell'elettrone sul nucleo, nel caso classico non relativistico. Supponendo

che ad ogni rivoluzione il raggio dell'orbita cambi di poco, possiamo considerare l'orbita istantaneamente circolare. Di conseguenza varrà

$$F_{\text{elett}} = m_e \frac{v^2}{r} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = m_e \frac{v^2}{r}$$

da cui si può ricavare v^2 in funzione di r per il calcolo dell'energia cinetica. L'energia potenziale sarà ovviamente

$$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

Sommando cinetica e potenziale, si ottiene

$$E(r) = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \Rightarrow \frac{dE}{dr} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$

La potenza emessa per irraggiamento segue la formula di Larmor

$$P = -\frac{e^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

dove il segno “-” ci ricorda che l'energia viene persa. Possiamo sostituire la formula dell'accelerazione, in quanto sarà sempre istantaneamente centripeta.

$$a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e r^2}$$

da cui troviamo

$$-\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e r^2} \right)^2 = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \frac{dr}{dt}$$

che dopo molte semplificazioni diventa un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{e^4}{12\pi^2 m_e^2 \epsilon_0^2 c^3} \frac{1}{r^2}$$

Integrando otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{a_0}^0 r^2 dr &= \int_0^\tau -\frac{e^4}{12\pi^2 m_e^2 \epsilon_0^2 c^3} dt \\ \Rightarrow \tau &= \frac{4a_0^3 \pi^2 m_e^2 \epsilon_0^2 c^3}{e^4} \end{aligned}$$

Sostituendo i valori delle costanti, l'ordine di grandezza che si ottiene è di 10^{-11} s, cosa che ovviamente non è realistica. Gli atomi non dovrebbero esistere secondo la descrizione classica. Passiamo quindi alla meccanica quantistica!

10 Postulati della Meccanica Quantistica

Riportiamo in Tabella (1) un riassunto delle principali differenze tra meccanica classica e quantistica.

Meccanica Classica	Meccanica Quantistica
La dinamica del sistema è regolata dall'equazione del moto $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.	La dinamica del sistema è regolata dall'equazione di Schroedinger.
La posizione di un corpo $\mathbf{r}(t)$ è nota ad ogni istante temporale.	La probabilità che una particella occupi un particolare stato è data dal modulo quadro della funzione d'onda ψ .
Le misure di quantità fisiche osservabili possono essere predette in modo preciso.	Il risultato di una misura non è certo, ma ad ogni valore possibile corrisponde una certa probabilità.
I possibili valori della misura di grandezze osservabili costituiscono un insieme continuo.	I possibili valori della misura di grandezze osservabili possono costituire un insieme discreto.

Tabella 1: Differenze fondamentali tra Meccanica Classica e Meccanica Quantistica.

In meccanica newtoniana, usiamo N equazioni del moto del tipo $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ per descrivere un sistema formato da N corpi soggetti a forze esterne o reciproche. Le soluzioni di queste equazioni, che molto spesso non sono ricavabili analiticamente, sono i vettori posizione $\mathbf{r}_i(\mathbf{t})$, con $i = 1, 2, \dots, N$. Queste funzioni del tempo ci dicono come evolverà il sistema, quindi conosciamo esattamente la posizione di ogni corpo per $t > 0$. Ma se conosciamo la posizione, conosciamo anche la velocità, essendo essa la derivata della prima, la quantità di moto e l'energia meccanica. Durante lo scorrere del tempo, tutte queste grandezze variano in modo continuo: se a $t = 0$ la velocità di un dato oggetto è nulla, mentre a $t = 10s$ la velocità vale 2 m/s , siamo sicuri che $v(t)$ assuma (almeno) tutti i valori reali da $0 < v(t) < 2 \text{ m/s}$ per $0 < t < 10s$. In meccanica quantistica tutto questo non vale più. Le equazioni del moto vengono sostituite dall'equazione di Schrödinger, la cui soluzione non è una coordinata spaziale come nel caso classico, ma bensì una funzione detta *funzione d'onda*. Non esiste più il concetto di traiettoria di un corpo, ma esiste la *probabilità che un corpo si trovi in una data regione di spazio*. Questo si riflette sulle misure delle grandezze quantistiche: non esistono predizioni precise di

misure, ma esiste la *probabilità che una misura dia un certo risultato*. Se nel caso classico il risultato di una misura poteva essere, in linea di principio, qualsiasi numero reale, nel caso quantistico esistono sistemi in cui i risultati di misurazioni costituiscono un insieme discreto⁸. Inoltre, esistono grandezze per cui vale un risultato dimostrato da Heisenberg⁹:

*Principio di Heisenberg*¹⁰: se si esegue una misura della posizione di una particella con incertezza Δx ed una misura simultanea della sua quantità di moto con incertezza Δp , allora il prodotto delle due incertezze obbedisce alla seguente disequazione

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$$

E' importante sottolineare che questo limite non è legato alla qualità degli strumenti che si usano per effettuare le misure sul sistema. Il non poter effettuare le due misure con buona precisione all'unisono è un limite intrinseco dei sistemi quantistici. Ciò è legato al fatto che per misurare una grandezza bisogna perturbare il sistema, ma facendo così si modificano i valori delle grandezze in gioco!

Un esempio "classico" che aiuta a capire le conseguenze del principio Heisenberg è il seguente: consideriamo una bicicletta che sfreccia davanti ad un bambino che le scatta una foto. Se la fotocamera del bambino è di bassa qualità, allora la foto sarà sfocata. Se la fotocamera è di alta qualità, la foto sarà nitida. Nel primo caso ho poca informazione sulla posizione precisa della bicicletta, ma ho un'idea della velocità a cui essa stava viaggiando. Nel secondo caso, invece, ho un'informazione precisa sulla posizione della bicicletta, ma non ne ho alcuna sulla sua velocità, perché nella foto essa sembra immobile. Questa è un po' l'idea alla base del principio di Heisenberg.

Possiamo usare una versione naif del teorema di Heisenberg per ritrovare il valore del raggio di Bohr: l'energia dell'elettrone in orbita vale

$$E = \frac{1}{2}m_e v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Usiamo il teorema di Heisenberg nel limite in cui vale l'uguaglianza $pr = \frac{h}{2\pi}$. Segue allora che l'energia dell'elettrone può essere scritta come

$$E = \frac{h^2}{2(2\pi)^2 m_e r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

⁸Abbiamo già visto che questo avviene all'energia nel modello atomico di Bohr.

⁹Vale per tutte le grandezze *Coniugate*, come posizione e quantità di moto, oppure energia e tempo.

¹⁰Sebbene sia comunemente chiamato "Principio di Heisenberg", in realtà esso è un teorema perché ha una dimostrazione.

Calcoliamo la derivata di questa funzione rispetto alla distanza dal nucleo

$$\frac{dE}{dr} = -2 \frac{h^2}{2(2\pi)^2 m_e} r^{-3} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o} r^{-2}$$

Troviamo quindi il valore di r per cui l'energia ha un minimo

$$\frac{dE}{dr} = 0 \implies \bar{r} = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} \equiv a_0$$

che è proprio il valore del raggio di Bohr!

11 Introduzione ai Problemi 1D

La funzione d'onda esprime la probabilità di trovare la particella in una determinata posizione. Ad esempio, la funzione d'onda di una particella libera (non sottoposta a forze esterne) si scrive come

$$\psi(x) = A e^{ikx}$$

dove $k = 2\pi/\lambda$ ¹¹ è il numero d'onda e A è un'ampiezza costante. Sebbene non si possa misurare ψ , con esperimenti ripetuti possiamo misurare la grandezza $|\psi|^2$, il modulo quadro di ψ , la quale si può interpretare come segue. Se ψ rappresenta una singola particella, allora $|\psi|^2$ - chiamata *densità di probabilità* - è la probabilità relativa per unità di volume che la particella possa trovarsi in un qualsiasi punto del volume. Questa interpretazione può anche essere enunciata nel modo seguente. Se dV è un piccolo elemento di volume attorno a un certo punto, allora la probabilità di trovare la particella in questo elemento di volume è $|\psi|^2 dV$. Da ora in poi tratteremo soltanto sistemi unidimensionali, dove la particella deve essere localizzata lungo l'asse x , e così sostituiamo dV con dx . In questo caso, la probabilità $P(x) dx$, che la particella si trovi in un intervallo infinitesimo dx intorno al punto x è

$$P(x) dx = |\psi|^2 dx$$

Poiché la particella deve trovarsi in qualche punto sull'asse x , la somma delle probabilità su tutti i valori di x deve essere 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1$$

¹¹ λ è la lunghezza d'onda associata alla particella quantistica in esame, come proposto per la prima volta da Louis de Broglie nel 1924.

Sebbene non sia possibile specificare la posizione della particella con certezza assoluta, è possibile, tramite $|\psi|^2$, specificare la probabilità di osservarla in una piccola regione nell'intorno di un dato punto. La probabilità di trovare la particella nell'intervallo $a \leq x \leq b$ è

$$P_{ab} = \int_a^b |\psi|^2 dx$$

Sperimentalmente, vi è una probabilità finita di trovare una particella in un intervallo intorno a qualche punto ad un certo istante. Il valore di questa probabilità deve essere compreso tra 0 e 1. Per esempio, se la probabilità è 0.3, vi è il 30% di probabilità di trovare la particella.

La funzione d'onda soddisfa un'equazione d'onda, così come il campo elettrico associato ad un'onda elettromagnetica soddisfa la (1). L'equazione d'onda soddisfatta da ψ è l'equazione di Schrödinger¹²

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + U(x)\psi = E\psi \quad (8)$$

dove m è la massa della particella, $U(x)$ è il potenziale ed E è l'energia totale. Sebbene ψ non sia una grandezza misurabile, tutte le grandezze misurabili di una data particella, come la sua energia e la sua quantità di moto, si possono derivare a partire da ψ . Per esempio, nota la funzione d'onda per una particella, è possibile calcolare la sua posizione media. Questa posizione media è chiamata *valore atteso* di x ed è definita dalla relazione

$$\langle x \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi|^2 dx$$

Inoltre, si può trovare il valore atteso di qualsiasi funzione $f(x)$ associata alla particella usando la seguente equazione:

$$\langle f(x) \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x) |\psi|^2 dx$$

Se il sistema è limitato, gli estremi di integrazione corrisponderanno agli estremi del dominio spaziale in cui la particella può muoversi

11.1 Particella confinata in una scatola

In questo paragrafo, applicheremo ad un semplice problema alcune delle idee che abbiamo sviluppato. Studiamo il comportamento di una particella

¹²Questo vale nel caso stazionario, infatti la Eq. (8) viene detta *Equazione di Schrödinger non dipendente dal tempo*.

confinata in una scatola unidimensionale. Da un punto di vista classico, se una particella è confinata a rimbalzare avanti e indietro lungo l'asse x fra due pareti impenetrabili, il suo moto è facilmente descrivibile. Se il modulo della velocità è v , allora il modulo della sua quantità di moto mv resta costante, così come la sua energia cinetica. La fisica classica non pone restrizioni per i valori della quantità di moto e dell'energia della particella. La meccanica quantistica affronta questo problema in modo del tutto diverso e richiede che si trovi l'appropriata funzione d'onda che rispetti i vincoli spaziali. Poiché le pareti sono impenetrabili, la probabilità di trovare la particella fuori dalla scatola è zero, cosicché la funzione d'onda $\psi(x)$ deve essere zero per $x < 0$ e per $x > L$, dove L è la distanza fra le due pareti. Una condizione matematica per ogni funzione d'onda è che essa deve essere continua nello spazio. Quindi, se ψ è zero al di fuori delle pareti, essa deve essere zero anche sulle pareti; cioè, $\psi(0) = 0$ e $\psi(L) = 0$. Soltanto le funzioni che soddisfano questa condizione sono permesse.

Quando la particella è all'interno della scatola, l'energia potenziale del sistema non dipende dalla posizione della particella e possiamo scegliere che il suo valore sia zero. All'esterno della scatola, dobbiamo assicurarci che la funzione d'onda della particella sia zero. Possiamo ottenere ciò definendo l'energia potenziale del sistema come infinitamente grande se la particella si trovasse fuori dalla scatola. Poiché l'energia cinetica è necessariamente positiva, il solo modo con cui una particella potrebbe trovarsi fuori dalla scatola si verificherebbe se il sistema avesse una quantità infinita di energia. Risolviamo l'equazione di Schrödinger dentro la scatola usando queste considerazioni. Possiamo quindi riscrivere la Eq. (8) come

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi$$

che è un'equazione differenziale lineare e del secondo ordine. La sua soluzione più generale è una combinazione lineare di seni e coseni

$$\psi(x) = A \sin\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}x\right) + B \cos\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}x\right)$$

Questa funzione d'onda deve soddisfare le condizioni al contorno sulle pareti. La condizione al bordo in $x = 0$ è soddisfatta solo se il termine col coseno è nullo, allora poniamo $B = 0$. Per la condizione al bordo in $x = L$, abbiamo

$$\psi(L) = 0 = A \sin\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}L\right)$$

che può essere vera se $A = 0$ (cosa che non ci interessa, perché renderebbe ψ nulla sempre) oppure se

$$\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}L = n\pi \quad \rightarrow \quad E = \left(\frac{\hbar^2}{8mL^2} \right) n^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Quindi, soltanto certe energie sono permesse per la particella! Ciascuna di esse corrisponde ad uno stato quantico del sistema, caratterizzato da un certo n . Esprimendo la funzione d'onda in funzione del numero quantico n , abbiamo

$$\psi(x) = A \sin \left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} x \right) = A \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right)$$

Come considerazione finale, possiamo osservare che l'energia della particella è quantizzata analogamente a quella dell'elettrone nel modello dell'atomo di Bohr. Il livello di energia più basso corrisponde a $n = 1$, per il quale $E_1 = \frac{\hbar^2}{8mL^2}$. Poiché $E_n = n^2 E_1$, gli stati eccitati corrispondenti a $n = 2, 3, 4, \dots$ hanno energie date da $4E_1, 9E_1, 16E_1 \dots$

12 Esercizi di MQ 1D

Problema 12.1. La funzione d'onda di una particella è data da

$$\psi(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$$

dove A, B e k sono costanti. Dimostrare che ψ è una soluzione dell'equazione di Schrödinger, assumendo che la particella sia libera ($U = 0$), e trovare la corrispondente energia E della particella.

Problema 12.2. La funzione d'onda per una particella confinata a muoversi in una scatola unidimensionale è data da

$$\psi(x) = A \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right)$$

Usare la condizione di normalizzazione su ψ per dimostrare che la costante A è data da

$$A = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

Problema 12.3. Trovare la posizione media della particella nella scatola studiata a lezione. Il risultato ha senso? Quanto vale, invece, $\langle x^2 \rangle$?

Problema 12.4. La funzione d'onda di un elettrone in una scatola di lunghezza L è

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

Calcolare la probabilità di trovare l'elettrone fra $x = 0$ e $x = L/4$.

Problema 12.5. La funzione d'onda di una particella è

$$\psi(x) = \frac{A}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Trovare la costante di normalizzazione A e determinare la probabilità che la particella sia localizzata tra $x = -a$ e $x = a$. Quanto vale la posizione media della particella?

Problema 12.6. La funzione d'onda di un atomo di idrogeno vale

$$\psi(r) = Ae^{-\frac{r}{a_0}}$$

- Trovare la costante di normalizzazione A .
- Trovare la distanza più probabile dell'elettrone dal nucleo
- Trovare la probabilità che l'elettrone si trovi nella corona sferica descritta dai raggi $\frac{a_0}{2}$ e $2a_0$.

Problema 12.7. Nel contesto del modello di Bohr, trovare la frequenza del fotone emesso dall'atomo quando l'elettrone passa da un livello generico n al livello inferiore $n - 1$. Nel limite $n \rightarrow \infty$, il risultato è in accordo con la fisica classica?

Problema 12.8. Sia $U(x)$ un potenziale costruito a tratti: $U(x) = 0$ per $x < 0$ e $U(x) = U_0$ per $x \geq 0$. Trovare la funzione d'onda di una particella di massa m ed energia E nei casi (a) $E > U_0$ e (b) $0 < E < U_0$.

13 Soluzioni degli Esercizi di Meccanica Quantistica

Soluzione 13.1. Sostituendo la funzione d'onda

$$\psi(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$$

all'interno dell'equazione di Schrödinger per la particella libera

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$$

si osserva che essa è soluzione solamente se l'energia della particella vale

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}.$$

Questo risultato è in completa analogia con l'espressione dell'energia cinetica di un corpo macroscopico

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

Soluzione 13.2. L'integrale

$$\int_0^L |\psi|^2 dx = A^2 \int_0^L \sin^2 \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx$$

dà come risultato $A^2 \frac{L}{2}$, quindi la condizione di normalizzazione ($P_{tot} = 1$) è $A = \sqrt{\frac{2}{L}}$.

Soluzione 13.3. la posizione media della particella vale

$$\langle x \rangle = \int_0^L x |\psi|^2 dx = \frac{2}{L} \int_0^L x \sin^2 \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx = \frac{L}{2}$$

dove l'integrale è stato svolto per parti. La soluzione trovata ha molto senso per ovvi motivi di simmetria del sistema in questione. Il valore di $\langle x^2 \rangle$ si trova in modo analogo, sfruttando il metodo di integrazione per parti.

Soluzione 13.4. La probabilità di trovare l'elettrone tra $x = 0$ e $x = L/4$ vale

$$P = \frac{2}{L} \int_0^{\frac{L}{4}} \sin^2 \left(\frac{2\pi x}{L} \right) dx = \frac{1}{4}.$$

Soluzione 13.5. L'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{A^2}{a} \arctan \frac{x}{a} \Big|_{-\infty}^{\infty}$$

dà come risultato $\frac{A^2\pi}{a}$, quindi la condizione di normalizzazione è $A = \sqrt{\frac{a}{\pi}}$. La probabilità di trovare la particella tra $x = -a$ e $x = a$ vale

$$P = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x}{a} \Big|_{-a}^a = \frac{1}{2}$$

La posizione media della particella è $x = 0$ per motivi di simmetria.

Soluzione 13.6. L'integrale

$$\int |\psi|^2 dV = A^2 \int_0^\infty e^{-\frac{2r}{a_0}} 4\pi r^2 dr$$

dà come risultato $A^2 \pi a_0^3$, quindi la condizione di normalizzazione è $A = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}}$.

La distanza più probabile è

$$\int |\psi|^2 r dV = \frac{1}{\pi a_0^3} \int_0^\infty e^{-\frac{2r}{a_0}} 4\pi r^3 dr = a_0$$

La probabilità di trovare l'elettrone nella corona sferica descritta dai raggi $\frac{a_0}{2}$ e $2a_0$ è

$$\int_{Corona} |\psi|^2 dV = \frac{1}{\pi a_0^3} \int_{\frac{a_0}{2}}^{2a_0} e^{-\frac{2r}{a_0}} 4\pi r^2 dr$$

Tutti gli integrali del problema possono essere risolti tramite il metodo di integrazione per parti.

Soluzione 13.7. Dalla teoria dell'atomo di Bohr, abbiamo appreso che la frequenza emessa da un elettrone che decade da uno stato iniziale ad uno con energia inferiore vale

$$f = \frac{E_i - E_f}{h} = \frac{k_e e^2}{2a_0 h} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

Nel caso di stati contigui, descritti rispettivamente dai numeri quantici n e $n - 1$, quest'espressione diventa

$$f = \frac{E_i - E_f}{h} = \frac{k_e e^2}{2a_0 h} \left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{k_e e^2}{2a_0 h} \frac{2n-1}{n^2(n-1)^2}$$

Per $n \rightarrow \infty$, l'andamento asintotico della frequenza emessa è

$$f \rightarrow \frac{k_e e^2}{a_0 h} \frac{1}{n^3}$$

Per vedere se questo risultato coincide con quello dato dalla fisica classica, calcoliamo la frequenza di rivoluzione dell'elettrone attorno al protone

$$f = \frac{v_n}{2\pi R_n} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_e e^2}{m R_n^3}} = \frac{k_e e^2}{a_0 h} \frac{1}{n^3}$$

che coincide con la frequenza emessa da livelli energetici molto alti.