

Fluidodinamica

Daniele Battesimo Provenzano*

9 febbraio 2023

Sommario

La lezione ha l'obiettivo di dare un'infarinatura generale sugli aspetti fondamentali della teoria dei fluidi. Gli argomenti trattati sono i fluidi ideali, l'idrostatica ed il teorema di Bernoulli. La parte finale della lezione è dedicata ad alcuni esempi degni di nota; tra le varie applicazioni, viene data la risposta alla domanda “Quanto vale il massimo lavoro estraibile dall'aria tramite una turbina a vento?”.

1 Introduzione

Si definisce *fluido* un materiale che non sostiene sforzo di taglio, cioè stress (forza per unità di area) che ha direzione nel piano tangente alla superficie del fluido (Figura 1). Va detto che questa definizione è molto astratta e troppo generale. La teorizzazione della fluidodinamica, che ne definisce anche il campo di lavoro, è un processo estremamente complesso e tecnico, per questo motivo (almeno a livello elementare) si applicano le sue equazioni in maniera spesso garibaldina, senza controllare che l'oggetto che si sta analizzando sia effettivamente descrivibile con quel dato apparato teorico.

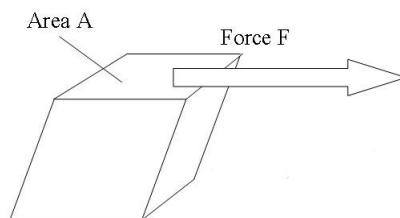


Figura 1: Schematizzazione di uno sforzo di taglio.

*daniele.provenzano@sns.it

Per studiarne il comportamento, approssimiamo il fluido come un continuo, cioè ogni punto del fluido sarà caratterizzato da un determinato valore di una grandezza fisica (velocità, pressione, densità, ecc...). Questi punti, che sono un'idealizzazione, corrispondono nella realtà a porzioni di fluido che, detto senza troppo rigore, devono essere sufficientemente grandi da poter trascurare la granularità della materia, ovvero contenere abbastanza oggetti su cui mediare le proprietà d'interesse in modo che le fluttuazioni di esse siano piccole. Al contempo queste porzioni devono essere abbastanza piccole da poter essere considerate come punti geometrici dello spazio. Chiameremo questi *elementi fluidi* nel seguito della lezione. La dinamica di un fluido si può studiare da due differenti punti di vista:

- il primo consiste nel fissare l'elemento di fluido e guardare la sua evoluzione temporale. Intuitivamente è possibile immaginare di colorare per distinzione l'elemento fluido e seguirlo nella sua evoluzione (approccio lagrangiano);
- il secondo consiste nello scegliere un punto dello spazio occupato dal fluido e vedere come cambiano le grandezze fisiche nel tempo in questo particolare punto. Intuitivamente corrisponde a fissarsi in una piccola regione di spazio e vedere ciò che vi passa attraverso (approccio euleriano).

Esempio 1.1. Si consideri un rubinetto aperto che si trova ad altezza h da cui esce un getto costante a velocità v_0 . Sapendo che la velocità dell'acqua ad un'altezza z vale

$$v_z = \sqrt{2g(h - z) + v_0^2},$$

(che si ottiene imponendo la conservazione dell'energia per la singola porzione di fluido) trovare l'accelerazione in ogni punto.

Soluzione 1.1. Il flusso è indipendente dal tempo, di conseguenza l'accelerazione lungo z vale

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{dv_z}{dz} \frac{dz}{dt} = \frac{dv_z}{dz} v_z = \frac{-2g}{2v_z} v_z = -g.$$

Come ci si poteva aspettare, essa è costante e uguale all'accelerazione gravitazionale.

Visto che tornerà utile più avanti, diamo la definizione di linea di flusso: la linea di flusso è, fissato l'istante t , quella linea tangente in ogni punto alla velocità $\vec{v}$; se il flusso è stazionario (indipendente dal tempo), questa coincide

con le traiettorie degli elementi fluidi.

Un controesempio, nel caso il campo dipenda dal tempo, può essere

$$v = v_0(\cos(\omega t), \sin(\omega t)), \quad (1)$$

per il quale le linee di flusso sono rette, ma gli elementi fluidi percorrono circonferenze. Una conseguenza della definizione è che due linee di flusso non possono mai incrociarsi se non in punti in cui la velocità è nulla, altrimenti nel punto di intersezione la velocità non sarebbe definita.

2 Idrostatica

Partiamo dal caso più semplice, ossia il fluido è fermo in ogni punto. L'equazione che regola la distribuzione della pressione nel fluido fermo è

$$\vec{f} = \sum_i \frac{\partial p}{\partial x_i} \hat{x}_i, \quad (2)$$

che equivale a dire che la forza su ogni volumetto deve essere nulla e questo implica automaticamente che il momento torcente su un volume di forma arbitraria V del fluido è nullo. Se la forza di volume è proporzionale alla massa si può scrivere $f_i = \rho g_i$. Se, inoltre, la forza per unità di massa $\vec{g}$ è conservativa, si può vedere come derivata di un potenziale $g_i = -\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$ e la (2) si riscrive per la singola componente:

$$-\rho \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial p}{\partial x_i}. \quad (3)$$

Applicando quest'equazione nel caso di un fluido immerso in un campo gravitazionale, si ha

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad \implies \quad p(z) = p(z_0) - g \int_{z_0}^z \rho(z) dz.$$

Il potenziale associato alla forza gravitazionale è $\phi = gz$. Nel caso particolare in cui ρ non dipenda da z otteniamo la nota legge di Stevino

$$p(z) - p(z_0) = -\rho g(z - z_0).$$

Esempio 2.1. Mostrare che nell'ipotesi precedente sulle superfici equipotenziali la pressione è costante. *Hint:* se ci fosse una variazione di pressione il liquido potrebbe essere in equilibrio? Si consideri un tubo ad U con due liquidi di densità diversa in equilibrio sotto la presenza di gravità. In generale, p non è costante ad altezza fissata, dove fallisce la dimostrazione precedente?

Soluzione 2.1. Se p non fosse costante ci sarebbe una forza non nulla parallela alla superficie dovuta alla differenza di pressione che non potrebbe essere bilanciata in alcun modo dalla forza di volume (che ha componente nulla sulla superficie equipotenziale) e quindi non saremmo in una situazione di equilibrio. Nel ragionamento precedente abbiamo implicitamente usato il fatto che la superficie di interesse immersa nel liquido fosse connessa, cosa che invece non succede quando confrontiamo le due estremità del tubo.

Nel generico problema di idrostatica, supponendo di conoscere il potenziale ϕ , abbiamo l'equazione (3) con le due incognite p e ρ . Per arrivare in fondo è necessaria una seconda equazione, ad esempio una che legghi pressione e densità, come un'equazione di stato.

Esempio 2.2. Se consideriamo una colonna d'aria non troppo estesa, possiamo supporre che la temperatura in essa sia omogenea. Supponendo inoltre che l'aria sia formata da molecole di massa μ e che obbedisca all'equazione di stato dei gas perfetti

$$p = \frac{N}{V}kT,$$

trovare la pressione in funzione dell'altezza.

Soluzione 2.2. Dalla legge dei gas perfetti segue che

$$\rho = \frac{p\mu}{kT}.$$

Per Stevino $\partial_z p = -\rho g$, allora segue che

$$\partial_z p = -p \frac{\mu g}{kT} \Rightarrow p(z) = p(0) \exp\left(-\frac{\mu g}{kT} z\right).$$

Per come abbiamo ricavato la legge di Stevino questo procedimento è equivalente a bilanciare le forze che agiscono sul piccolo strato ad altezza z (Figura 2).

Esempio 2.3. Consideriamo un cilindro rotante con velocità angolare Ω , contenente all'interno un liquido di densità ρ . Trovare lo stato stazionario e in particolare la forma della superficie del liquido.

Soluzione 2.3. Nello stato stazionario, raggiunto grazie all'attrito, tutto il liquido ruota alla velocità angolare del cilindro. In questo caso si ha, mettendosi nel sistema rotante, che il liquido è fermo e di conseguenza diventa un problema idrostatico. Il potenziale in questo sistema è

$$\phi = -\frac{\Omega^2 r^2}{2} + gz,$$

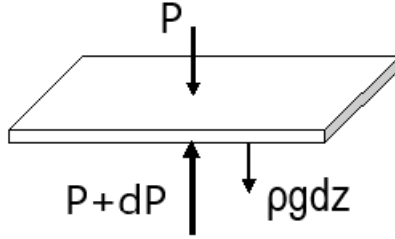


Figura 2: La forza dovuta alla differenza di pressione controbilancia la forza peso del piccolo strato (Esempio 2.2).

dove il primo termine rappresenta il potenziale centrifugo.¹ Le superfici equipotenziali sono isobare, in particolare la superficie del liquido sarà quella per cui $p = p_{\text{atm}}$ e sarà della forma

$$z = z_{\min} + \frac{\Omega^2 r^2}{2g}.$$

Questo si può dimostrare imponendo che ϕ sia costante lungo la curva $z(r)$, ovvero

$$\frac{d\phi}{dr} = 0 = -\Omega^2 r + g \frac{dz}{dr}$$

e risolvendo l'equazione differenziale ottenuta.

Supponiamo di avere un oggetto *completamente circondato* da un liquido (che è fermo), in presenza di gravità. Ci chiediamo quale sia la forza che il liquido esercita sul corpo (la forza è dovuta all'effetto della pressione sulla superficie del corpo S). Un modo di procedere è quello di considerare la situazione parallela in cui al posto dell'oggetto c'è, all'interno della superficie S , un volume equivalente di liquido in equilibrio con quello circostante. Dato che la pressione in un generico punto della superficie S è la stessa nelle due situazioni anche la forza esercitata attraverso la superficie è la stessa (non ha importanza cosa ci sia all'interno) e quindi la forza che agisce sul corpo è la stessa che agirebbe sulla massa di liquido spostata (notare che non si richiede che la densità del liquido sia costante). Detta M_l la massa del liquido spostato, la forza vale

$$\vec{F} = M_l g \hat{z}.$$

¹Notare che la forza di Coriolis non entra mai in gioco perché è tutto fermo e questo ci permette di scrivere il potenziale nel sistema rotante.

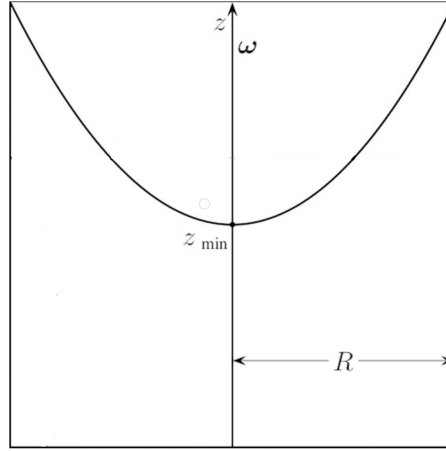


Figura 3: Sezione del cilindro rotante dell'esempio.

Nel caso l'oggetto non sia completamente circondato da liquido bisogna prestare attenzione: se il corpo è galleggiante basta considerare la parte immersa, tuttavia esistono situazioni meno banali che saranno illustrate nei problemi (caso di una sfera che tappa un foro circolare del contenitore).

Esempio 2.4. Si consideri la situazione precedente. Si vuole trovare il momento torcente che il liquido esercita sul corpo.

Soluzione 2.4. Facendo un ragionamento identico a quello sopra, si trova che il momento torcente è uguale al momento torcente $\vec{\tau}$ esercitato sulla massa di liquido spostato. Ma questo momento torcente, essendo tutto in equilibrio, deve annullare quello gravitazionale:

$$\vec{\tau} + \vec{r}_{\text{cm}} \times M\vec{g} = 0 \implies \vec{\tau} = -\vec{r}_{\text{cm}} \times M\vec{g},$$

dove $\vec{r}_{\text{cm}}$ è la posizione del centro di massa del volume di liquido spostato.

3 Conservazione della Portata

Si immagini un tubo con asse lungo x e sezione $A(x)$ variabile (Figura 4). Vogliamo scrivere la conservazione della materia per un fluido che ci scorre all'interno con velocità orizzontale $v(x)$ e densità $\rho(x)$ indipendenti dal tempo. Quello che va imposto, detto a parole, è che presa la zona di tubo compresa tra x_1 e x_2 generici, tanta materia entri quanta ne esca (infatti la quantità di materia nella zona compresa è costante). Ciò si traduce in: il flusso di materia attraverso la sezione $A(x)$ deve essere costante e, quindi, indipendente da x .

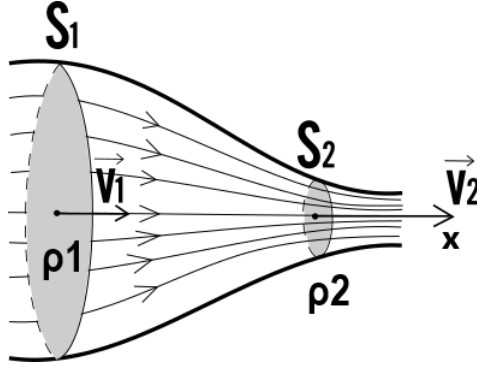


Figura 4: Tubo con sezione variabile.

Questo si scrive come:

$$\Phi(m) = \frac{dm}{dt} = \frac{\rho A dx}{dt} = \rho A v = \text{const.}$$

In generale il ragionamento resta valido se la velocità dipende dal tempo.

Esempio 3.1. Riprendendo l'esempio 1.1, trovare la sezione del flusso in funzione dell'altezza se il foro da cui esce l'acqua ha sezione A_0 .

Soluzione 3.1. Dato che la densità è costante, vale

$$v_z A(z) = v_0 A_0 \quad \Rightarrow \quad A(z) = \frac{v_0 A_0}{v_z} = \frac{A_0}{\sqrt{\frac{2g(h-z)}{v_0^2} + 1}},$$

quindi la sezione del flusso si restringe perché la velocità aumenta².

Il risultato trovato invece non vale se ρ a dipendere dal tempo. Infatti, a differenza di prima, in questo caso si può avere un accumulo temporaneo di materia nella regione tra x_1 e x_2 . Quello che siamo in grado di dire ora è che, detta M la quantità di materia compresa in questa regione, la sua variazione nel tempo è uguale al flusso netto entrante:

$$\frac{dM}{dt} = \Phi_1(m) - \Phi_2(m) = \rho(x_1, t) A(x_1) v(x_1) - \rho(x_2, t) A(x_2) v(x_2).$$

Per il resto della lezione considereremo ρ uniforme e costante, in modo che la conservazione della portata (definita come $\frac{\Phi(m)}{\rho} = A(x)v(x)$) sia garantita.

²Dato che la sezione diminuisce la componente radiale della velocità v_ρ è non nulla, a rigore uno dovrebbe tenere conto anche di questa quando impone la conservazione dell'energia per trovare v_z ; tuttavia $v_\rho \ll v_z$ se v_0 è abbastanza grande e quindi si trascura (siete invitati a quantificare questo "abbastanza grande").

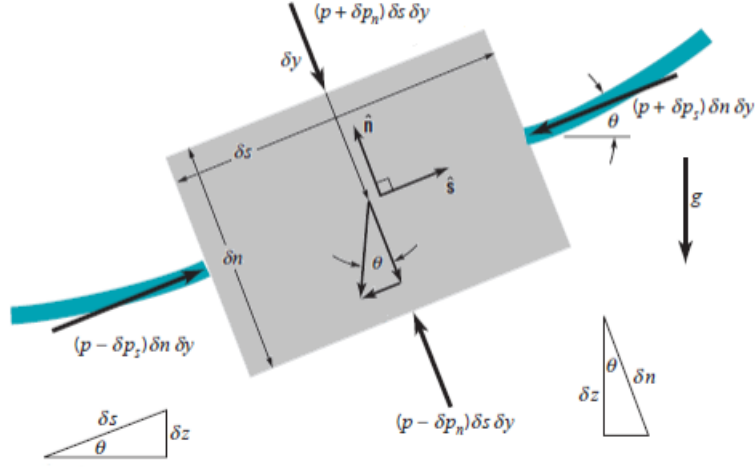


Figura 5: Schematizzazione dell'elemento di volume preso in considerazione per la deduzione dell'equazione di Bernoulli.

4 Equazione di Bernoulli

In questo paragrafo ricaveremo l'equazione di Bernoulli, sotto le seguenti ipotesi:

- fluido *ideale*: incompressibile, a densità uniforme e non viscoso;
- flusso *stazionario*, cioè il campo di velocità $\vec{v}(x, y, z)$ è indipendente dal tempo;
- flusso *irrotazionale*.

Generalmente, la legge di Bernoulli viene ricavata tramite un approccio energetico. In questa sezione, invece, la ricaveremo usando un approccio dinamico.

Facendo riferimento alla Figura 5, mettiamoci lungo una linea di flusso di un fluido e consideriamo un piccolo elemento di volume δV , in un sistema di coordinate xyz , dove z è opposta all'accelerazione gravitazionale. Risulta molto comodo farsi aiutare dalle ulteriori coordinate s ed n , rispettivamente dirette lungo la linea di flusso e perpendicolarmente ad essa, come in figura. Lungo la coordinata s , la seconda legge di Newton applicata al volumetto si scrive come

$$\sum \delta F_s = \delta m a_s. \quad (4)$$

Conviene riscrivere l'accelerazione a_s come

$$a_s = \frac{dv_s}{dt} = \frac{dv_s}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv_s}{ds} v_s,$$

mentre l'elemento di massa vale

$$\delta m = \rho \delta V = \rho A \delta s,$$

dove A è la sezione trasversale (che non si vede in figura). Calcoliamo tutte le forze che agiscono lungo la direzione s sul fluido. Iniziamo con la componente della forza di gravità

$$\delta F_s^g = -\delta m g \sin \theta = -\rho A \delta s g \sin \theta = -\rho A \delta s g \frac{dz}{ds},$$

dove abbiamo usato il fatto che $\sin \theta = \frac{dz}{ds}$ nell'ultimo passaggio. Passiamo alla forza dovuta alla pressione del fluido stesso. Se al centro del volumetto la pressione è p , ai bordi sarà rispettivamente $p - \delta p$ e $p + \delta p$, con δp stimabile come

$$\delta p = \frac{dp}{ds} \frac{\delta s}{2}.$$

Segue che la forza netta dovuta a questo sbilancio di pressione vale

$$\delta F_s^p = A(p - \delta p) - A(p + \delta p) = -2A\delta p = -2A \frac{dp}{ds} \frac{\delta s}{2}.$$

Sostituendo tutti questi risultati in Eq. (4), otteniamo

$$-2A \frac{dp}{ds} \frac{\delta s}{2} - \rho A \delta s g \frac{dz}{ds} = \rho A \delta s \frac{dv}{ds} v.$$

Dividendo entrambi i membri per $A \delta s$, otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{dp}{ds} + \rho g \frac{dz}{ds} + \rho \frac{dv}{ds} v &= 0, \\ \Rightarrow \frac{d}{ds} \left(p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) &= 0, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato l'ipotesi di omogeneità di ρ nell'ultimo passaggio. Quest'ultima equazione ci dice che la quantità dentro le parentesi è conservata in tutta la linea di flusso! Questo risultato è noto come *teorema di Bernoulli*!

Esempio 4.1. Un recipiente cilindrico di raggio a ruota attorno al suo asse con velocità angolare ω , e contiene un volume V di un liquido. Il fluido viene trascinato dal recipiente, e in condizioni stazionarie si muove rigidamente e solidalmente con esso. Dire se la quantità

$$H = P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z$$

assume un valore costante in tutto il liquido e calcolare la forma della superficie libera di esso.

Soluzione 4.1. Il teorema di Bernoulli dice che in condizioni stazionarie la quantità H è costante su ogni linea di flusso del fluido. Per concludere che questa costante è la stessa su ogni linea è però necessario che il campo di velocità sia irrotazionale, ipotesi non verificata in questo caso. Per averne conferma, possiamo cercare di rispondere alla seconda domanda supponendo che H sia veramente costante. Allora sulla superficie libera del fluido deve essere

$$\frac{1}{2}\rho\omega^2r^2 + \rho gz = K,$$

cioè

$$z = K - \frac{\omega^2r^2}{2g}.$$

Ma questo ci dice che la superficie è un paraboloide di rotazione con concavità rivolta verso il basso, il che è assurdo. Possiamo invece porci in un sistema che ruota solidale al recipiente. In questo caso il fluido appare in quiete, quindi il suo campo di velocità è ovviamente irrotazionale. Siamo nelle condizioni per poter dedurre dal teorema di Bernoulli che la quantità

$$P + \rho\phi$$

è effettivamente costante in tutto il fluido, indicando con ϕ l'energia potenziale per unità di massa, che tiene conto della forza centrifuga apparente:

$$\phi = gz - \frac{1}{2}\omega^2r^2.$$

Da questo segue immediatamente che

$$z = K + \frac{\omega^2r^2}{2g},$$

cioè un paraboloide di rotazione con concavità rivolta verso l'alto, risultato sensato. Per determinare la costante K calcoliamo il volume del liquido:

$$V = \int_0^a \left(K + \frac{\omega^2r^2}{2g} \right) 2\pi r \, dr = 2\pi \left(\frac{Ka^2}{2} + \frac{\omega^2a^4}{8g} \right),$$

quindi

$$K = \frac{V}{\pi a^2} - \frac{\omega^2a^2}{4g}.$$

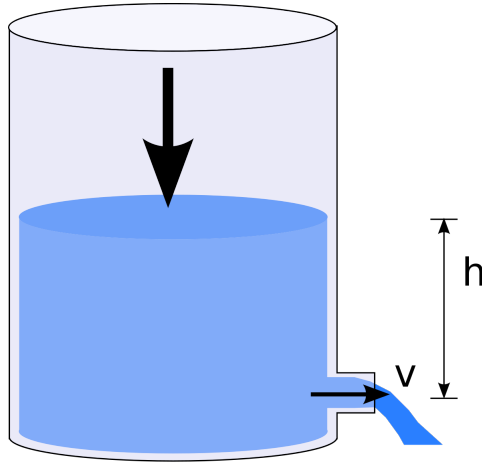


Figura 6: Acqua che fuoriesce da un secchio.

4.1 Legge di Torricelli

In questa sezione ricaveremo la legge di Torricelli, la quale esprime la velocità di fuoriuscita di un fluido dal fondo di un contenitore, come schematizzato in Figura 6. Per ottenere la legge di Torricelli, possiamo partire dall'equazione di Bernoulli

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = \text{costante}$$

che applicheremo confrontando un qualsiasi punto 1 sulla superficie superiore del fluido nel recipiente ed un punto 2 del fluido appena fuori dal buco in basso:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gh_2.$$

In entrambi i punti, la pressione nel fluido è pari alla pressione atmosferica. Definendo $h = h_1 - h_2$, otteniamo

$$v_2^2 - v_1^2 = 2gh.$$

Infine, se la sezione del buco è trascurabile rispetto alla sezione del contenitore cilindrico, per la conservazione della portata possiamo considerare $v_1 \approx 0$ e, quindi, scrivere

$$v_2 = \sqrt{2gh}.$$

Il risultato trovato è detto *legge di Torricelli*. Il problema è che essa vale solo per fori piccoli. Tuttavia, se immaginassimo di fare un foro sul fondo del serbatoio grande quanto l'intera base del cilindro, l'acqua cadrebbe con accelerazione g dovuta alla gravità, quindi con velocità data da $v = \sqrt{2g(h_0 - h)}$,

dove h_0 è l'altezza iniziale dell'acqua nel serbatoio. Notare che questo risultato differisce abbondantemente da $v = \sqrt{2gh}$. Nella sezione seguente, generalizzeremo la legge di Torricelli per buchi di larghezza arbitraria, in modo ritrovare entrambi i limiti (buco di area massima e buco piccolissimo)!

4.2 Legge di Torricelli per buchi di grandezza arbitraria

Ricordiamo che, per fluidi incompressibili, l'equazione di continuità mette in relazione la velocità v dell'acqua nel serbatoio e la velocità V dell'acqua nel foro:

$$v = \frac{aV}{A}.$$

Inoltre, la velocità v non è altro che il tasso di cambiamento dell'altezza dell'acqua nel recipiente

$$v = -\frac{dh}{dt}.$$

Nell'unità di tempo, il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale sull'acqua contenuta nel recipiente è il prodotto tra la potenza per unità di volume $\rho g v$ ed il volume dell'acqua Ah ancora nel contenitore, cioè

$$\frac{dW}{dt} = \rho g v Ah = \rho g V ah,$$

dove ρ è la densità dell'acqua. Similmente, l'energia cinetica totale dell'acqua nel recipiente vale

$$K_{\text{recipiente}} = \frac{\rho v^2}{2} Ah = \frac{\rho V^2 a^2}{2} h.$$

Calcoliamone la derivata temporale, sarà utile a breve.

$$\frac{dK_{\text{recipiente}}}{dt} = \frac{\rho V^2 a^2}{2} \frac{dh}{dt} + \rho V \frac{dV}{dt} \frac{a^2}{A} h = -\frac{\rho V^3 a^3}{2 A^2} + \rho V \frac{dV}{dt} \frac{a^2}{A} h.$$

Il tasso con cui l'energia cinetica esce dal recipiente (a velocità V) vale

$$\frac{dK_{\text{fuori}}}{dt} = \frac{dm_{\text{fuori}}}{dt} \frac{V^2}{2} = \rho V a \frac{V^2}{2},$$

dove $\frac{dm_{\text{fuori}}}{dt}$ è il tasso di fuoriuscita dell'acqua dal recipiente, pari a $\rho V a$. Per la conservazione dell'energia, il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale deve essere pari alla variazione di energia cinetica. Quindi imponiamo che

$$\frac{dW}{dt} = \rho g V ah = \frac{dK_{\text{recipiente}}}{dt} + \frac{dK_{\text{fuori}}}{dt} = -\frac{\rho V^3 a^3}{2 A^2} + \rho V \frac{dV}{dt} \frac{a^2}{A} h + \rho V a \frac{V^2}{2}.$$

Dividendo quest'ultima equazione per ρVa e notando che $V = -A\dot{h}/a$ e $\dot{V} = -A\ddot{h}/a$, otteniamo

$$gh = \left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right) \frac{V^2}{2} + \frac{a}{A} h \frac{dV}{dt}.$$

Possiamo rimpiazzare il tempo come variabile indipendente con la variabile h . Basta notare che

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \frac{dh}{dt} = -\frac{a}{A} V \frac{dV}{dh} = -\frac{1}{2} \frac{a}{A} \frac{dV^2}{dh}.$$

Sostituendo, otteniamo

$$2gh = \left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right) V^2 - \frac{a^2}{A^2} h \frac{dV^2}{dh}. \quad (5)$$

Quest'equazione differenziale va risolta tenendo conto delle condizioni iniziali, cioè $v(h = h_0) = V(h = h_0) = 0$. La soluzione è³

$$V(h) = \sqrt{2gh \frac{1 - (h/h_0)^{\frac{1-2r}{r}}}{1 - 2r}} = \sqrt{2gh_0} \sqrt{\frac{h}{h_0} \frac{1 - (h/h_0)^{\frac{1-2r}{r}}}{1 - 2r}} \quad (0 \leq h \leq h_0),$$

dove abbiamo definito $r \equiv (a/A)^2$. Nei casi limite $r = 0$ e $r = 1$, essa si riduce rispettivamente a

$$V(h, r = 0) = \sqrt{2gh}, \quad V(h, r = 1) = \sqrt{2g(h_0 - h)}.$$

Nel caso $r = 1$ (cioè il caso in cui il foro di uscita è l'intera base del recipiente cilindrico) ritroviamo il risultato dato dalla caduta libera! Invece, per $r = 0$ otteniamo la legge di Torricelli per buchi piccoli! Tutto torna!

4.3 Legge di Betz

I venti non sono altro che masse d'aria che si spostano prevalentemente in senso orizzontale da zone di alta pressione (anticicloni) a zone di bassa pressione (cicloni). Ed oggi, essi costituiscono una grande sorgente di energia. Per estrarre questa energia dall'aria, vengono utilizzate delle turbine a vento di diversi tipi. In questa sezione siamo interessati alle turbine a vento con asse orizzontale. Le turbine convertono l'energia cinetica dell'aria in energia rotazionale, la quale diventerà energia elettrica per mezzo di alternatori.

³Si veda l'Appendice per la deduzione matematica.

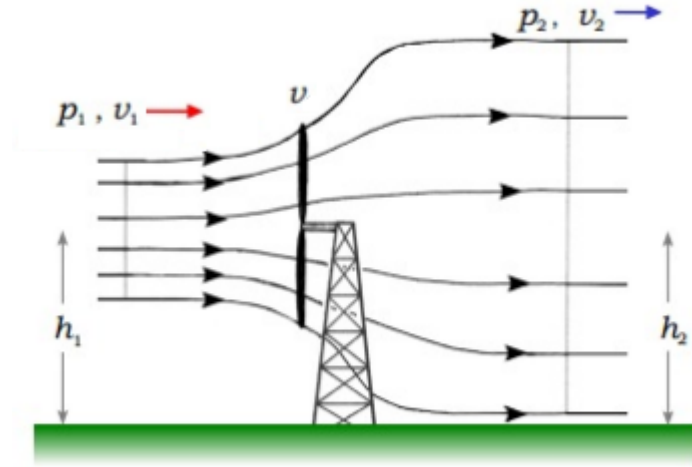


Figura 7: Schematizzazione del tubo di flusso di aria e della turbina.

Cerchiamo di capire quanta energia può essere estratta dall'aria per mezzo di una turbina.

Per una trattazione semplificata, sono necessarie le ipotesi simili a quelle assunte per la derivazione dell'equazione di Bernoulli:

1. flusso stazionario;
2. flusso non rotazionale;
3. aria incompressibile;
4. lontano dalla turbina, la pressione è quella atmosferica.

Facendo riferimento alla Figura 7, applichiamo l'equazione di Bernoulli in due sezioni del tubo di flusso in assenza della turbina

$$p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} + \rho g h_2.$$

Invece, in presenza della turbina, parte dell'energia cinetica viene sottratta all'aria, quindi l'equazione di Bernoulli si legge

$$p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} + \rho g h_2 + \frac{K}{V}.$$

Considerando $h_1 = h_2$ e confrontando due sezioni molto lontane dalla turbina, in modo che $p_1 = p_2 = p_0$, otteniamo che l'energia per unità di volume sottratta all'aria vale

$$k = \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2).$$

La potenza estratta dall'aria non è altro che l'energia per unità di volume per il volume di aria che attraversa la pala eolica nell'unità di tempo, quindi

$$P = kSv = \frac{1}{2}\rho Sv(v_1^2 - v_2^2). \quad (6)$$

D'altro canto, la potenza estratta dal rotore è data dal prodotto tra la forza che il flusso di aria esercita sul rotore e la velocità v del vento in corrispondenza della turbina:

$$P = Fv = \frac{dm}{dt}(v_1 - v_2)v = \rho Sv^2(v_1 - v_2), \quad (7)$$

dove abbiamo usato l'equazione di continuità $\rho v_1 A_1 = \rho v_2 A_2 = \frac{dm}{dt}$ ed S è approssimativamente la superficie trasversale della turbina. Uguagliando le espressioni per la potenza (6) e (7), otteniamo

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Possiamo quindi riscrivere la potenza estratta come

$$P = \frac{1}{4}\rho S(v_1 + v_2)^2(v_1 - v_2).$$

Definiamo il coefficiente di prestazione come il rapporto tra la potenza estratta e la potenza dell'aria in assenza della turbina, cioè

$$c_p = \frac{P}{P_0} = \frac{\frac{1}{4}\rho S(v_1 + v_2)^2(v_1 - v_2)}{\frac{1}{2}\rho S v_1^3} = \frac{1}{2}(1 + \beta)^2(1 - \beta),$$

dove abbiamo definito $\beta \equiv \frac{v_2}{v_1}$. Calcoliamo il massimo di questa funzione facendone la derivata prima e ponendola pari a zero:

$$\frac{dc_p}{d\beta} = \frac{1}{2}(2(1 + \beta)(1 - \beta) - (1 + \beta)^2) = 0,$$

la cui soluzione è $\beta = \frac{1}{3}$. Il massimo valore del coefficiente di prestazione è dunque $c_p = \frac{16}{27} \approx 0,59$. Ciò significa che, teoricamente, la massima potenza estraibile dall'aria è circa il 59% di quella disponibile. Questo risultato è noto come *limite di Betz*.

5 Appendice

Riportiamo qui la deduzione matematica della soluzione dell'equazione differenziale (5). Riscriviamo la (5) nel seguente modo

$$\frac{dV^2}{dh} = V^2 \frac{1-r}{hr} - \frac{2g}{r},$$

dove $r \equiv a^2/A^2$. Questa è un'equazione differenziale del primo ordine a coefficienti non costanti. La soluzione generica di un'equazione di questo tipo è

$$V^2 = e^F \left(C - \frac{2g}{r} \int e^{-F} dh \right),$$

dove C è una costante ed

$$F = \int \frac{1-r}{hr} dh = \frac{1-r}{r} \ln h.$$

Segue che

$$e^F = h^{\frac{1}{r}-1}, \quad \int e^{-F} dh = \int h^{1-\frac{1}{r}} dh = \frac{r}{2r-1} h^{2-\frac{1}{r}}.$$

Sostituendo queste quantità nella soluzione generica, otteniamo

$$V^2 = h^{\frac{1}{r}-1} \left(C + \frac{2g}{1-2r} h^{2-\frac{1}{r}} \right) = \left(Ch^{\frac{1}{r}-1} + \frac{2gh}{1-2r} \right) = \left(Chh^{\frac{1}{r}-2} + \frac{2gh}{1-2r} \right).$$

Ricordando che $V^2(h = h_0) = 0$, possiamo identificare la costante come $C = -2gh_0^{2-\frac{1}{r}}/(1-2r)$, e quindi scrivere

$$V^2 = \frac{2gh}{1-2r} \left(1 - (h/h_0)^{\frac{1-2r}{r}} \right).$$

6 Problemi

Problema 6.1. Prova a stimare quanto segnerebbe la bilancia se ti pesassi nel vuoto. Pesa più 1 kg di piombo o 1 kg di paglia?

Problema 6.2. Calcolare il tempo di svuotamento di un secchio cilindrico di altezza h_0 ed area di base A , supponendo che la sezione del foro alla base sia $S \ll A$.

Problema 6.3. Calcolare il tempo di svuotamento di un secchio conico di altezza h_0 e raggio di base R , supponendo che la sezione del foro sia $S \ll R^2$. L'approssimazione della legge di Torricelli è sempre valida in questo caso?

Problema 6.4. Una bolla d'aria viene immessa alla base di un cilindro chiuso (alto 10 metri) e pieno d'acqua. Al momento dell'immissione della bolla, la pressione sul fondo del cilindro è 1.1 atmosfere. La bolla inizia a salire fino a quando non raggiunge la sommità del cilindro. Quanto vale adesso la pressione sul fondo? Assumere che la pressione idrostatica di 10 metri di acqua sia esattamente 1 atmosfera.

Problema 6.5. Un palloncino si trova dentro un camion che a un certo punto accelera in avanti. Cosa succede al palloncino nel sistema di riferimento del camion?

Problema 6.6. Una piccola sfera di ferro di volume V affonda a velocità costante v in un recipiente chiuso completamente riempito di acqua. Qual è la quantità di moto totale dell'acqua? Il contenitore si trova su un tavolo, durante la discesa della sferetta che forza esercita il tavolo su di esso?

Problema 6.7. Un carrello con dell'acqua all'interno si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato, con accelerazione $a\hat{x}$. Si trovi come si dispone l'acqua.

Problema 6.8. Si consideri il problema di galleggiamento di una nave in un bacino di carenaggio, semplificato nei seguenti termini: la vasca sia un parallelepipedo retto di larghezza a e lunghezza b e la nave sia un prisma retto della stessa lunghezza con base triangolare equilatera di lato $a/2$ e densità uniforme δ di poco inferiore a quella dell'acqua. Si supponga, inoltre, che la faccia superiore del prisma sia orizzontale quando esso galleggia. Si calcoli il minimo volume di acqua che bisogna versare nella vasca per far galleggiare la nave.

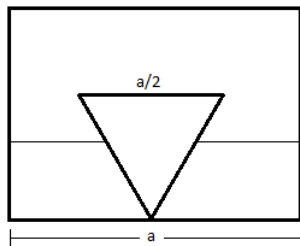


Figura 8: Sezione trasversale del bacino di carenaggio.

Problema 6.9. Determinare che forma deve avere un recipiente a simmetria cilindrica in modo che in esso il livello dell'acqua si abbassi a velocità costante se sul fondo viene praticato un foro di dimensioni molto piccole.

Problema 6.10. Un secchio cilindrico di raggio R ed altezza h è riempito di un liquido di densità ρ . Sia h_0 l'altezza del fluido nel secchio. Il secchio viene messo in rotazione attorno al suo asse a velocità costante ω e, dopo un breve periodo di transizione, raggiunge lo stato stazionario. Trovare h_M e h_m , rispettivamente le altezze massima e minima della superficie del fluido rispetto alla base del cilindro. Determinare la pressione $p(l)$ sulla superficie

del secchio cilindrico ad altezza l dalla sua base. Determinare, inoltre, la pressione $p_0(l)$ nei punti dell'asse di rotazione tali che $l < h_m$ e mostrare che il rapporto

$$\frac{p(l) - p_0(l)}{h_M - h_m}$$

è indipendente da ω , R , h_m e l .

Problema 6.11. Sul fondo di un contenitore pieno d'acqua c'è un foro circolare di raggio r , sigillato da una sfera di massa m e raggio $R > r$. L'altezza dell'acqua nel contenitore viene ridotta lentamente fino a quando la sfera si stacca dal fondo. Trovare il valore dell'altezza h_0 per cui ciò succede.

7 Soluzioni

Soluzione 7.1. Per stimare la spinta di Archimede agente sul nostro corpo, basta stimare il volume dello stesso. Una buona stima è 60/70 litri, quindi circa $6/7 \cdot 10^{-2} m^3$. Se si vuole essere più precisi, basta immergersi in una piscina e misurare la variazione di altezza dell'acqua, risalendo così alla variazione di volume. La spinta di Archimede sul nostro corpo vale circa $F = \rho_{aria} g V \approx 0.8 N$, che corrisponde a poco meno di 100 grammi.

Per lo stesso motivo, se consideriamo due masse uguali di paglia e piombo, cioè due quantità contenenti lo stesso numero di protoni, neutroni ed elettroni, la paglia, essendo meno densa, occuperà più volume. Quindi la forza di Archimede dovuta all'aria sarà maggiore nel caso della paglia. Di conseguenza, la bilancia segnerà un peso maggiore nel caso del piombo!

Soluzione 7.2. Applicando dunque il teorema di Torricelli, detta v la velocità dell'acqua non appena esce dal foro, vale

$$v = \sqrt{2gh},$$

dove h è l'altezza del liquido. La velocità del pelo del liquido è legata alla portata in uscita, che è l'opposto della derivata del volume di liquido contenuto nel secchio

$$vS = -A \frac{dh}{dt}.$$

Sostituendo nella legge di Torricelli, troviamo

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{S}{A} \sqrt{2gh},$$

che è un'equazione differenziale con soluzione

$$h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{St}{2A} \sqrt{2g} \right)^2.$$

L'altezza del livello del liquido è nulla per

$$t = \frac{A}{S} \sqrt{\frac{2h_0}{g}}.$$

Soluzione 7.3. Procedendo analogamente al problema precedente, si ottiene la seguente equazione differenziale

$$-\frac{\pi h_0}{R} r^2(t) \frac{dr}{dt} = S \sqrt{\frac{2gh_0}{R}} r(t),$$

dove $r(t)$ è il raggio istantaneo della superficie del pelo dell'acqua. Un'equazione differenziale equivalente si può trovare per $h(t)$. Imponendo le solite condizioni iniziali, si ottiene

$$r(t) = \left[R^{\frac{5}{2}} - \frac{5S}{2\pi} \sqrt{\frac{2gR}{h_0}} t \right]^{\frac{2}{5}}.$$

La soluzione si annulla per

$$t = \frac{2\pi R^2}{5S} \sqrt{\frac{h_0}{2g}}.$$

Ovviamente, la legge di Torricelli non vale più quando il livello dell'acqua diventa molto piccolo, perché la sezione del buco non è più trascurabile.

Soluzione 7.4. Durante la risalita della bolla, l'acqua può essere trattata come un fluido incompressibile ed il suo volume rimane, con buona approssimazione, costante. Di conseguenza, anche il volume della bolla resta costante (la temperatura continua a essere la stessa dell'acqua). Se volume e temperatura rimangono invariati, allora anche pressione della bolla è costante e pari a 1.1 atmosfere. Una volta arrivata alla sommità del cilindro, l'acqua in quel punto sarà alla pressione di 1.1 atmosfere e, conseguentemente, la pressione alla base sarà 2.1 atmosfere per la legge di Stevino.

Soluzione 7.5. Il palloncino è complessivamente meno denso dell'aria circostante. Di conseguenza, nel sistema del camion, la forza fittizia agente su di

esso è minore di quella agente su uno stesso volume d'aria spostato; quindi viene spinto in avanti dalla pressione nella direzione in cui il camion accelera fino a che non incontra la parete. A questo risultato ci si può arrivare anche in questo modo: nel sistema accelerato è come se ci fosse una gravità fittizia lungo $\hat{x}$. In analogia al caso verticale in cui il palloncino, essendo più leggero, si sposta nel verso opposto alla forza fittizia. Per lo stessa ragione, se il camion svoltasse a destra, nel sistema di riferimento del camion il palloncino si sposterebbe verso destra.

Soluzione 7.6. Durante il moto della sfera, cambia la distribuzione di massa del sistema. Al tempo t , il centro di massa del sistema si è spostato della distanza

$$s = vt \frac{\rho_s V - \rho_a V}{M},$$

dove M è la massa totale del sistema e V il volume della sfera, mentre ρ_s e ρ_a sono rispettivamente le densità della sfera e dell'acqua. Ciò deriva da questo semplice ragionamento: se la sferetta si è spostata della quantità vt , possiamo pensare che una sferetta di acqua delle stesse dimensioni abbia preso il posto che essa occupava precedentemente. Quindi, la quantità di moto totale del sistema vale

$$p_{\text{tot}} = \frac{Ms}{t} = v\rho_s V - v\rho_a V,$$

dove il primo termine a destra rappresenta la quantità di moto della sfera di ferro, mentre il secondo è la quantità di moto della sfera d'acqua. Il centro di massa del sistema scende a velocità costante, quindi la forza totale agente su di esso è nulla! Di conseguenza, la forza che il tavolo esercita sul contenitore è uguale ed opposta alla forza peso del sistema.

Soluzione 7.7. Mettendoci nel sistema accelerato, abbiamo

$$\phi = \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz + ax = \text{costante}.$$

Ma, all'equilibrio, la velocità è nulla in tutti i punti del fluido. Allora le superfici equipotenziali (isobare) obbediscono all'equazione

$$z(x) = \text{costante} - \frac{a}{g}x,$$

che rappresenta dei piani, inclinati rispetto alla base del carrello.

Soluzione 7.8. La condizione di galleggiamento è che la forza di Archimede sia pari alla forza peso della nave. Supponiamo che, in un certo momento,

l'altezza dell'acqua nella vasca sia h e che la nave tocchi il fondo. Il volume di acqua spostato è

$$V(h) = \frac{h^2 b}{\sqrt{3}}.$$

Detta ρ la densità dell'acqua, la condizione di galleggiamento è

$$\rho g V(h) = M_{nave} g,$$

da cui possiamo ricavare il valore di h per cui la nave si stacca dal fondo

$$h_m = \frac{a}{4} \sqrt{\frac{3\delta}{\rho}}.$$

Il volume di acqua necessario è, dunque,

$$V_A = abh_m - V(h) = \sqrt{\frac{3\delta}{\rho}} \left(\frac{a^2 b}{4} \right) \left(1 - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\delta}{\rho}} \right).$$

Soluzione 7.9. Sia A la superficie del foro. Per recipienti a simmetria cilindrica, la superficie del liquido ha area $S = \pi r^2(h)$ dove r è il raggio del cerchio alla quota h . Per la conservazione della portata si ha

$$S \left| \frac{dh}{dt} \right| = Av,$$

dove v è la velocità di fuoriuscita dell'acqua dal foro, che per Bernoulli vale $v = \sqrt{2gh}$. Noi vogliamo che l'acqua si abbassi ad un rate costante, quindi prendiamo $\frac{dh}{dt} = c$. Sostituendo, si ottiene

$$c\pi r^2 = A\sqrt{2gh} \longrightarrow h(r) = kr^4,$$

con k costante. Questa curva è il frutto della rotazione di una quartica canonica (tipo $y = x^4$) attorno all'asse y . Dobbiamo, però, ricordarci che Torricelli non vale più quando il livello dell'acqua è molto basso, perché prima o poi la superficie del pelo dell'acqua diventa paragonabile a quella del foro, come nel caso del cono.

Soluzione 7.10. Escludiamo il caso in cui ω è così grande da far sì che non ci sia liquido nel centro della superficie inferiore del secchio (il minimo del paraboloide corrispondente alla superficie di separazione si trova sotto il

secchiello).

La superficie del liquido in rotazione è un paraboloide di equazione

$$h(r) = h(0) + \frac{\omega^2 r^2}{2g}.$$

Di conseguenza

$$h_M = h_m + \frac{\omega^2 R^2}{2g}.$$

Per trovare i valori è sufficiente uguagliare i volumi prima e dopo che il secchiello viene messo in rotazione. Quello che si ottiene è

$$h_M = h_0 + \frac{\omega^2 R^2}{4g},$$

$$h_m = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g}.$$

Passiamo adesso a valutare la pressione. I paraboloidi interni al fluido, traslati verso il basso rispetto alla superficie, sono isobari. Poiché la pressione sulla superficie del fluido è p_a , segue che la pressione in un paraboloide generico distante l dalla superficie è $p_a + \rho dg$, quindi

$$p(l) = p_a + (h_M - l)\rho g = p_a + \left(h_0 + \frac{\omega^2 R^2}{4g} - l\right)\rho g.$$

Per quanto riguarda la pressione nei punti dell'asse di rotazione, si ha

$$p_0(l) = p_a + (h_m - l)\rho g = p_a + \left(h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g} - l\right)\rho g.$$

Segue che

$$\frac{p(l) - p_0(l)}{h_M - h_m} = \rho g.$$

Soluzione 7.11. Le forze agenti sulla palla sono la forza peso e la forza di Archimede. Quando esse si equivalgono, la palla si stacca dal foro. Sia $V(r, R)$ il volume della palla immerso nell'acqua. La forza di Archimede è

$$\rho g V(r, R) - \rho g h \pi r^2$$

perché la parte di sfera corrispondente all'apertura del foro non contribuisce alla spinta verso l'alto, non essendoci acqua al di sotto. Quindi, se la sfera è

totalmente sommersa, diminuire h significa aumentare la spinta verso l'alto. La palla si alza quando

$$h_0 = \frac{V(r, R)}{\pi r^2} - \frac{m}{\rho \pi r^2}.$$

Manca solo da valutare il volume della sfera immerso nell'acqua. Tramite integrazione o ragionamenti geometrici si giunge a

$$V(r, R) = \frac{\pi}{3} \left(2R^3 + (2R^2 + r^2)\sqrt{R^2 + r^2} \right)$$

Segue che

$$h_0 = \frac{2R^3 + (2R^2 + r^2)\sqrt{R^2 + r^2}}{3r^2} - \frac{m}{\rho \pi r^2}$$

Ricordiamo che questo vale solo se la palla è totalmente sommersa dall'acqua. Se così non fosse, bisognerebbe sottrarre al volume appena calcolato il volume della calotta sferica superiore, che rimane fuori dall'acqua.