

# Tecniche di Problem Solving

Daniele Battesimo Provenzano\*

7 febbraio 2024

## Sommario

La lezione contiene sia vere e proprie tecniche di problem solving, sia tecniche di diagnostica, cioè metodi finalizzati a trovare gli eventuali errori commessi durante la risoluzione del problema. Gli argomenti trattati sono: l'uso di quantità conservate, il controllo dei casi limite, l'analisi dimensionale e le stime.

## Indice

|          |                                                         |           |
|----------|---------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduzione</b>                                     | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Le conservazioni</b>                                 | <b>2</b>  |
| 2.1      | Energia . . . . .                                       | 2         |
| 2.2      | Quantità di moto . . . . .                              | 5         |
| 2.3      | Momento angolare . . . . .                              | 8         |
| 2.3.1    | Intermezzo: campi di forza radiali e centrali . . . . . | 11        |
| 2.4      | Quantità speciali . . . . .                             | 14        |
| 2.4.1    | Vettore di Lenz . . . . .                               | 14        |
| 2.4.2    | Due esempi molto particolari . . . . .                  | 17        |
| <b>3</b> | <b>Il controllo dei casi limite</b>                     | <b>20</b> |
| 3.1      | Scartare soluzioni non fisiche . . . . .                | 26        |
| <b>4</b> | <b>L'analisi dimensionale</b>                           | <b>28</b> |
| <b>5</b> | <b>Le stime</b>                                         | <b>32</b> |
| <b>6</b> | <b>Problemi finali</b>                                  | <b>34</b> |

## 1 Introduzione

Questa lezione contiene sia vere e proprie tecniche di problem solving, sia tecniche di diagnostica. Studieremo alcuni metodi finalizzati a risolvere i problemi e altri finalizzati a controllare la validità del risultato che abbiamo trovato.

Gran parte della lezione è dedicata alle conservazioni. Perché questo? Perché **la prima domanda che dovete porvi non appena finite di leggere la traccia di un problema è: “Cosa si conserva?”**. La presenza di grandezze conservate rende più

---

\*[daniele.provenzano@sns.it](mailto:daniele.provenzano@sns.it) oppure [daniele.battesimo.provenzano@gmail.com](mailto:daniele.battesimo.provenzano@gmail.com)

semplice la soluzione di un problema!

Le due tecniche che, in base all'utilizzo, possono fungere sia da tecniche di problem solving che da tecniche di diagnostica sono il *controllo dei casi limite* e l'*analisi dimensionale*.

Tutte le tecniche che sono descritte in questa lezione non vanno usate da sole! Per esempio, capita spesso di usare il diagramma di corpo libero insieme alla conservazione dell'energia e del momento angolare! In generale i problemi contengono più di una incognita, quindi ci servono più equazioni possibili! Dobbiamo saper sfruttare tutto ciò che conosciamo per arrivare al risultato e controllare la sua validità.

Questa lezione verrà ampliata negli anni. Cosa manca? Il diagramma di corpo libero, le simmetrie, l'uso saggio degli infinitesimi, la semplificazione del problema, il cambio di sistema di riferimento, trucchi per risolvere specifiche tipologie di integrali ed equazioni differenziali, la risoluzione grafica di un problema, l'adimensionalizzazione delle equazioni di grado 3 o superiore e altre tecniche che mi verranno in mente.

## 2 Le conservazioni

### 2.1 Energia

Sicuramente avete già sentito parlare di conservazione dell'energia. La cosa più importante da sapere è che l'energia si conserva sicuramente nei seguenti tre casi: quando le uniche forze che agiscono sul sistema sono forze conservative che ammettono un'energia potenziale statica (cioè che non dipende esplicitamente dal tempo); in presenza di urti perfettamente elastici e, soprattutto, ogni qual volta lo dice il testo del problema.

Vediamo una carrellata di casi in cui l'energia *non* si conserva.

1. **Sul sistema agiscono forze non conservative**, come l'attrito, la resistenza fluidodinamica o gli sforzi nei materiali non-elastici<sup>1</sup>. *Attenzione*: oltre alla presenza di forze non conservative, è necessario che esse *compiano lavoro*! Ad esempio, l'energia si conserva nel caso in cui un corpo rotola senza strisciare su un piano scabro. La forza di attrito è presente (permette al corpo di non strisciare) ma non compie lavoro perché il punto di contatto tra corpo e piano è istantaneamente fermo!
2. **Sul sistema agiscono forze che dipendono esplicitamente dal tempo**, in modulo  $\vec{F}(t) = F(t)\hat{d}$ , direzione/verso  $\vec{F}(t) = F\hat{d}(t)$  o tutte e tre contemporaneamente. In questo caso, può succedere che la forza  $\vec{F}(t)$  ammetta *istantaneamente* un potenziale, ma esso sarà una funzione esplicita del tempo  $U(t)$ , di conseguenza

---

<sup>1</sup>Qui possiamo dare risposta ad una domanda che ogni tanto qualcuno si pone: “Dato che la forza di gravità è conservativa, perché ogni volta che salgo e scendo  $n$  rampe di scale non riacquisto l'energia che avevo in partenza e mi sento comunque più stanco?” Questa domanda presuppone che la forza di gravità sia l'unica ad agire sul nostro corpo. In realtà, non riusciremmo a muoverci se non ci fossero le forze dei nostri muscoli! Purtroppo, il corpo umano è un materiale non-elastico e le forze muscolari non sono conservative! Ecco perché non riacquistiamo energia quando torniamo alla quota di partenza! Se questa spiegazione non vi bastasse, possiamo darvene un'altra: non tutta la potenza sprigionata dai muscoli viene usata per compiere lavoro utile. Parte di essa viene dispersa sotto forma di calore, che non può essere riconvertito in lavoro utile!

anche l'energia meccanica  $E = K + U$  dipenderà esplicitamente dal tempo, quindi non si conserva.

3. **Urti anaelastici**, che, per definizione, sono tutti quegli urti in cui non si conserva l'energia cinetica  $K$ . Generalmente, noi trattiamo solo urti istantanei che avvengono in un singolo punto, quindi, durante l'evento, l'energia potenziale del sistema rimane immutata. Ne deduciamo che l'energia meccanica del sistema  $E = K + U$  non si conserva.
4. **Urti relativistici**. Qui bisogna fare attenzione: in relatività speciale, a seguito di un urto tra due corpi/particelle, l'energia cinetica non si conserva. Quello che si conserva è l'energia *totale*  $E = \sum_i \gamma_i m_i c^2$ , cioè la somma dell'energia cinetica  $K = \sum_i (\gamma_i - 1) m_i c^2$  e dell'energia propria dei corpi  $E_0 = \sum_i m_i c^2$ . Quindi, c'è comunque un'energia che si conserva, ma non è quella standard che conosciamo.

Questi esempi appena enunciati riguardano la meccanica, citiamone alcuni riguardanti l'elettromagnetismo.

1. Presenza di resistenze nei circuiti elettrici.
2. Irraggiamento di cariche elettriche accelerate.
3. Presenza di materiali caratterizzati da permittività elettriche  $\varepsilon$  o permeabilità magnetiche  $\mu$  dotate di parti immaginarie ( $\varepsilon, \mu \in \mathbb{C}$ ), come succede nei metalli.

Ci tengo a far notare un fatto molto importante: **l'energia che viene persa in tutti questi processi non scompare dall'universo**. Essa si trasforma in altre forme di energia, la cui natura ricade in branche della fisica che, in generale, sono diverse da quella di partenza. Ad esempio, in presenza di attrito, resistenza fluidodinamica e urti anaelastici, parte dell'energia meccanica del sistema si trasforma in energia termica e acustica<sup>2</sup>. Invece, in presenza di circuiti resistivi o di mezzi con funzioni di risposta complesse, è l'energia elettromagnetica a diventare energia termica! Nel caso di urti relativistici (come quelli negli acceleratori di particelle), l'energia si trasforma molto volentieri in massa, che, a tutti gli effetti, è un'altra forma di energia. Infine, nel caso di particelle elettricamente cariche e sottoposte ad accelerazione, l'energia meccanica delle stesse si trasforma in energia elettromagnetica perché c'è emissione di radiazione (luce)!

Dedichiamo un paragrafo all'energia cinetica (non relativistica) e alla sua conservazione. Supponiamo che un corpo si stia muovendo in una zona di spazio in cui sono presenti diverse forze. Esistono casi in cui l'energia cinetica del corpo è conservata? Sì! Calcoliamo la derivata temporale dell'energia cinetica del corpo

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2}m \left( 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = \frac{1}{2}m (2\vec{v} \cdot \vec{a}) = \frac{1}{2}m \left( 2\vec{v} \cdot \frac{\vec{F}}{m} \right) = \vec{v} \cdot \vec{F}. \quad (1)$$

dove  $\vec{F}$  è la risultante delle forze agenti sul corpo. Abbiamo mostrato che la derivata temporale dell'energia cinetica è la potenza associata alla risultante delle forze. Quindi, l'energia cinetica si conserva in tre casi: quando il corpo è fermo, quando la risultante delle forze agenti su di esso è nulla oppure quando la sua velocità è perpendicolare alla risultante delle forze. I primi due casi sono banali, mentre il terzo lo è di meno. Ecco alcuni esempi.

---

<sup>2</sup>Energia termica ed energia acustica sono entrambe legate al movimento delle molecole, ma la prima genera moti randomici, mentre la seconda genera perturbazioni più o meno ordinate.

- Moto circolare uniforme.
- Moto di una particella carica in un campo magnetico uniforme. La forza di Lorentz  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$  è sempre perpendicolare alla velocità della particella. Il moto che ne risulta è circolare uniforme o elicoidale (dipende dall'orientazione relativa iniziale tra velocità e campo magnetico).
- Orbite circolari in un campo centrale qualsiasi.

Ricordiamo che per un corpo rigido posto in rotazione attorno ad un asse, l'energia cinetica vale

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2,$$

dove  $I$  è il momento d'inerzia calcolato rispetto all'asse di rotazione ed  $\omega$  è il modulo della velocità angolare di rotazione. Analogamente al caso traslatorio, la variazione di energia cinetica di un corpo rigido in rotazione vale

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2} I \left( 2\vec{\omega} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right) = \frac{1}{2} I (2\vec{\omega} \cdot \vec{\alpha}) = \frac{1}{2} I \left( 2\vec{\omega} \cdot \frac{\vec{\tau}}{I} \right) = \vec{\omega} \cdot \vec{\tau},$$

dove  $\vec{\alpha} \equiv \frac{d\vec{\omega}}{dt}$  è l'accelerazione angolare, mentre  $\vec{\tau} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt}$  è il momento delle forze agenti sul corpo.

Altra cosa importante: la presenza di forze dissipative che compiono lavoro sicuramente implica la diminuzione dell'energia meccanica totale del sistema, ma non sempre implica la diminuzione dell'energia cinetica dei corpi! Quest'ultimo fatto si verifica sicuramente se le forze dissipative sono le uniche forze a compiere lavoro nel sistema, ma, se ci sono altre forze, le velocità dei corpi possono aumentare! Ad esempio, la velocità di un oggetto in caduta libera, soggetto alla resistenza dell'aria  $\vec{F} = -A\vec{v}$ , aumenta sempre fino a tendere alla velocità limite. Ovviamente, ciò avviene perché c'è un'altra forza - la gravità - che tira giù l'oggetto. In questo caso, quindi, l'energia cinetica cresce, ma l'energia meccanica totale diminuisce. La stessa cosa succede nell'Esempio 3.5.

**Esempio 2.1 (Continuazione: discesa lungo un piano inclinato mobile).** Continuiamo a sviscerare l'Esempio 3.1. Solamente a titolo dimostrativo, mostriamo che l'energia meccanica si conserva durante il moto. In un generico istante di tempo, essa vale

$$E = K + U = \frac{1}{2} m v^2(t) + \frac{1}{2} M V^2(t) + mgh(t),$$

dove  $v(t) = at = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} t$  e  $v(t) = At = A_x t$  sono i moduli delle velocità del blocco e del piano in un generico istante di tempo, mentre  $h(t)$  è la quota a cui si trova il blocco. Essa può essere ricavata a partire dalla legge oraria del moto uniformemente accelerato con velocità iniziale nulla:

$$h(t) = h_0 + \frac{1}{2} a_y t^2 = h_0 + \frac{1}{2} \left( \frac{N}{m} \cos \theta - g \right) t^2 = h_0 - \frac{1}{2} g \frac{\left( 1 + \frac{m}{M} \right) \sin^2 \theta}{1 + \frac{m}{M}} t^2,$$

dove  $h_0$  è la quota iniziale a cui si trova il blocco. A questo punto, possiamo sostituire nella relazione per l'energia:

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}mg^2 \left[ \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta + \left(1 + \frac{m}{M}\right)^2 \sin^4 \theta}{\left(1 + \frac{m}{M} \sin^2 \theta\right)^2} \right] t^2 + \frac{1}{2} \frac{m^2}{M} g^2 \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\left(1 + \frac{m}{M} \sin^2 \theta\right)^2} t^2 + \\
&+ mgh_0 - \frac{1}{2}mg^2 \frac{\left(1 + \frac{m}{M}\right) \sin^2 \theta}{1 + \frac{m}{M} \sin^2 \theta} t^2 = \\
&= \frac{1}{2}mg^2 \left[ \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta + \left(1 + \frac{m}{M}\right)^2 \sin^4 \theta + \frac{m}{M} \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\left(1 + \frac{m}{M} \sin^2 \theta\right)^2} \right] t^2 + mgh_0 + \\
&- \frac{1}{2}mg^2 \frac{\left(1 + \frac{m}{M}\right) \sin^2 \theta}{1 + \frac{m}{M} \sin^2 \theta} t^2 = mgh_0,
\end{aligned}$$

perché si dimostra con conti banali che il primo e il terzo addendo del penultimo passaggio sono esattamente opposti. Quindi l'energia meccanica si conserva ed è pari all'energia potenziale iniziale (quella cinetica era nulla).

## 2.2 Quantità di moto

In meccanica newtoniana, la quantità di moto di un corpo è una grandezza vettoriale definita come  $\vec{p} \equiv m\vec{v}$ , dove  $m$  è la massa del corpo e  $\vec{v}$  è il vettore velocità. Per sistemi in cui la massa è costante nel tempo, il secondo principio di della dinamica può essere riscritto nella seguente forma

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

perché

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Da questa relazione segue che la quantità di moto di un corpo è costante nel tempo se la risultante delle forze agenti su di esso è nulla.

Tramite secondo e terzo principio è possibile ricavare un risultato ancora più generale: **in un sistema isolato, la quantità di moto totale è costante nel tempo**. Consideriamo un sistema isolato composto da due corpi di masse  $m_1$  e  $m_2$ , rispettivamente. L'ipotesi di sistema isolato si traduce nel fatto che le uniche forze che possono agire sui due corpi devono obbedire al principio di azione e reazione. In altre parole, la forza complessiva agente sul primo corpo può essere generata solamente dall'interazione col secondo e viceversa. Questo tipo di forza può essere di contatto, come la reazione normale e le forze istantanee generate durante gli urti, o a distanza, come l'interazione gravitazionale. Siano  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  le forze agenti sui due corpi: il principio di azione e reazione impone che  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ . Ricordando l'espressione trovata poco fa, possiamo scrivere

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \implies \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0,$$

che significa che la quantità di moto totale del sistema è conservata nel tempo. Possiamo iterare questo ragionamento aggiungendo altri corpi al sistema: questo è un risultato generico che vale in qualsiasi sistema isolato, indipendentemente dal numero di corpi che lo compongono. Quindi, ad esempio, se nello spazio sono presenti  $N$  corpi celesti che interagiscono tra di loro mediante l'interazione gravitazionale, nonostante l'evoluzione

temporale del sistema sia praticamente impossibile da predire, possiamo sicuramente affermare che la quantità di moto totale del sistema rimane sempre la stessa. Allo stesso modo, se  $N$  biglie sono libere di scontrarsi tra di loro, in assenza di gravità e attrito, la quantità di moto totale del sistema è costante nel tempo. Cosa succede, invece, se facciamo comparire un tavolo da biliardo sul quale le biglie sono vincolate a muoversi? Prima o poi qualcuna di esse urterà su una sponda del tavolo e verrà nuovamente riflessa verso l'interno. Questo comporta una variazione della quantità di moto totale del sistema *biglie*, dovuta al fatto che esso non è più isolato dall'esterno (c'è il tavolo!).

Consideriamo il banale moto circolare uniforme: nonostante il modulo della velocità, e quindi della quantità di moto, sia conservato, la sua direzione non lo è! La presenza di una forza che funge da forza centripeta fa sì che  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \neq 0$ . La quantità di moto non è conservata: questo accade generalmente quando si è in presenza di vincoli fisici, come delle guide non rettilinee o dei muri, come nell'esempio delle biglie sul tavolo da biliardo. Una palla lanciata contro una parete torna indietro, quindi cambia quantità di moto. Se invece, la parete non fosse fissata al suolo e fosse libera di scorrerci sopra senza attrito, la quantità di moto del sistema palla + parete sarebbe la stessa prima e dopo l'urto.

Generalmente, la quantità di moto del sistema si conserva in ogni tipo di urto, anche anaelastico, tranne nei casi di urto contro un vincolo irremovibile, come un muro. Invece, l'energia cinetica del sistema si conserva solo nel caso di urti perfettamente elastici.

**Esempio 2.2 (Urto elastico in una dimensione).** *Consideriamo due corpi puntiformi, di masse  $m$  e  $M$ , vincolati a muoversi su una retta. Il primo corpo ha velocità  $v_0$ , mentre il secondo è fermo. Se essi urtano in modo elastico, quanto varranno le loro velocità finali?*

Avendo a che fare con un urto elastico, possiamo sfruttare le conservazioni della quantità di moto e dell'energia. In formule

$$\begin{cases} mv_0 = mv_1 + Mv_2, \\ \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2, \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} v_1 = v_0 \frac{m-M}{M+m}, \\ v_2 = v_0 \frac{2m}{M+m}. \end{cases}$$

Il problema è risolto, ma facciamo qualche considerazione aggiuntiva. Nel caso in cui il corpo fermo sia un muro, la sua massa  $M$  è molto grande. Nel limite  $M \rightarrow \infty$ , la soluzione precedente diventa

$$\begin{cases} v_1 = -v_0, \\ v_2 = 0, \end{cases}$$

infatti, una palla lanciata contro un muro torna indietro con la stessa velocità in modulo, mentre il muro rimane fermo. Questo limite, però, non rispetta la conservazione della quantità di moto, come anticipato nella sezione precedente. Questo apparente problema matematico non ha ripercussioni sul mondo reale: in realtà il muro, che è ancorato al terreno, trasferisce all'intero pianeta Terra l'impulso dato dal contatto con la palla. La variazione di velocità della Terra è, però, impercettibile e insignificante. Per intenderci, se  $m = 0.1 \text{ kg}$  e  $v_0 = 10 \text{ m/s}$ , la variazione di velocità della Terra è dell'ordine di  $10^{-25} \text{ m/s}$ . Quindi, nella vita reale la quantità di moto si conserva sempre.

**Esempio 2.3 (Urto completamente anaelastico in una dimensione).** *Consideriamo due corpi puntiformi, di masse  $m$  e  $M$ , vincolati a muoversi su una retta. Il primo corpo ha velocità  $v_0$ , mentre il secondo è fermo. Se essi urtano in modo completamente anaelastico, quanto varranno le loro velocità finali?*

Stavolta non possiamo sfruttare la conservazione dell'energia cinetica, ma la condizione di *completa anaelasticità* si traduce nel fatto che i due corpi si attaccano. Le loro velocità dopo l'urto saranno uguali, quindi possiamo imporre  $v_1 = v_2 \equiv v$ . L'equazione per la conservazione della quantità di moto diventa

$$mv_0 = (m + M)v,$$

quindi la velocità finale del nuovo corpo è

$$v = \frac{m}{m + M}v_0.$$

In questi ultimi due esempi abbiamo analizzato i due tipi di urti più frequenti che compaiono nei problemi di fisica. Come dobbiamo comportarci, invece, quando siamo in presenza di urti non completamente anaelastici? In questi casi, ci sono più incognite che equazioni da risolvere. Però l'introduzione del cosiddetto *coefficiente di restituzione* ci permette di risolvere il problema. In questa lezione non parleremo di questo aspetto, se siete curiosi cercate altrove.

**Esempio 2.4 (Pallina da ping pong su palla da basket).** *Una pallina da ping pong di massa  $m$  è in equilibrio in cima ad un pallone da basket di massa  $M \gg m$  e raggio  $R$ . La parte inferiore della palla da basket viene posta ad un'altezza  $h$  dal suolo. Se la palla da basket viene lasciata cadere verso il suolo, qual è l'altezza massima a cui la palla da ping pong arriverà dopo il rimbalzo? Trascura ogni forma di attrito.*

Poco prima che la palla da basket tocchi terra, entrambi i corpi si muovono verso il basso con velocità

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Subito dopo che il pallone rimbalza a terra, esso inizia a muoversi verso l'alto con velocità  $v$ , mentre la pallina da ping pong si muove ancora verso il basso con velocità  $v$ . La velocità relativa è tra le due è quindi  $2v$ . Dopo che rimbalzano l'una sull'altra, la velocità relativa tra le due è ancora  $2v$ , perché è come se il pallone fungesse da muro per la pallina. Ma, nel sistema di riferimento del suolo, il pallone si muove a velocità  $v$  verso l'alto, quindi la velocità della pallina da ping pong è  $2v + v = 3v$ . Per la conservazione dell'energia meccanica, si ha

$$\frac{1}{2}m \left(3\sqrt{2gh}\right)^2 + mgR = mgH,$$

quindi  $H = 9h + R$ .

**Esempio 2.5 (Pianeti e palline).** *Due pianeti identici, di raggio  $R = 1000$  km, sono fissati nello spazio e la distanza tra i loro centri vale  $d = 5R$ . Sulla superficie di uno dei due ci sono  $n$  palline omogenee in contatto l'una sopra l'altra, con masse  $m_1 \gg m_2 \gg \dots \gg m_n$  (dove 1 indica la pallina più in basso, 2 quella soprastante e così via), poste in modo che i centri di massa di tutte le palline si trovano sulla congiungente dei centri dei due pianeti. La pallina più in basso viene lasciata libera di cadere da un metro di altezza. Supponendo che tutti gli urti siano elastici e che le dimensioni delle*

*palline siano trascurabili, determinare il minimo valore di  $n$  tale che almeno una pallina possa giungere sull'altro pianeta.*

Essendo i pianeti identici, basta che una pallina arrivi a metà strada tra i due con una velocità infinitesimale, in modo da cadere sul pianeta di arrivo. Calcoliamo quanto deve valere la velocità di lancio per fare avvenire ciò. Usando la conservazione dell'energia meccanica si trova

$$v_{\text{lancio}} = \sqrt{\frac{9GM}{10R}}.$$

D'altra parte, la velocità di rimbalzo della pallina 1 è

$$v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{\frac{2GMh}{R^2}},$$

dove  $h = 1$  m. Dalla teoria degli urti elastici, iterando il ragionamento dell'Esempio 2.4, segue che la velocità di rimbalzo della pallina  $n$ -esima vale

$$v_n = (2^n - 1)v_1 = (2^n - 1)\sqrt{\frac{2GMh}{R^2}}.$$

Uguagliando la velocità di lancio necessaria affinché la pallina arrivi a metà strada e la velocità di rimbalzo della pallina  $n$ -esima, si trova

$$n = \log_2 \left( 1 + \sqrt{\frac{9R}{20h}} \right) \approx 9.39.$$

Quindi, il primo intero utile è  $n = 10$ .

## 2.3 Momento angolare

L'analisi della conservazione del momento angolare è analoga a quella della conservazione della quantità di moto. L'unica differenza è che il momento angolare ha bisogno di un polo di riferimento per essere definito. Una volta fissato questo punto, il momento angolare relativo ad un corpo puntiforme di massa  $m$  e velocità  $\vec{v}$  è definito dalla relazione

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v},$$

dove  $\vec{r}$  è il vettore posizione del corpo in un sistema di coordinate in cui il polo è fissato nell'origine, mentre il simbolo  $\times$  indica l'operazione di prodotto vettoriale. Per un corpo rigido che ruota attorno ad un certo asse, la relazione precedente diventa

$$\vec{L} = I\vec{\omega},$$

dove  $I$  è il momento d'inerzia del corpo calcolato rispetto all'asse di rotazione, mentre  $\omega$  è la velocità angolare di rotazione.

Esiste un'equazione analoga al secondo principio della dinamica per il momento angolare, cioè

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt},$$

dove  $\vec{\tau}$  è il momento torcente complessivo agente sul corpo in esame. Analogamente a quanto detto per la quantità di moto, **il momento angolare totale è conservato in ogni sistema isolato**. Questo risultato torna molto utile nei problemi riguardanti i corpi rigidi, gli urti e la gravitazione.

**Esempio 2.6 (Urto con asta su un piano orizzontale).** Consideriamo la configurazione in Fig. 1, che schematizza l'urto tra una palla di massa  $m$ , la cui velocità iniziale è  $v_0$ , e un'asta omogenea di massa  $M$  e lunghezza  $l$ , inizialmente ferma. La palla urta l'asta ad una distanza  $d$  dal suo centro di massa. Il piano orizzontale lungo il quale si muovono i due corpi è privo di attrito.

1. Nell'ipotesi di urto elastico, quanto valgono le velocità dei due corpi dopo l'urto? Quanto vale la velocità angolare con cui l'asta ruota attorno al suo centro di massa?
2. Nell'ipotesi di urto completamente anelastico, quanto valgono le velocità dei due corpi dopo l'urto? Quanto vale la velocità angolare con cui il sistema ruota attorno al suo centro di massa?

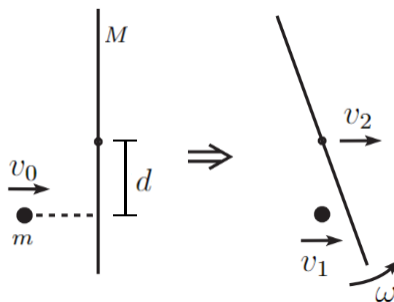


Figura 1: Schematizzazione dell'urto tra una palla e un'asta non vincolata.

1. In questo caso, quantità di moto, energia cinetica e momento angolare sono tutte quantità conservate. Quale polo scegliamo per il calcolo del momento angolare? Abbiamo tre scelte sensate: la posizione iniziale del centro di massa dell'asta, il punto in cui avviene il contatto tra i due corpi oppure il centro di massa del sistema. Quest'ultima scelta risulta la meno comoda delle tre, perché il centro di massa del sistema si muove di moto rettilineo uniforme, quindi bisognerebbe cambiare sistema di riferimento. La scelta più comoda delle tre è la posizione del punto in cui avviene il contatto, perché il contributo della palla al momento angolare totale è nullo sia prima che dopo l'urto. Il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} mv_0 = mv_1 + Mv_2, \\ \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 + \frac{1}{2}I\omega^2, \\ 0 = I\omega - Mdv_2, \end{cases}$$

dove  $I = \frac{1}{12}ml^2$  è il momento d'inerzia dell'asta calcolato rispetto al suo centro di massa. La soluzione del sistema è

$$\begin{cases} v_1 = v_0 \frac{1 - \frac{M}{m} + \frac{Md^2}{I}}{1 + \frac{M}{m} + \frac{Md^2}{I}}, \\ v_2 = \frac{2v_0}{1 + \frac{M}{m} + \frac{Md^2}{I}}, \\ \omega = \frac{2v_0Md}{I\left(1 + \frac{M}{m} + \frac{Md^2}{I}\right)}. \end{cases}$$

Provate a riscrivere l'equazione di conservazione del momento angolare usando gli altri poli citati. È chiaro che le soluzioni dei nuovi sistemi devono coincidere con la soluzione precedente.

2. Per gli urti anaelastici l'energia cinetica non si conserva, quindi potrebbe sembrare che abbiamo meno equazioni di quelle che servono per trovare le tre incognite  $v_1$ ,  $v_2$  e  $\omega$ . In realtà, la condizione di *completa anelasticità* si traduce nel fatto che i due corpi si attaccano dopo l'urto. Quindi, non ha senso cercare due diverse velocità  $v_1$  e  $v_2$ . La nuova incognita è la velocità del centro di massa del nuovo oggetto creato dalla collisione. Le conservazioni di quantità di moto e momento angolare si scrivono

$$\begin{cases} mv_0 = (m + M)v_{\text{cm}}, \\ 0 = I_{\text{cm}}\omega - (m + M)\left(d - \frac{m}{m+M}d\right)v_{\text{cm}} = I_{\text{cm}}\omega - Mdv_{\text{cm}}, \end{cases}$$

dove  $I_{\text{cm}}$  è il momento d'inerzia del nuovo oggetto, calcolato rispetto al suo centro di massa. La soluzione del sistema è

$$\begin{cases} v_{\text{cm}} = \frac{m}{m+M}v_0, \\ \omega = \frac{Mmd}{(m+M)I_{\text{cm}}}v_0. \end{cases}$$

Adesso manca solo  $I_{\text{cm}}$  da calcolare. Provate a farlo voi, il risultato deve essere  $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12}Ml^2 + \frac{Mm}{M+m}d^2$ . Anche in questo caso, provate a riscrivere l'equazione della conservazione del momento angolare usando poli diversi.

**Esempio 2.7 (Filo che si attorciglia attorno ad un tubo, con e senza attrito).** Su un piano orizzontale è fissato un cilindro retto di raggio  $R$  e asse verticale. Ad un punto della circonferenza di base del cilindro è fissato un estremo di una fune inestensibile e lunga  $l$ , mentre un corpo puntiforme di massa  $m$  è attaccato all'altro estremo. Inizialmente la fune è stesa sul piano, in modo che sia tangente al cilindro, come mostrato in Fig. 2. Al corpo puntiforme viene impressa una velocità iniziale orizzontale  $v_0$ , perpendicolare alla fune, in modo che essa inizi ad avvolgersi attorno al cilindro. Se non c'è attrito tra la massa puntiforme e il piano orizzontale, con quale velocità essa urterà il cilindro?

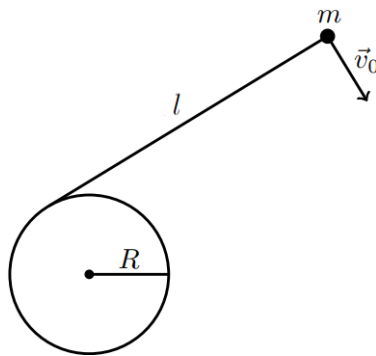


Figura 2: Schematizzazione del sistema dell'Esempio 2.7 visto dall'alto.

Cominciamo a capire quali quantità si conservano durante il moto e quali no. Il vettore quantità di moto non si conserva perché la particella è soggetta alla tensione della fune. A causa delle condizioni iniziali, la velocità del corpo è sempre perpendicolare alla tensione della fune. Quindi, ricordando l'Eq. (1), l'energia cinetica si conserva. Quindi, si conserva anche il modulo della quantità di moto. Cosa possiamo dire sul momento angolare? Purtroppo non possiamo fare un'analogia con le forze centrali perché, in questo

caso, il *centro della forza* di tensione non è fisso. Esso si muove lungo una circonferenza! Basta questo a dire che il momento angolare non si conserva? Assolutamente no, anche perché dobbiamo scegliere un punto fisso rispetto a cui calcolarlo. Il punto più comodo è il centro della circonferenza. Notiamo che la tensione della fune forma sempre un certo angolo  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  con la congiungente centro-corpo, quindi essa produce un momento torcente opposto al momento angolare. Ne deduciamo che il momento angolare non si conserva, in particolare diminuisce nel tempo.

La conservazione dell'energia cinetica implica la conservazione del modulo della velocità del corpo. Per curiosità, determiniamo il modulo del momento angolare, calcolato rispetto al centro della circonferenza, in un generico istante di tempo  $t$  in cui la lunghezza del tratto libero della fune vale  $l(t)$ .

$$L = m|\vec{d} \times \vec{v}_0| = mv_0\sqrt{l(t)^2 + R^2} \cos \alpha = m\sqrt{l(t)^2 + R^2} \sqrt{\frac{l(t)^2}{l(t)^2 + R^2}} v_0 = mv_0 l(t),$$

dove  $\alpha$  è l'angolo formato dalla fune e dalla congiungente centro-corpo. Quindi, possiamo confermare che il momento angolare diminuisce durante l'avvolgimento della fune. Al contrario, se la fune si stesse srotolando dal cilindro, il momento angolare aumenterebbe!

### 2.3.1 Intermezzo: campi di forza radiali e centrali

In ogni branca della fisica compaiono delle grandezze vettoriali dette *campi*. Il campo gravitazionale, il campo elettrico e il campo magnetico sono esempi di campi che interagiscono con la materia (masse o cariche). A questa interazione è associato un *campo di forza*. In altre parole, dall'interazione tra il campo e la materia nasce una forza<sup>3</sup> (forza gravitazionale, forza elettrica, forza di Lorentz...).

Qui serve fare una piccola precisazione che potrebbe sembrare banale, ma spesso la gente tende a fare confusione. Generalmente, i concetti di *campo* e *campo di forza* vengono usati come sinonimi. Questo avviene perché esistono forze associate a campi, come quello gravitazionale o quello elettrico, che sono parallele ai campi stessi! In questi casi, essendo il *campo* in senso stretto e il *campo di forza* paralleli, vengono chiamati allo stesso modo. Però, ci sono casi in cui essi non sono paralleli, come nel caso della forza di Lorentz, la quale è addirittura perpendicolare al campo magnetico in ogni punto dello spazio. In conclusione, sarebbe meglio usare in modo appropriato queste due terminologie in tutti i casi.

Siamo interessati a trovare delle qualità particolari dei campi, per le quali possiamo garantire la conservazione di quantità fisiche notevoli, come l'energia e il momento angolare. Tratteremo due particolari tipologie di campi di forza: i campi di forza *radiali* e i campi di forza *centrali*.

Diciamo che un campo di forza è *radiale* se può essere scritto nella seguente forma

$$\vec{F} = f(\vec{r})\hat{r}.$$

In altre parole, un campo di forza è radiale solo se, in ogni punto dello spazio, esso è diretto lungo la congiungente *punto-origine*, descritta dal versore  $\hat{r}$ . In questo caso, l'origine viene anche chiamata *centro della forza*. Possiamo già mostrare che il momento angolare dei corpi soggetti a tali forze, calcolato rispetto al centro delle stesse, si

---

<sup>3</sup>Esistono altri campi che non sono per forza legati alla generazione di una forza, come i campi di velocità in fluidodinamica.

conserva. Consideriamo la derivata temporale del momento angolare relativo ad un corpo di massa  $m$  che si muove nello spazio.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(m\vec{r} \times \vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + m\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{F},$$

dove abbiamo usato la regola di derivazione del prodotto,  $\frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \vec{v}$  e il secondo principio della dinamica  $m\vec{a} = \vec{F}$ . Il primo addendo è sempre nullo perché il prodotto vettoriale di un vettore per se stesso è nullo, il secondo addendo è nullo solo per i campi di forza radiali ( $\vec{r} \times \hat{r} = 0$ ). Quindi, per i campi di forza radiali, il momento angolare calcolato rispetto al centro della forza si conserva!

Diciamo che un campo di forza è *centrale* se può essere scritto nella seguente forma

$$\vec{F} = f(r)\hat{r}.$$

In altre parole, un campo di forza è centrale solo se, oltre ad essere radiale, ha anche simmetria sferica. Inoltre, **tutti i campi di forza centrali sono campi conservativi!** Notate che i campi radiali dipendono dal vettore  $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ , mentre quelli centrali solamente dal modulo dello stesso, cioè  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , quindi sono un sottoinsieme di quelli radiali. In altre parole, se un campo è centrale, allora è sicuramente radiale. Se un campo è radiale, non è detto che sia centrale. Esempi di campi centrali (e quindi radiali) sono il campo gravitazionale generato da una massa puntiforme e il campo elettrostatico generato da una carica puntiforme. Un esempio di campo radiale ma non centrale è il campo elettrico generato da una carica puntiforme in moto rettilineo uniforme.

Nei campi centrali, oltre al momento angolare, si conserva l'energia dei corpi che si muovono al suo interno. **Se più campi centrali vengono sovrapposti** (come quando si hanno tante cariche fisse nello spazio, in posizioni casuali), il campo risultante non è più centrale, ma **l'energia si conserva lo stesso** perché la sovrapposizione di campi conservativi dà vita ad un campo conservativo. Purtroppo, non possiamo dire la stessa cosa per quanto riguarda il momento angolare. Il problema sta nel fatto che  $\vec{L}$  è una quantità vettoriale (mentre l'energia è scalare) e, inoltre, dipende dalla scelta di un polo. Nel caso in cui la sovrapposizione dei campi dia luogo ad un campo non radiale, è difficile individuare il polo giusto rispetto a cui calcolare  $\vec{L}$ . Comunque, nel caso fortunato in cui il campo risultante dalla sovrapposizione di tanti campi radiali/centrali è radiale/centrale, possiamo affermare che il momento angolare, calcolato rispetto al nuovo centro della forza, si conserva.

**Esempio 2.8 (Energia di un'orbita ellittica).** Consideriamo un'orbita ellittica di semiassi  $a$  e  $b$ , percorsa da un satellite di massa  $m$  in rivoluzione attorno ad un pianeta di massa  $M$ . Esprimi l'energia e il modulo del momento angolare del sistema in funzione dei parametri appena fornito.

Sfruttando le conservazioni dell'energia e del momento angolare tra l'apoapside e il periapside, possiamo scrivere

$$E = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GMm}{r_A} = \frac{1}{2}mv_P^2 - \frac{GMm}{r_P},$$

$$L = mr_A v_A = mr_P v_P \quad \longrightarrow \quad v_P = v_A \frac{r_A}{r_P},$$

dove  $r_A$  e  $r_P$  sono rispettivamente la massima e minima distanza dal corpo attrattore, tali che

$$r_A + r_P = 2a, \quad r_A - r_P = 2c.$$

Ricavando  $v_P$  dalla conservazione del momento angolare e sostituendola nella conservazione dell'energia, otteniamo

$$\frac{1}{2}mv_A^2 \left(1 - \frac{r_A^2}{r_P^2}\right) = GMm \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_P}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 = GMm \left(\frac{r_P - r_A}{r_A}\right) \frac{r_P}{r_P^2 - r_A^2}.$$

Avendo trovato un'espressione per l'energia cinetica all'apoapside, possiamo usarla per trovare l'energia meccanica totale

$$E = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GMm}{r_A} = \frac{GMm}{r_A} \left(\frac{r_P}{r_P + r_A} - 1\right) = -\frac{GMm}{2a},$$

che, ovviamente, è indipendente dal punto dell'ellisse in cui ci troviamo. Potete mostrare che il momento angolare vale

$$L = mb\sqrt{GM/a}.$$

**Esempio 2.9 (Energia di un'orbita ellittica in un potenziale armonico).** *Oltre i confini dell'universo, là dove la gravità non è ancora arrivata, un oggetto di massa  $m$  è attaccato ad una molla di costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo nulla. Si osserva che, se messo in movimento, l'oggetto si muove lungo un'orbita ellittica di semiassi  $a$  e  $b$ . Trova l'energia e il modulo del momento angolare rispetto al centro dell'ellisse in funzione dei parametri forniti precedentemente.*

Seguiamo la stessa e identica strategia che abbiamo usato nell'Esempio 2.8. Calcoliamo l'energia e il modulo del momento angolare nei punti di inversione. Essi sono quattro, ma sono analoghi a coppie. Ricordando che l'energia potenziale dovuta alla molla è  $\frac{1}{2}kr^2$ , otteniamo

$$\begin{cases} E = \frac{1}{2}mv_a^2 + \frac{1}{2}ka^2 = \frac{1}{2}mv_b^2 + \frac{1}{2}kb^2, \\ L = mav_a = mbv_b. \end{cases}$$

La seconda equazione implica  $v_b = \frac{a}{b}v_a$ , che, sostituita nella seconda uguaglianza della prima equazione, restituisce  $v_a^2 = \frac{k}{m}b^2$ . A questo punto, l'espressione per l'energia diventa

$$E = \frac{1}{2}mv_a^2 + \frac{1}{2}ka^2 = \frac{1}{2}k(a^2 + b^2).$$

Per quanto riguarda il momento angolare, otteniamo

$$L = mav_a = ma\sqrt{\frac{k}{m}b^2} = ab\sqrt{km}.$$

Trovate voi un modo per calcolare il periodo orbitale, la sua espressione in funzione dei parametri del problema vi stupirà!

## 2.4 Quantità speciali

Fino ad ora abbiamo analizzato le (non-)conservazioni di grandezze abbastanza note in fisica, come l'energia, la quantità di moto e il momento angolare. Altre quantità degne di nota, che non tratteremo, sono la portata (in fluidodinamica) e il quadrimpulso (in relatività). Esistono ulteriori grandezze che possono conservarsi, in aggiunta o in sostituzione a quelle già citate. In questa sezione analizzeremo tre esempi.

### 2.4.1 Vettore di Lenz

Solo per i moti in campi centrali del tipo  $\vec{F}(r) = -\frac{k}{r^2}\hat{r}$ , oltre al momento angolare calcolato rispetto all'origine  $\vec{L}$  e all'energia meccanica  $E$ , si conserva il cosiddetto *vettore di Laplace-Runge-Lenz*, noto anche come *vettore di Lenz*. Esso è definito come

$$\vec{A} \equiv \vec{p} \times \vec{L} - mk\hat{r},$$

dove  $m$  è la massa del corpo in movimento,  $\vec{p}$  è la sua quantità di moto e  $\vec{L}$  è il suo momento angolare, calcolato rispetto all'origine. Prenderemo per buono che questa quantità si conserva durante il moto orbitale<sup>4</sup>. È importante sapere che, per le orbite ellittiche, il vettore di Lenz è sempre diretto come l'asse maggiore ed è orientato dall'apoapside verso il periapside, indipendentemente dal senso di rivoluzione del corpo (Fig. 3).

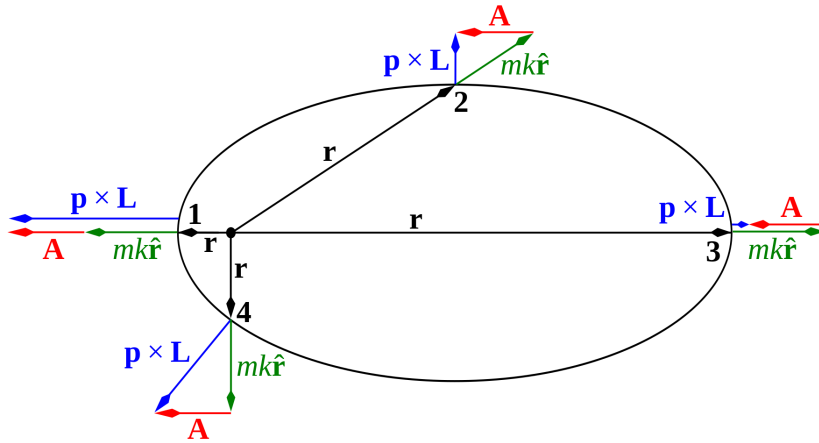


Figura 3: Orientazione del vettore di Lenz, calcolato in quattro punti diversi dell'orbita.

Vediamo due problemi risolvibili usando la conservazione del vettore di Lenz.

**Esempio 2.10 (Missile Balistico).** *Un missile balistico viene lanciato da un punto A della superficie terrestre, con una velocità iniziale  $\mathbf{v}_0$  (inferiore alla velocità di fuga) ad un angolo  $\alpha$  dall'orizzontale. Dopo aver percorso un arco di ellisse, il missile si schianta in un certo punto B, la cui posizione dipende dalle condizioni di lancio (Fig. 4). Trova i parametri dell'orbita ellittica in funzione di  $v_0$  e  $\alpha$  e la distanza tra punto di partenza e punto di arrivo sulla superficie terrestre.*

Per prima cosa calcoliamo l'energia del missile

$$E = -\frac{GMm}{2a} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R},$$

<sup>4</sup>Per dimostrare che  $\vec{A}$  è costante, basta calcolarne la derivata temporale e mostrare che è nulla. Potete trovare questa dimostrazione nelle dispense di Meccanica Celeste degli scorsi anni.

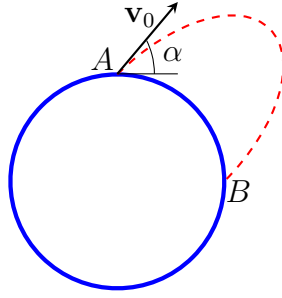


Figura 4: Schematizzazione della traiettoria ellittica di un missile balistico soggetto al campo gravitazionale della Terra.

dove  $m$  è la massa dello stesso e  $R$  è il raggio della Terra, da cui possiamo ricavare il semiasse maggiore dell'orbita

$$a = \frac{GMR}{2GM - v_0^2 R}.$$

Il modulo del momento angolare calcolato rispetto al centro della Terra vale

$$L = mRv_0 \cos \alpha.$$

Dunque, l'eccentricità dell'orbita vale

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2 M^2 m^3}} = \sqrt{1 + \frac{v_0^2 R}{GM} \left( \frac{v_0^2 R}{GM} - 2 \right) \cos^2 \alpha}.$$

Abbiamo trovato due parametri dell'orbita. Calcoliamo il vettore di Lenz all'istante iniziale, seguendo l'orientazione dei vettori in accordo con la Fig. 4:

$$\vec{A} = m\vec{v} \times \vec{L} - GMm \hat{r} = m^2 \left[ (Rv_0^2 \cos^2 \alpha - GM) \hat{r} + Rv_0^2 \cos \alpha \sin \alpha \hat{\theta} \right].$$

dove abbiamo usato  $\vec{p} = mv_0 (\sin \alpha \hat{r} - \cos \alpha \hat{\theta})$  e  $\vec{L} = -mRv_0 \cos \alpha \hat{z}$ . All'istante iniziale, l'angolo  $\beta$  tra il vettore di Lenz (orientato come l'asse maggiore) e il versore  $\hat{r}$  è la metà dell'angolo tra il punto di partenza e quello di arrivo. Calcoliamo  $\beta$  come

$$\tan \beta = -\frac{A_\theta}{A_r} = \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{\frac{GM}{v_0^2 R} - \cos^2 \alpha},$$

dunque la distanza percorsa sulla superficie terrestre è

$$d = 2R\beta = 2R \arctan \left( \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{\frac{GM}{v_0^2 R} - \cos^2 \alpha} \right).$$

**Esempio 2.11 (Ottimizzazione della velocità di lancio, Physics Cup 2012).** *Un missile viene lanciato dal polo Nord, con una velocità iniziale  $v_0$  e ad un certo angolo  $\alpha$  dal suolo, verso un punto situato ad una latitudine generica  $\phi$  ( $\phi = 0$  caratterizza l'equatore,  $\phi > 0$  un meridiano dell'emisfero boreale e  $\phi < 0$  un meridiano nell'emisfero australe). Come bisogna scegliere l'angolo di lancio  $\alpha$  affinché  $v_0$  sia più piccola possibile?*

Il problema può essere risolto in almeno due modi. Uno passa per il vettore di Lenz, mentre l'altro (più furbo) richiede prevalentemente considerazioni geometriche in stile

Olimpiadi della Matematica<sup>5</sup>. Noi useremo il primo approccio.

Dobbiamo legare l'orientazione dell'orbita (data dal vettore di Lenz) alla latitudine  $\phi$ . Possiamo riutilizzare alcune equazioni del problema precedente, essendo esso molto simile a questo. Ad esempio, il vettore di Lenz è identico, quindi anche l'angolo  $\beta$  sarà tale. Per rendere i conti più lisci, al posto di  $\beta$  conviene usare il suo complementare rispetto a  $\frac{\pi}{2}$ , che chiameremo  $\gamma$ . Esso vale

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \arctan \left( \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{\frac{GM}{v_0^2 R} - \cos^2 \alpha} \right) = \arctan \left( \frac{\frac{GM}{v_0^2 R} - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha} \right).$$

Come leghiamo  $\gamma$  a  $\phi$ ? Grazie alla Fig. 5 notiamo che la differenza tra la latitudine di partenza e  $\gamma$  è pari alla differenza tra quest'ultimo e la latitudine di arrivo.

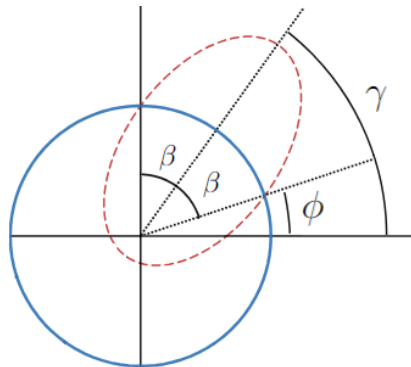


Figura 5: Schematizzazione della posizione degli angoli coinvolti nel problema.

Quindi

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \gamma = \gamma - \phi \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{\pi}{2} + \phi.$$

Segue che

$$\tan \frac{\pi}{2} + \phi = \frac{\frac{GM}{v_0^2 R} - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha}.$$

Tutto quello che ci manca è isolare  $v_0$  e minimizzare la sua espressione in funzione di  $\alpha$ ! Dopo qualche passaggio, otteniamo

$$\frac{Rv_0^2}{GM} = \frac{1}{\cos^2 \alpha + T \cos \alpha \sin \alpha},$$

dove abbiamo definito  $T \equiv \tan \frac{\pi}{2} + \phi$ . Derivando rispetto ad  $\alpha$  e imponendo l'uguaglianza a zero, si ottiene

$$\cos(2\alpha_m) = \pm \frac{1}{\sqrt{1+T^2}} = \cos \frac{\pi}{2} + \phi \quad \Rightarrow \quad \alpha_m = \frac{\pi}{2} + \phi,$$

dove abbiamo sfruttato l'identità trigonometrica  $\cos \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \theta}}$ .

<sup>5</sup>Qui <http://www.ipho2012.ee/physicscup/problem-no-1/solution/> potete trovare alcune soluzioni che usano il secondo approccio.

### 2.4.2 Due esempi molto particolari

**Esempio 2.12 (Moto di una particella carica nel campo di un monopol magnetico).** *Un ipotetico monopol magnetico puntiforme di carica magnetica  $q_m$ , fissato nell'origine, produce un campo magnetico pari a<sup>6</sup>*

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_m}{r^2} \hat{r}.$$

*Consideriamo una seconda particella, di massa  $m$  e carica elettrica  $q_e$ , che si muove nello spazio sotto l'effetto del campo generato dal monopol magnetico.*

1. *Siano  $\vec{r}$  e  $\vec{v}$  i vettori posizione e velocità della particella mobile in un certo istante di tempo. Quanto vale la forza che agisce su di essa? Quanto vale il momento torcente generato da questa forza rispetto all'origine?*
2. *Quali quantità note si conservano e quali non si conservano durante il moto della particella?*
3. *Dimostra che anche la grandezza vettoriale  $\vec{J} \equiv \vec{L} - \frac{\mu_0}{4\pi} q_e q_m \hat{r}$  si conserva durante il moto. Quanto vale il suo modulo?*
4. *Mostra che il risultato precedente implica la conservazione del modulo  $L$  del momento angolare, calcolato rispetto all'origine.*
5. *A partire dalla conservazione del vettore  $\vec{J}$ , trova la superficie geometrica sulla quale la particella è confinata a muoversi.*

1. La forza agente sulla particella è la forza di Lorentz:

$$\vec{F} = q_e \vec{v} \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_e q_m}{r^2} \vec{v} \times \hat{r}.$$

Il momento torcente relativo a questa forza vale:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_e q_m}{r^2} \vec{r} \times (\vec{v} \times \hat{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} q_e q_m \left( \frac{\vec{v}}{r} - \frac{v_r}{r^2} \vec{r} \right),$$

dove abbiamo sfruttato l'identità vettoriale  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$  e abbiamo definito la velocità radiale  $v_r \equiv \vec{v} \cdot \hat{r}$ , identificabile anche come  $v_r = \frac{dr}{dt}$ .

2. Essendo il momento torcente non nullo, il vettore momento angolare  $\vec{L}$  calcolato rispetto all'origine non si conserva. Inoltre, dato che il moto non è rettilineo uniforme, neanche il vettore quantità di moto si conserva. Però, dato che la forza è ortogonale alla velocità, si conserva l'energia cinetica della particella, quindi anche il modulo della sua quantità di moto.

---

<sup>6</sup>In questo caso potrebbe sembrare che il momento angolare calcolato rispetto all'origine si debba conservare perché il campo in questione è centrale. In effetti, il campo magnetico è centrale, ma la forza che esso genera (la forza di Lorentz) non lo è! In effetti, vedremo che il momento angolare non si conserva in questo caso! Ma ciò non è in contraddizione con ciò che abbiamo detto precedentemente. Ricordate: il momento angolare si conserva se il momento torcente è nullo; quest'ultimo è legato al campo di forze e non al campo *e basta*. Nei casi gravitazionale ed elettrostatico, il vettore forza è proporzionale (quindi parallelo) al vettore campo, dunque non c'è possibilità di sbagliare. Se, invece, ci sono campi magnetici, il campo di forze è, punto per punto, ortogonale al vettore campo magnetico.

3. Per mostrare che  $\vec{J}$  si conserva, calcoliamo la sua derivata temporale.

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} - \frac{\mu_0}{4\pi} q_e q_m \frac{d\hat{r}}{dt}.$$

La derivata del momento angolare è il momento torcente che abbiamo calcolato al punto 1. Resta da calcolare la derivata del versore radiale:

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt} r - \frac{dr}{dt} \vec{r}}{r^2} = \frac{\vec{v}}{r} - \frac{v_r}{r^2} \vec{r}.$$

Sostituendo sopra, otteniamo  $\frac{d\vec{J}}{dt} = 0$ . Quindi la quantità  $\vec{J}$  si conserva in direzione, verso e modulo!

4. Essendo  $\vec{L} \perp \hat{r}$ , il modulo di  $\vec{J}$  è ricavabile usando il teorema di Pitagora

$$J = \sqrt{L^2 + \left( \frac{\mu_0}{4\pi} q_e q_m \right)^2}.$$

Avendo già dimostrato che il modulo  $J$  è costante ed essendo la quantità  $\frac{\mu_0}{4\pi} q_e q_m$  anch'essa costante, la stessa proprietà vale per il modulo  $L$ . Il suo valore dipende esclusivamente dalle condizioni iniziali, che non sono state specificate nel testo.

5. Calcoliamo il prodotto scalare tra i vettori  $\vec{J}$  e  $\hat{r}$

$$\vec{J} \cdot \hat{r} = \vec{L} \cdot \hat{r} - \frac{\mu_0}{4\pi} q_e q_m \hat{r} \cdot \hat{r} = -\frac{\mu_0}{4\pi} q_e q_m.$$

Ma  $\vec{J} \cdot \hat{r} = J \cos \theta$ , quindi

$$\cos \theta = -\frac{\frac{\mu_0}{4\pi} q_e q_m}{J} = -\frac{\frac{\mu_0}{4\pi} q_e q_m}{\sqrt{L^2 + \left( \frac{\mu_0}{4\pi} q_e q_m \right)^2}}.$$

Essendo la quantità a destra una costante, lo stesso può dirsi per  $\theta$ . Il luogo geometrico dei punti con angolo  $\theta$  costante rispetto ad un dato vettore (in questo caso  $\vec{J}$ ) è una superficie conica. Possiamo quindi affermare che il moto della particella si svolge su un cono che ha per vertice l'origine e per asse il vettore  $\vec{J}$ .

**Esempio 2.13 (Moto di un dipolo elettrico in un campo magnetico, APhO 2001).** Agli estremi di una sbarretta isolante rigida, di lunghezza  $l$  e massa trascurabile, sono fissate due particelle di ugual massa  $m$  e cariche  $+q$  e  $-q$ , rispettivamente. Tutto lo spazio è permeato dal campo magnetico uniforme  $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ . Sia  $\vec{l}$  il vettore differenza tra i vettori posizione delle due particelle, orientato da quella con carica negativa a quella con carica positiva.

1. Siano  $\vec{v}_{\text{cm}}$  e  $\vec{\omega}$  i vettori velocità del centro di massa e velocità angolare di rotazione attorno ad un asse passante per lo stesso, in un certo istante di tempo. Quanto vale la forza che agisce sul sistema sbarretta+particelle? Quanto vale il momento torcente generato relativo questa forza e calcolato rispetto al centro di massa?
2. La forza agente sul centro di massa non è nulla, quindi la quantità di moto del dipolo non si conserva. Trova un'altra quantità  $\vec{Q}$ , simile alla quantità di moto, che si conserva.

3. Mostra che la quantità  $\vec{K} = (\vec{r}_{\text{cm}} \times \vec{Q} + I_{\text{cm}}\vec{\omega}) \cdot \vec{B}$  è una costante del moto, dove  $\vec{r}_{\text{cm}}$  è il vettore posizione del centro di massa e  $I_{\text{cm}} = \frac{1}{2}ml^2$  è il momento di inerzia del sistema calcolato rispetto al centro di massa.

1. La forza agente sul sistema vale

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = q(\vec{v}_1 \times \vec{B}) - q(\vec{v}_2 \times \vec{B}) = q(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \times \vec{B} = q \frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{B},$$

dove il pedice 1 è relativo alla carica positiva e il 2 a quella negativa. Il contributo complessivo dovuto all'interazione elettrica tra le due cariche è ovviamente nullo per il principio di azione e reazione, quindi non lo abbiamo considerato neanche in partenza. Il momento torcente rispetto al centro di massa vale

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{l}}{2} \times \vec{F}_+ - \frac{\vec{l}}{2} \times \vec{F}_- = \frac{q}{2} \vec{l} \times [(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \times \vec{B}] = q \vec{l} \times [\vec{v}_{\text{cm}} \times \vec{B}].$$

Notiamo che sia la forza che il momento torcente non sono nulli in generale, quindi sia la quantità di moto che il momento angolare non si conservano in questo problema.

2. Dall'espressione per la forza trovata al punto precedente, otteniamo

$$2m \frac{d\vec{v}_{\text{cm}}}{dt} = q \frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{B},$$

che implica

$$\frac{d}{dt} (2m\vec{v}_{\text{cm}} - q\vec{l} \times \vec{B}) = 0.$$

Allora la quantità

$$\vec{Q} \equiv 2m\vec{v}_{\text{cm}} - q\vec{l} \times \vec{B}$$

è una costante del moto. Facciamo una cosa analoga anche per la seconda equazione cardinale, servirà per il punto successivo.

$$I_{\text{cm}} \frac{d\vec{\omega}}{dt} = q \vec{l} \times [\vec{v}_{\text{cm}} \times \vec{B}].$$

3. La tecnica è sempre la stessa: calcoliamo la derivata temporale di  $\vec{K}$  e mostriamo che è nulla. Iniziamo dal primo pezzo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [(\vec{r}_{\text{cm}} \times \vec{Q}) \cdot \vec{B}] &= (\vec{v}_{\text{cm}} \times \vec{Q}) \cdot \vec{B} = -q [\vec{v}_{\text{cm}} \times (\vec{l} \times \vec{B})] \cdot \vec{B} \\ &= -q [\vec{l} \times (\vec{v}_{\text{cm}} \times \vec{B})] \cdot \vec{B} = -I_{\text{cm}} \frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \vec{B}, \end{aligned}$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo usato la relazione trovata alla fine del punto precedente. D'altro canto, la derivata temporale del secondo pezzo vale  $I_{\text{cm}} \frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \vec{B}$ , quindi abbiamo dimostrato che  $\vec{K}$  è una costante del moto.

### 3 Il controllo dei casi limite

Supponiamo di aver trovato la soluzione ad un problema in cui si generalizza un risultato che già conosciamo. Come facciamo ad essere sicuri che la nostra soluzione non sia sbagliata? O meglio, come possiamo andare alla ricerca di eventuali errori che abbiamo commesso? Basta controllare i casi limite! Analizziamo un po' di esempi. Per molti di questi esempi, il risultato del problema viene *calato dal cielo* perché l'obiettivo di questa sezione non è imparare a risolvere i problemi, ma è controllare il risultato. Provate voi a risolverli da capo!

**Esempio 3.1 (Discesa lungo un piano inclinato mobile).** *Un blocco di massa  $m$  si trova fermo su un piano inclinato di massa  $M$ , il quale è libero di muoversi sul pavimento. Sia  $\theta$  l'angolo alla base del piano inclinato, raffigurato in Fig. 6. Nel sistema non è presente alcuna forma di attrito. Quanto vale l'accelerazione del piano nel momento in cui il blocco viene rilasciato?*

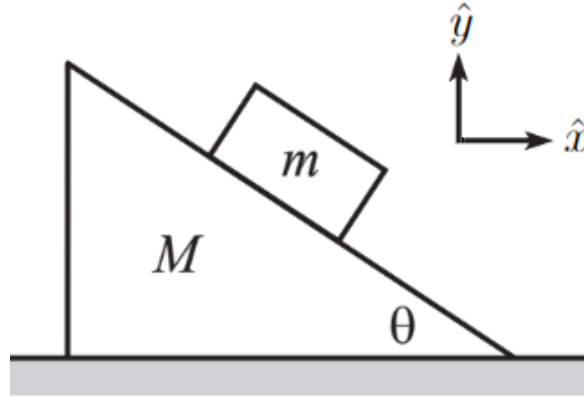


Figura 6: Blocco appoggiato su un piano inclinato libero di muoversi sul piano orizzontale.

Sia  $N$  il modulo della forza normale tra il blocco e il piano. Se il piano inclinato fosse fissato al terreno si avrebbe  $N = mg \cos \theta$ , ma non è questo il caso. Grazie ai diagrammi di corpo libero del blocco e del piano inclinato, possiamo scrivere che

$$ma_x = N \sin \theta, \quad (2)$$

$$ma_y = N \cos \theta - mg, \quad (3)$$

$$MA_x = -N \sin \theta. \quad (4)$$

Notiamo che la (1) e la (3) implicano la conservazione della quantità di moto del sistema lungo il piano orizzontale:

$$\frac{dp}{dt} = ma_x + MA_x = 0.$$

Invece, la quantità di moto lungo la direzione verticale non si conserva a causa dell'azione della forza di gravità sul blocco. Di fatto, il centro di massa del sistema si abbassa continuamente!

Abbiamo 3 equazioni e 4 incognite ( $a_x$ ,  $a_y$ ,  $A_x$ ,  $N$ ), quindi ci serve un'ultima equazione. Essa viene fuori dalla condizione di contatto tra il blocco e il piano: la distanza orizzontale tra la posizione istantanea del blocco e il suo punto di partenza è  $\Delta x = \frac{1}{2}(a_x - A_x)t^2$ , mentre la distanza verticale è  $\Delta y = \frac{1}{2}a_y t^2$ . Per far sì che il blocco rimanga appoggiato

sul piano, il rapporto di queste distanze deve essere uguale a  $\tan \theta$  (cambiato di segno) istante per istante. Pertanto, dobbiamo avere

$$\tan \theta = -\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{a_y}{a_x - A_x}.$$

A questo punto possiamo risolvere il sistema per  $a_x$ ,  $a_y$  e  $A_x$  e sostituire nell'equazione precedente, la quale restituisce

$$-\frac{\frac{N}{m} \cos \theta - g}{\frac{N}{m} \sin \theta + \frac{N}{M} \sin \theta} = \tan \theta \implies N = \frac{g}{\frac{M+m}{Mm} \sin \theta \tan \theta + \frac{\cos \theta}{m}}.$$

A questo punto, sostituendo nella (3) otteniamo

$$A_x = -\frac{N \sin \theta}{M} = -\frac{mg \sin \theta \cos \theta}{M + m \sin^2 \theta}.$$

Controlliamo i casi limite. Il modulo della forza normale si riduce al risultato noto  $N = mg \cos \theta$  nel limite  $M \rightarrow \infty$ ! Nello stesso limite, l'accelerazione del piano inclinato tende a zero (esso è praticamente fisso), mentre per  $M \rightarrow 0$ , si ha  $A_x = -g \cot \theta$ . Quest'ultimo limite ha senso, perché il blocco è praticamente in caduta libera ( $a_y = -g$  e  $a_x = 0$ ), quindi il piano inclinato viene spostato verso sinistra con accelerazione data dalla condizione di contatto

$$\tan \theta = -\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{a_y}{a_x - A_x} = -\frac{g}{A_x} \implies A_x = -g \cot \theta.$$

**Esempio 3.2 (Macchina di Atwood con filo massivo).** Una macchina di Atwood è composta da una puleggia di dimensioni trascurabili e da due blocchi di masse  $m_1$  e  $m_2$ , connessi da un cavo omogeneo di lunghezza  $2l$  e massa  $M$ . Inizialmente i blocchi sono alla stessa quota, poi vengono rilasciati. Trova la funzione  $y(t)$  che descrive l'evoluzione temporale del sistema fino a quando il corpo più leggero urta la puleggia.

Partendo dalla conservazione dell'energia meccanica e risolvendo un'equazione differenziale a variabili separabili, si ottiene

$$y(t) = \frac{l(m_1 - m_2)}{M} \left[ \cosh \left( \sqrt{\frac{Mg}{l(M + m_1 + m_2)}} t \right) - 1 \right].$$

Notiamo subito che per  $t = 0$  troviamo giustamente  $y = 0$ . Cos'altro controlliamo? Intanto, per  $m_1 = m_2$  la soluzione è identicamente nulla. Questo ha senso, perché il sistema è perfettamente simmetrico e non inizierà mai a muoversi. Poi, ci conviene controllare che il limite per  $M \rightarrow 0$  restituisca il caso noto. Questo limite porta alla forma indeterminata  $0/0$ , quindi possiamo usare de l'Hopital oppure possiamo espandere il  $\cosh$  in serie di MacLaurin:

$$\cosh(x) \approx 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

A questo punto, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} y(t) &\approx \frac{l(m_1 - m_2)}{M} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{Mg}{l(M + m_1 + m_2)}} t \right)^2 + \dots - 1 \right] \\ &\approx \frac{1}{2} \frac{m_1 - m_2}{M + m_1 + m_2} g t^2. \end{aligned}$$

Adesso possiamo far tendere  $M \rightarrow 0$ , trovando

$$y(t) \longrightarrow \frac{1}{2} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g t^2.$$

che è proprio il risultato noto!

**Esempio 3.3 (Dilatazione termica di una lastra riscaldata).** *Consideriamo una lastra omogenea di lati  $a$  e  $b$ , spessore trascurabile, capacità termica  $C$ , coefficiente di dilatazione termica  $\lambda$  e temperatura  $T_L$ . Essa viene improvvisamente posta in un forno di temperatura  $T_F$ . Trova la funzione  $T(t)$  che descrive l'evoluzione temporale della temperatura della lastra.*

Dal bilancio dell'energia termica, segue che

$$\frac{dE}{dt} = C \frac{dT}{dt} = 2\alpha ab (1 + \lambda(T - T_L))^2 (T_F - T),$$

dove  $\alpha$  è una costante del sistema<sup>7</sup>. Quest'equazione differenziale è risolvibile col metodo dei fratti semplici, ma possiamo semplificarla ricordando che  $\lambda$  è generalmente molto piccolo. Segue che

$$C \frac{dT}{dt} \approx 2\alpha ab (1 + 2\lambda(T - T_L)) (T_F - T).$$

Quest'ultima equazione è comunque risolvibile usando la scomposizione in fratti semplici. La soluzione è

$$T(t) = \frac{(2\lambda T_L - 1)(T_F - T_L) + T_F e^{\frac{(1+2\lambda(T_F-T_L))\alpha ab}{C}t}}{2\lambda(T_F - T_L) + e^{\frac{(1+2\lambda(T_F-T_L))\alpha ab}{C}t}}.$$

I casi limite da controllare sono  $t = 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ ,  $T_F = T_L$  e  $\lambda \rightarrow 0$ . Essi restituiscono, rispettivamente,  $T(t = 0) = T_L$ ,  $T(t \rightarrow \infty) = T_F$ ,  $T(t) = T_F = T_L$  e  $T(t) = T_F + (T_L - T_F)e^{-\frac{\alpha ab}{C}t}$ . Tutto torna! Un'altra cosa che potremmo controllare è che, nel caso  $T_F > T_L$ , il grafico della funzione appena trovata stia sopra al grafico della stessa funzione nel limite  $\lambda \rightarrow 0$ . Questo è fisicamente sensato perché per  $\lambda \neq 0$  l'area della lastra inizia a crescere sin da subito, quindi raccoglie più calore e si riscalda un po' più in fretta. Viceversa, se la lastra viene raffreddata ( $T_F < T_L$ ), allora è il grafico della funzione  $T(t)$  con  $\lambda = 0$  a stare sopra al grafico della funzione  $T(t)$  con  $\lambda \neq 0$ .

**Esempio 3.4 (Legge di Torricelli per buchi di grandezza generica).** Uno degli esercizi più famosi in fluidodinamica è quello dello svuotamento di un secchio cilindrico contenente del liquido, causato dalla presenza di un foro sul fondo. Nel caso in cui le dimensioni del foro siano trascurabili rispetto alla sezione del secchio, possiamo usare la

---

<sup>7</sup>Quest'equazione viene fuori dalla relazione empirica

$$P \propto S \Delta T,$$

dove  $P$  è la quantità di calore scambiato nell'unità di tempo,  $S$  è la superficie dell'oggetto e  $\Delta T$  è la differenza di temperatura tra l'oggetto e l'ambiente. Nel nostro caso,  $S = 2ab$  cambia nel tempo a causa della dilatazione termica! Quindi ci aspettiamo che il processo sia leggermente più veloce di quello che coinvolge una lastra identica ma caratterizzata da  $\lambda = 0$ !

Altra cosa: in questo problema stiamo supponendo che la capacità termica della lastra rimanga costante durante il processo. In realtà, essa verrebbe influenzata dalla dilatazione termica... ma dimentichiamocene.

legge di Torricelli. Per fori di grandezza generica, invece, non possiamo usare Torricelli perché non valgono più le ipotesi di validità del teorema di Bernoulli. In particolare, viene meno l'ipotesi di stazionarietà del fluido! Quindi bisogna ingegnarsi per trovare una soluzione che usi altri strumenti. Nella lezione di Fluidodinamica dello Stage 2023 abbiamo dimostrato che, per un secchio cilindrico di area di base  $A$  con un foro di area  $a$  sul fondo, la generalizzazione della legge di Torricelli è

$$V(h) = \sqrt{2gh_0} \sqrt{\frac{h}{h_0} \frac{1 - (h/h_0)^{\frac{1-2r}{r}}}{1 - 2r}} \quad (0 \leq h \leq h_0),$$

dove  $r \equiv (a/A)^2$ ,  $h$  è la quota istantanea del pelo dell'acqua e  $h_0$  è la quota iniziale dello stesso. Nei casi limite  $r = 0$  e  $r = 1$ , essa si riduce rispettivamente a

$$V(h, r = 0) = \sqrt{2gh}, \quad V(h, r = 1) = \sqrt{2g(h_0 - h)}.$$

Per  $r = 0$  otteniamo la legge di Torricelli per buchi piccoli! Nel caso  $r = 1$  (cioè il caso in cui il foro di uscita è grande quanto l'intera base del recipiente cilindrico) ritroviamo il risultato dato dalla caduta libera! Tutto torna!

**Esempio 3.5 (Paradosso del satellite).** *Un satellite di massa  $m$  si muove inizialmente su un'orbita circolare di raggio  $R_0$  attorno ad un corpo celeste puntiforme, di massa  $M \gg m$ . Il satellite è soggetto alla forza d'attrito  $\vec{F}_a = -Av^\alpha \vec{v}$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Supponendo che la forza di attrito sia sufficientemente piccola in modo da poter approssimare l'orbita come istantaneamente circolare, trova la funzione  $r(t)$  che descrive l'evoluzione temporale della distanza tra il satellite e il pianeta<sup>8</sup>. Per quali valori di  $\alpha$  il satellite riesce a raggiungere il pianeta? Dopo quanto tempo ciò succede?*

Il bilancio energetico del sistema si scrive

$$\frac{dE}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F}_a = -Av^{\alpha+2}.$$

L'energia meccanica del sistema è

$$E = -\frac{GMm}{2r(t)},$$

quindi possiamo scrivere

$$\frac{GMm}{2r^2(t)} \frac{dr}{dt} = -Av^{\alpha+2}.$$

Sfruttiamo l'approssimazione suggerita nel testo: se l'orbita è istantaneamente circolare, la velocità radiale è approssimativamente nulla, mentre la velocità orbitale vale  $v = \sqrt{GM/r}$ . Sostituendo nell'equazione del bilancio energetico, otteniamo un'equazione differenziale a variabili separabili

$$r^{\frac{\alpha-2}{2}} \frac{dr}{dt} = -\frac{2A}{m} (GM)^{\frac{\alpha}{2}},$$

---

<sup>8</sup>Questo problema è l'analogo meccanico del problema del breakdown dell'atomo di Rutherford (Problema 10 della qualifica della prima Gara a Squadre di Fisica, discusso anche nelle dispense di Miscellanea dello Stage 2022). L'unica differenza è che qui l'energia viene dissipata per l'attrito, mentre il collasso atomico avverrebbe a causa dell'emissione di radiazione da carica accelerata.

la cui soluzione è

$$r(t) = \begin{cases} R_0 e^{-\frac{2A}{m}t} & \alpha = 0, \\ R_0 \left[ 1 - \frac{\alpha A}{m} \left( \frac{GM}{R_0} \right)^{\frac{\alpha}{2}} t \right]^{\frac{2}{\alpha}} & \alpha \neq 0. \end{cases}$$

Intanto, per  $t = 0$  otteniamo  $r = R_0$  in entrambi i casi. In aggiunta, notiamo che per ogni valore di  $\alpha$  la soluzione  $r(t)$  è una funzione monotona decrescente. Questo ha molto senso, perché l'attrito tende sempre a far rimpicciolire l'orbita. In generale, orbite più piccole corrispondono a sistemi più legati, quindi ad energie piccole (negative). E la forza di attrito cosa fa? Riduce l'energia del sistema! Tutto torna!

Nel caso  $\alpha = 0$ , il satellite raggiunge il pianeta dopo un tempo infinito. Nel caso  $\alpha \neq 0$ , la quantità tra le parentesi quadre può annullarsi dopo un tempo finito solo se  $\alpha > 0$ . In questo caso, l'esponente  $2/\alpha$  è positivo e garantisce che  $r$  si annulli. Il tempo richiesto per raggiungere  $r = 0$  è

$$t_{fall} = \frac{m}{\alpha A} \left( \frac{R_0}{GM} \right)^{\frac{\alpha}{2}} = \frac{m}{\alpha A v_0^\alpha},$$

dove  $v_0$  è la velocità orbitale iniziale. Per  $\alpha < 0$ , invece, si ha semplicemente che  $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0$ . Nota: la soluzione nel caso  $\alpha = 0$  può essere ottenuta a partire da quella con  $\alpha \neq 0$  sfruttando il limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e.$$

Infatti,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_0 \left[ 1 - \frac{\alpha A}{m} \left( \frac{GM}{R_0} \right)^{\frac{\alpha}{2}} t \right]^{\frac{2}{\alpha}} = R_0 \left\{ \lim_{\alpha^{-1} \rightarrow \infty} \left[ 1 - \frac{A v_0^\alpha}{m \alpha^{-1}} t \right]^{\alpha^{-1}} \right\}^2 = R_0 e^{-\frac{2A}{m}t}.$$

La soluzione per  $\alpha = 0$  è l'unica che non dipende dalla massa del pianeta!

Manca da capire a cosa è dovuto il titolo di questo problema. Dove sta il paradosso? Abbiamo detto che  $r(t)$  è una funzione decrescente, quindi la velocità  $v(t) = \sqrt{GM/r(t)}$  è una funzione crescente! Come è possibile che la velocità cresca se c'è attrito? In realtà è possibilissimo, perché la forza di attrito non è l'unica forza in gioco. Bisogna tener conto della forza gravitazionale! Inoltre, ricordiamoci che le forze dissipative fanno sicuramente diminuire l'energia meccanica del sistema (come in questo caso), ma non è detto che facciano diminuire l'energia cinetica. La fanno diminuire solo se sono le uniche forze in gioco a compiere lavoro<sup>9</sup>! Quindi, in realtà, questo non è un paradosso.

Se volete esercitarvi ad impostare e a svolgere integrali, provate a calcolare quanti giri compie il satellite e quanto spazio percorre prima di cadere sul pianeta. Se ci sono problemi di divergenza in  $r = 0$ , provate a dare un raggio non nullo al pianeta ( $0 < R_p < R_0$ ). Per lo spazio percorso, serve sapere come si calcola la lunghezza di una curva in coordinate polari. Infine, provate a trovare la traiettoria  $r(\theta)$  del satellite.

<sup>9</sup>In questo problema potrebbe sembrare che la forza gravitazionale non compia lavoro perché, essendo il satellite sempre su orbite circolari, lo spostamento è sempre tangenziale e mai radiale. In realtà, nonostante questa approssimazione, stiamo comunque assumendo che la gravità compia lavoro perché prendiamo per vera la relazione  $v(t) = \sqrt{GM/r(t)}$  in ogni istante. Seppur lentamente, il satellite si avvicina al pianeta, quindi la forza gravitazionale compie lavoro.

**Esempio 3.6 (Tempo di free fall).** *Un corpo viene lanciato con una velocità  $v_0$  in direzione di un pianeta di massa  $M$ , partendo da una distanza  $R_0$  dal centro del pianeta. Se  $v_0 < \frac{2GM}{R_0}$ , dopo quanto tempo la distanza tra il corpo e il centro del pianeta vale  $r < R_0$ ?*

Questo problema può essere risolto in almeno due modi. Uno richiede l'integrazione di un'equazione differenziale ricavabile dalla conservazione dell'energia, mentre l'altro sfrutta l'equazione di Keplero<sup>10</sup>, uno strumento molto potente per chi si occupa di meccanica celeste. Il risultato è

$$t = \frac{1}{\sqrt{2GM}} \left( \frac{R_0}{1 - \alpha R_0} \right)^{\frac{3}{2}} \left[ \arcsin \sqrt{1 - \alpha R_0} - \arcsin \sqrt{\frac{r}{R_0}(1 - \alpha R_0)} + \sqrt{\frac{r}{R_0}(1 - \alpha R_0)} \sqrt{1 - \frac{r}{R_0}(1 - \alpha R_0)} - \sqrt{\alpha R_0} \sqrt{1 - \alpha R_0} \right],$$

con  $\alpha \equiv \frac{v_0^2}{2GM}$ . Che limiti andiamo a controllare? Intanto, per  $r = R_0$  otteniamo  $t = 0$ , perché ci troviamo già nel punto di arrivo. Controlliamo anche il limite in cui contemporaneamente  $r = 0$  (il corpo cade nell'origine) e  $\alpha = 0$  (la velocità iniziale è nulla). Otteniamo

$$t = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{R_0^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM}}.$$

Ci torna? A me sì, perché conosco già questo risultato. Proviamo a ricavarlo in un modo molto furbo. Il trucco sta nel pensare la traiettoria rettilinea del corpo come fosse un'ellisse molto eccentrica. Basterebbe già questo per procedere ma se non siete matematicamente convinti che questo si possa fare, lo sarete a breve. Consideriamo l'equazione dell'ellisse in coordinate polari

$$r(\theta) = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 - \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)},$$

per la quale l'origine degli assi rappresenta uno dei due fuochi. *Ellisse molto eccentrica* significa far tendere  $\varepsilon \rightarrow 1$ . Calcoliamo questo limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 1} r(\theta) = \begin{cases} 0 & \theta \neq \theta_0, \\ 2a & \theta = \theta_0. \end{cases}$$

Ecco il nostro segmento<sup>11</sup>! Nel nostro caso, possiamo considerare  $\theta_0 = 0$  senza perdita di generalità. Quindi, abbiamo appena scoperto che l'asse maggiore  $2a$  della nostra

<sup>10</sup>Da non confondersi con le *leggi di Keplero*. In realtà, l'equazione di Keplero è la versione più generale della terza legge di Keplero.

<sup>11</sup>Ma porca puttana! Non ci avevano insegnato che per  $\varepsilon = 1$  la traiettoria è una parabola? Perché qui viene fuori che è un segmento? In realtà, la contraddizione è solo apparente. Entrambe le traiettorie si ottengono nel limite  $\varepsilon \rightarrow 1$ , ma le due funzioni di partenza su cui viene calcolato il limite sono diverse. La parabola si ottiene a partire da

$$r(\theta) = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)},$$

mentre il segmento si ottiene dalla funzione scritta sopra. Entrambe rappresentano delle coniche, ma in una il limite è calcolato tenendo fisso il semiasse maggiore  $a$ , mentre nell'altro caso è il semilato retto  $p = a(1 - \varepsilon^2)$  ad essere tenuto fisso.

ellisse molto eccentrica è pari alla distanza iniziale  $R_0$ . Non ci rimane che applicare la terza legge di Keplero per le orbite ellittiche:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM} = \frac{\pi^2 R_0^3}{2GM} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\pi R_0^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2GM}}.$$

Questo è l'intero periodo dell'orbita, ma a noi interessa solo la metà di questo valore (solo l'andata). Quindi

$$t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{R_0^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM}}.$$

Tutto torna!

### 3.1 Scartare soluzioni non fisiche

Ogni tanto capita di risolvere un'equazione di secondo grado (o di grado più alto) e di trovarsi in mano due soluzioni. Come facciamo a capire quale delle due è quella giusta? A volte basta scartare quella negativa, ma può succedere che siano entrambe positive. Cosa facciamo? Controlliamo un caso limite! In questi casi, il controllo dei casi limite smette di essere una tecnica di diagnostica e diventa una vera e propria tecnica di problem solving! Vediamo due esempi.

**Esempio 3.7 (Volume di un gas reale).** *Il gas di van der Waals è un modello di gas che soddisfa la seguente equazione di stato*

$$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - bn) = nRT,$$

dove  $P$  è la pressione del gas,  $V$  il suo volume,  $n$  il numero di moli,  $T$  la temperatura,  $R$  la costante universale dei gas e  $a$  e  $b$  sono due costanti positive. Tipicamente,  $a$  e  $b$  hanno valori piccoli rispetto alle altre grandezze in gioco (ad esempio, rispettivamente,  $a \frac{PV^2}{n^2}$  e  $\frac{V}{n}$ ), così da rendere trascurabili tutti i termini quadratici del tipo  $a^2$ ,  $b^2$  o  $ab$ . In questa approssimazione, esprimi  $V$  in funzione di  $n$ ,  $T$ ,  $P$ ,  $a$  e  $b$ .

Espandendo il prodotto al primo membro dell'equazione di stato di van der Waals, trascurando il termine in  $ab$  e moltiplicando entrambi i membri per il volume  $V$ , si ottiene

$$PV^2 - n(bP + RT)V + an^2 = 0.$$

Questa è un'equazione di secondo grado in  $V$ , le cui soluzioni sono

$$V_{\pm} = \frac{n}{2P} \left( bP + RT \pm RT \sqrt{1 + \frac{2bP}{RT} + \frac{b^2 P^2}{R^2 T^2} - \frac{4Pa}{R^2 T^2}} \right).$$

Quale scartiamo? Possiamo subito osservare che per  $a = b = 0$  si ottiene

$$V_{\pm} = \frac{nRT}{2P} (1 \pm 1) = \begin{cases} \frac{nRT}{P}, \\ 0. \end{cases}$$

La soluzione col “+” restituisce il limite di gas perfetto, mentre l'altra restituisce zero. Quindi scartiamo la soluzione caratterizzata dal segno “-”. A questo punto, lo scopo

didattico dell'esempio è raggiunto, ma portiamo a termine il problema per completezza. Sviluppiamo in serie di McLaurin sfruttando la relazione  $(1+x)^k \approx 1+kx$ :

$$V \approx \frac{n}{2P} \left[ bP + RT + RT \left( 1 + \frac{bP}{RT} + \frac{b^2 P^2}{2R^2 T^2} - \frac{2Pa}{R^2 T^2} \right) \right],$$

in cui possiamo eliminare il termine in  $b^2$  per ipotesi. Dopo queste approssimazioni, la soluzione diventa

$$V \approx n \left( b + \frac{RT}{P} - \frac{a}{RT} \right).$$

**Esempio 3.8 (Legge di Jurin per una cannuccia a forma di tronco di cono).**

*Il fenomeno della capillarità si verifica, ad esempio, quando una cannuccia cilindrica di raggio abbastanza piccolo viene messa a contatto con una superficie d'acqua. A causa della tensione superficiale, il livello dell'acqua all'interno della cannuccia diventa leggermente più alto del livello della superficie d'acqua. Questa differenza di quota può essere stimata attraverso la legge di Jurin*

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g r_0},$$

dove  $\gamma$  tiene conto della tensione superficiale,  $\theta$  è l'angolo di contatto tra l'acqua e la superficie interna della cannuccia,  $\rho$  è la densità dell'acqua e  $r_0$  è il raggio della cannuccia. Questo vale per una cannuccia cilindrica, in cui  $r_0$  è costante. Consideriamo adesso una cannuccia a forma di tronco di cono, con un raggio descritto, fino ad una certa altezza, dalla funzione  $r(z) = r_0 - \lambda z$ , dove  $z$  è la quota al di sopra della superficie d'acqua e  $\lambda$  è una costante positiva. Come viene modificata la legge di Jurin per questo tipo di cannuccia?

Sostituendo la forma funzionale del raggio all'interno della legge di Jurin, otteniamo

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g (r_0 - \lambda h)},$$

che diventa

$$\lambda h^2 - h r_0 + \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g} = 0.$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado, otteniamo

$$h = \frac{r_0}{2\lambda} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{8\lambda\gamma \cos \theta}{\rho g}} \right].$$

Le due soluzioni sono entrambe positive. Quale scegliamo? Calcoliamo il limite per  $\lambda \rightarrow 0$  e vediamo quale delle due restituisce la legge di Jurin originaria per cannuccie cilindriche.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} h = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{r_0}{2\lambda} \left[ 1 \pm \left( 1 - \frac{4\lambda\gamma \cos \theta}{\rho g} \right) \right] = \begin{cases} \infty, \\ \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g r_0}. \end{cases}$$

La soluzione col “-” è quella giusta, l'altra non ha significato fisico. Quindi, la legge di Jurin per cannuccie a forma di tronco di cono è

$$h = \frac{r_0}{2\lambda} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{8\lambda\gamma \cos \theta}{\rho g}} \right].$$

## 4 L'analisi dimensionale

L'analisi dimensionale è uno strumento che può venire in nostro aiuto quando non abbiamo altre idee per risolvere un problema, oppure quando vogliamo controllare la validità di un risultato che abbiamo trovato. Quindi, in base all'uso che ne facciamo, può essere una **tecnica di problem solving** oppure uno **strumento di diagnostica**. Vediamo un esempio per capire di cosa si tratta.

**Esempio 4.1 (Velocità delle onde su una corda tesa).** *Una corda omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $l$  è sottoposta alla tensione  $\tau$ . Quanto vale la velocità di propagazione delle onde trasversali sulla corda?*

Impostiamo una generica relazione di proporzionalità tra la quantità che vogliamo trovare e le altre grandezze fisiche del sistema:

$$v = l^\alpha m^\beta \tau^\gamma.$$

L'obiettivo è trovare il valore degli esponenti  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ <sup>12</sup>. Traduciamo quest'equazione a livello dimensionale, ricordando che le dimensioni della tensione sono  $[\tau] = \frac{[M][L]}{[T]^2}$ :

$$\frac{[L]}{[T]} = [L]^\alpha [M]^\beta \left( \frac{[M][L]}{[T]^2} \right)^\gamma.$$

C'è bisogno che le dimensioni di ciò che sta a sinistra siano uguali alle dimensioni di ciò che sta a destra<sup>13</sup>. Quindi, otteniamo le seguenti condizioni (una per ogni grandezza fondamentale coinvolta):

$$\begin{cases} 1 = \alpha + \gamma, & \text{(Lunghezza)} \\ -1 = -2\gamma, & \text{(Tempo)} \\ 0 = \beta + \gamma, & \text{(Massa)} \end{cases}$$

La soluzione di questo sistema è  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = -\frac{1}{2}$  e  $\gamma = \frac{1}{2}$ , quindi otteniamo

$$v = \sqrt{\frac{\tau l}{m}}.$$

Questo problema può essere risolto in modi standard, e la soluzione che si trova è identica! Casualmente, abbiamo trovato la relazione *esatta*! Il coefficiente adimensionale è proprio 1.

Ecco alcune cose da sapere sull'analisi dimensionale, intesa come strumento di problem solving.

1. **Quando usarla.** Solitamente, l'uso dell'analisi dimensionale è praticamente suggerito quando ci viene chiesto di trovare una *grandezza caratteristica* del sistema, come una lunghezza caratteristica o un tempo caratteristico, oppure quando ci viene chiesto di capire come una certa grandezza scala al variare di un'altra. A volte, però, non ci viene detto nulla e dobbiamo invocarla da soli.

---

<sup>12</sup>Ovviamente, in questo modo non è possibile tener conto del coefficiente adimensionale che sta al secondo membro. In altre parole,  $v = l^\alpha m^\beta \tau^\gamma$ ,  $v = 2\pi l^\alpha m^\beta \tau^\gamma$ ,  $v = 32749 l^\alpha m^\beta \tau^\gamma$  e  $v = 10^{-7} l^\alpha m^\beta \tau^\gamma$  portano tutte allo stesso risultato in termini di  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . Quale coefficiente adimensionale è quello giusto? Boh! Con l'analisi dimensionale non si può stabilire, serve risolvere il problema in un altro modo.

<sup>13</sup>Per la solita storia che non si possono mischiare mele e pere.

2. **Limiti di applicabilità.** Questa tecnica di problem solving dà risultati più o meno sensati solo se la grandezza che vogliamo trovare è esprimibile come prodotto di potenze delle altre grandezze fisiche - e delle costanti fisiche - del sistema. Se, invece, la grandezza è somma di due o più contributi oppure coinvolge funzioni trascendenti, l'analisi dimensionale non dà risultati<sup>14</sup>.

Inoltre, ci sono molti casi in cui il sistema da risolvere (per trovare gli esponenti relativi ad ogni grandezza) ha infinite soluzioni a causa della presenza di incognite libere. In altre parole, ci sono più incognite che equazioni utili. Quindi non si può procedere.

3. **Contro.** Tramite l'analisi dimensionale non è possibile trovare il coefficiente adimensionale che moltiplica la combinazione giusta di grandezze fisiche e costanti. Nell'esempio soprastante siamo stati molto fortunati, ma questa cosa capita l'1% delle volte. Generalmente, possiamo ritenerci fortunati se l'ordine di grandezza del coefficiente adimensionale ricade nelle unità. Capita, però, che esso differisca dall'unità di tanti ordini di grandezza (come nell'Esempio 5.2).

L'altro uso dell'analisi dimensionale (utile per qualsiasi problema) è il **check della validità di una soluzione** (o di un risultato intermedio) che abbiamo appena trovato. Ad esempio, supponiamo che il problema ci chieda di trovare il lavoro fatto da alcune forze durante un particolare processo. Supponiamo che la soluzione che abbiamo trovato sia  $L = f(g_1, g_2, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots)$ , dove le  $g_i$  e le  $\lambda_i$  rappresentano rispettivamente le grandezze e le costanti del sistema fisico in esame. Se, tramite l'analisi dimensionale, andiamo a controllare il membro di destra e ci accorgiamo che le sue dimensioni non corrispondono ad un'energia ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$ ), allora il risultato che abbiamo trovato è sicuramente sbagliato! Magari abbiamo lasciato qualche parametro per strada o ci siamo dimenticati di ricopiarlo tra un passaggio e l'altro.

**Esempio 4.2 (Potenza irradiata da una carica elettrica accelerata).** *La potenza elettromagnetica emessa da una particella accelerata dipende dalla sua carica elettrica  $q$ , dall'accelerazione  $a$ , dalla costante di permittività elettrica  $\epsilon_0$  e dalla velocità della luce nel vuoto  $c$ . Trovare la dipendenza funzionale che lega la potenza emessa a queste grandezze fisiche/costanti.*

Impostiamo la relazione

$$P = q^\alpha a^\beta \epsilon_0^\gamma c^\delta.$$

Le dimensioni della potenza sono

$$[P] = \frac{[M] [L]^2}{[T]^3}.$$

Le dimensioni della permittività elettrica possono essere ricavate a partire dalla forza di Coulomb:

$$[\epsilon_0] = \frac{[C]^2 [T]^2}{[M] [L]^3}.$$

---

<sup>14</sup>Nel caso delle funzioni trascendenti, però, ci si può fare un'idea dell'argomento delle stesse. Esso deve sempre essere una quantità adimensionale, quindi una qualsiasi combinazione adimensionale delle quantità del sistema può, potenzialmente, andare bene. Se la combinazione di grandezze  $C$  è adimensionale, anche  $C^\alpha$  con  $\alpha \in \mathbb{R}$  lo sarà! Quale prendiamo? C'è bisogno di altre tecniche per capire quale combinazione è quella giusta!

Il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} \alpha + 2\gamma = 0, \\ \gamma = -1, \\ -2\beta + 2\gamma - \delta = -3, \\ \beta - 3\gamma + \delta = 2. \end{cases}$$

La soluzione è  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 2$ ,  $\gamma = -1$ ,  $\delta = -3$ . La relazione per la potenza è, dunque,

$$P \propto \frac{q^2 a^2}{\varepsilon_0 c^3}.$$

Per cultura, il coefficiente adimensionale è  $\frac{1}{6\pi}$  in caso di regime non relativistico.

**Esempio 4.3 (Sfera raffreddata).** *Una sfera omogenea di raggio 3 cm viene immersa nell'acqua bollente per un tempo molto lungo. Improvvisamente, essa viene presa e messa in acqua ghiacciata. Stima la lunghezza di penetrazione del fronte freddo dopo un tempo di immersione di 30 s, sapendo che la sfera ha densità 2500 kg/m<sup>3</sup>, conducibilità termica 0.95 W/(m · K) e calore specifico 830 J/(kg · K).*

All'inizio, la temperatura all'interno della sfera vale 100°C ovunque. Non appena essa viene immersa nell'acqua ghiacciata, il fronte di freddo inizia a propagarsi dalla superficie verso l'interno. Ad un certo istante, la distribuzione della temperatura all'interno sarà caratterizzata da una certa lunghezza di penetrazione del fronte freddo, che chiameremo  $\xi(t)$ . Proviamo a scrivere  $\xi(t)$  in funzione delle grandezze del problema. Impostiamo la relazione

$$\xi = \lambda^\alpha \rho^\beta c^\gamma t^\delta,$$

dove  $\lambda$  è la conducibilità termica della sfera,  $\rho$  è la sua densità,  $c$  è il calore specifico e  $t$  è il tempo di immersione nell'acqua ghiacciata. Passando alle dimensioni, la precedente equazione diventa

$$[L] = \left( \frac{[M][L]}{[T]^3[\Theta]} \right)^\alpha \left( \frac{[M]}{[L]^3} \right)^\beta \left( \frac{[L]^2}{[T]^2[\Theta]} \right)^\gamma [T]^\delta.$$

Quindi, il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} \alpha - 3\beta + 2\gamma = 1, \\ \alpha + \beta = 0, \\ -3\alpha - 2\gamma + \delta = 0, \\ -\alpha - \gamma = 0. \end{cases}$$

La soluzione è  $\alpha = -\beta = -\gamma = \delta = \frac{1}{2}$ , quindi si ha

$$\xi \approx \sqrt{\frac{\lambda t}{\rho c}} = 3.7 \text{ mm}.$$

Il prossimo è un esempio che testimonia come l'analisi dimensionale non sempre riesce ad aiutarci.

**Esempio 4.4 (Alzabandiera, tratto da una storia vera).** *Tutte le mattine, a Campobasso, Daniele si sveglia e sa che dovrà presentarsi nel piazzale della Scuola di Polizia, inquadarsi assieme ad altri 200 allievi e partecipare alla cerimonia dell'alzabandiera*

alle 8:08. Una mattina, a Campobasso, l'allieva agente Francesca si sveglia e sa che da lì ad un'ora toccherà a lei innalzare il tricolore. Per l'occasione, ci sarà anche il Direttore della Scuola ad assistere alla cerimonia. Cosa potrà mai andare storto? Non appena iniziano ad udirsi le parole dell'Inno di Mameli, Francesca comincia a tirare lentamente il cavo metallico sul quale è fissata la bandiera. Lei sa benissimo che la bandiera deve arrivare in cima all'asta esattamente alla fine dell'inno, ma, a causa di un'errata valutazione sulle tempistiche, alla fine della cerimonia la bandiera sventola ancora a mezz'asta. Ciò causa la furia del Direttore e l'ilarità di Daniele.

La frequenza dello sventolio della bandiera dipende dalle sue dimensioni caratteristiche, dalla sua densità di massa superficiale, dalla densità dell'aria, dalla velocità del vento e dall'accelerazione di gravità. Sapendo che la velocità del vento è proporzionale alla radice della quota rispetto al suolo, quanto vale il rapporto  $f_h/f_{\frac{h}{2}}$  tra le frequenze dello sventolio della bandiera posizionata, rispettivamente, in cima all'asta e a mezz'asta?

Impostiamo la relazione

$$f = l^\alpha \sigma^\beta \rho_a^\gamma v^\delta g^\epsilon \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{[T]} = [L]^\alpha \left( \frac{[M]}{[L]^2} \right)^\beta \left( \frac{[M]}{[L]^3} \right)^\gamma \left( \frac{[L]}{[T]} \right)^\delta \left( \frac{[L]}{[T]^2} \right)^\epsilon.$$

Vediamo subito che ci sono troppe incognite. Infatti, il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta - 3\gamma + \delta + \epsilon = 0, \\ -\delta - 2\epsilon = -1, \\ \beta + \gamma = 0. \end{cases}$$

Abbiamo 3 equazioni e ben 5 incognite! Questo vuol dire che ci ritroveremo con due incognite libere. Però possiamo arrivare a dire qualcosa in più. Intanto, l'ultima equazione ci dice che la frequenza deve per forza essere una funzione del rapporto  $\sigma/\rho_a$ . Poi, sostituendo seconda e terza equazione nella prima, troviamo

$$\alpha = \gamma + \epsilon - 1,$$

quindi, usando  $\gamma$  e  $\epsilon$  come incognite libere, la relazione tra le grandezze del sistema diventa

$$f = l^{\gamma+\epsilon-1} \left( \frac{\rho_a}{\sigma} \right)^\gamma v^{1-2\epsilon} g^\epsilon.$$

Cos'altro possiamo dire? Possiamo mettere dei vincoli su  $\gamma$  e  $\epsilon$  facendo delle considerazioni di carattere fisico. Ad esempio, se la densità di massa superficiale della bandiera o la sua dimensione caratteristica aumentano, ha senso che la frequenza del suo sventolio diminuisca. Quindi bisogna avere  $\gamma > 0$  e  $\gamma + \epsilon - 1 < 0$ . Mettendole assieme, segue che  $\epsilon < 1$ . Inoltre, ha senso che la frequenza cresca con la velocità del vento, quindi  $1 - 2\epsilon > 0$ . Questa è una condizione più stringente di  $\epsilon < 1$ ! In definitiva, il meglio che possiamo fare è

$$\gamma > 0, \quad \epsilon < \frac{1}{2}.$$

Noi dobbiamo trovare il valore del rapporto

$$\frac{f_h}{f_{\frac{h}{2}}} = \left( \frac{v_h}{v_{\frac{h}{2}}} \right)^{1-2\epsilon} = \left( \frac{k\sqrt{h}}{k\sqrt{h/2}} \right)^{1-2\epsilon} = 2^{\frac{1}{2}-\epsilon}.$$

Comunque sia, la soluzione del problema dipende dalla scelta di  $\epsilon$ , che è vincolato ad essere minore di 0.5. Siamo costretti a fermarci qui.

Un'ultima considerazione. La relazione funzionale tra le grandezze in gioco può essere riassembleta nella seguente forma:

$$f = \frac{v}{l} \left( \frac{\rho_a}{\sigma l} \right)^\gamma \left( \frac{gl}{v^2} \right)^\epsilon,$$

dove entrambe le quantità dentro le parentesi tonde sono adimensionali. Per vostra curiosità, questo risultato può essere ricavato tramite un'analisi assistita dal *Teorema  $\pi$*  o *Teorema di Buckingham*, uno degli strumenti più potenti della fisica. Se siete curiosi, cercate sul web.

## 5 Le stime

I problemi di stima sono una classe di problemi per cui non esiste una tecnica di risoluzione particolare. In genere, per *stima* si intende trovare l'ordine di grandezza e non il numero preciso al millesimo.

Generalmente, la stima è fatta su due fronti: il primo è quello in cui si capisce quali sono le grandezze fisiche in gioco e quali, tra queste, influenzano maggiormente il risultato (bisogna saper scartare tutti gli effetti che possono essere trascurati!); il secondo, invece, è quello in cui si sfrutta il buon senso per stimare i valori (cioè i numeri veri e propri) delle grandezze e dei parametri che influenzano il risultato finale. A volte, i problemi di stima sono (parzialmente o completamente) risolvibili tramite l'analisi dimensionale, intesa come tecnica di problem solving.

**Esempio 5.1 (Molecole nell'atmosfera).** *Stima il numero di molecole contenute nell'atmosfera terrestre.*

La gravità terrestre attrae le molecole nell'atmosfera: è il peso di tutte le molecole a causare la pressione atmosferica  $P_0$ . La maggior parte delle molecole sono localizzate entro 30 km dalla superficie terrestre, quindi possiamo considerare uniforme l'accelerazione di gravità. La forza peso di tutte le molecole vale  $M_{tot}g$ . Allora la pressione sulla superficie terrestre vale

$$P_0 = \frac{M_{tot}g}{4\pi R^2}.$$

La massa totale è il prodotto tra il numero di molecole nell'aria e la massa media di una molecola. proviamo a stimare quest'ultima. Più del 95% delle molecole in aria sono di azoto ( $N_2$ ) e ossigeno ( $O_2$ ), quindi il numero medio di nucleoni per molecola è circa 30. Segue che

$$N_{tot} = \frac{4\pi R^2 P_0}{30m_n g} \approx 10^{44}.$$

**Esempio 5.2 (Altezza massima delle montagne).** *Stima l'altezza massima che può avere una montagna sulla Terra, supponendo che sia interamente composta da silice ( $A = 60$ ). Usa l'analisi dimensionale per trovare la dipendenza funzionale con le seguenti grandezze fisiche/costanti: massa della molecola di silice  $M$ , dimensione caratteristica della molecola  $a_0$ , permittività elettrica  $\epsilon_0$ , accelerazione gravitazionale  $g$  e carica dell'elettrone  $e$ . Inoltre, pensa ad un modello che riesca a spiegare perché le*

*montagne non possono avere altezza illimitata.*

Dall'analisi dimensionale segue che

$$h_{\max} \propto \frac{e^2}{\epsilon_0 g A m_p a_0} \approx 10^{6/7} \text{m}.$$

Questo risultato non è affidabile dal punto di vista numerico: è troppo alto, ha lo stesso ordine di grandezza del raggio della Terra! Purtroppo, in questo caso non riusciamo a beccare il coefficiente adimensionale! Esso è ordini di grandezza più piccolo dell'unità. Pertanto, bisogna costruire un modello fisico sensato, in grado di stimare meglio questa altezza massima (essa deve, comunque, rispettare la relazione funzionale che abbiamo appena trovato!).

Perché una montagna non può essere troppo alta? Se una montagna diventasse molto alta, essa sprofonderebbe a causa del proprio peso. Se la montagna sprofonda di una certa altezza, perde energia potenziale, che viene usata per sciogliere le molecole di roccia che stanno alla base ( $\text{SiO}_2$ ). Pertanto, l'altezza di una montagna può essere stimata utilizzando considerazioni energetiche.

Sia  $M$  la massa della montagna. Quando la montagna sprofonda di un'altezza  $d$ , l'energia potenziale gravitazionale rilasciata è  $U = Mgd$ . Siano  $S$  l'area della sezione trasversale della montagna,  $E$  il calore latente di fusione (per molecola) e  $n$  il numero di molecole per unità di volume. Allora, l'energia richiesta per fondere uno strato di rocce di altezza  $d$  è  $EnSd$ . L'energia rilasciata quando la montagna affonda di un'altezza di  $d$  deve essere inferiore all'energia necessaria per sciogliere lo strato, altrimenti la montagna continuerà ad affondare. Pertanto richiediamo che

$$Mgd < EnSd,$$

che diventa una condizione sulla massa

$$M < \frac{nSE}{g}.$$

Come sono collegate la massa  $M$  e l'altezza  $h$  della montagna? La massa di una molecola è  $Am_p$ , dove  $A$  è il numero totale di nucleoni in una singola molecola e  $m_p$  è la massa del protone. La massa della montagna è allora

$$M = (hS) n (Am_p).$$

Sostituendo questa espressione nella disequazione precedente si ottiene

$$h < \frac{E}{Agm_p} \equiv h_{\max}.$$

Questo risultato rispetta perfettamente la relazione funzionale che abbiamo trovato con l'analisi dimensionale! La quantità  $E/Am_p$  non è altro che il calore latente di fusione (per unità di massa) delle rocce di silice, il cui valore si aggira attorno ai 160 kJ/kg. Segue che la stima per l'altezza massima delle montagne è  $h_{\max} \approx 16 \text{ km}$ .

**Esempio 5.3 (Stima della portata massima di una strada).** *Stima la portata massima (in numero di autoveicoli per ora) di una strada a singola corsia, imponendo*

le opportune condizioni di sicurezza.

La portata di una strada non è altro che il numero di automobili che passano per uno stesso punto nell'unità di tempo. Per semplicità, considereremo automobili tutte uguali che viaggiano alla stessa velocità di crociera  $v$ . Quante automobili sono presenti in un tratto di strada lungo  $L$ ?

$$n = \frac{L}{d},$$

dove  $d$  è la distanza tra due automobili consecutive. Se non ci fossero condizioni di sicurezza da seguire,  $d$  coinciderebbe con la lunghezza di una singola automobile (sarebbero tutte attaccate in fila indiana). Quanto dovrebbe valere  $d$  in una nazione civile? Ha senso che essa sia una funzione crescente della velocità  $v$ : maggiore è la velocità, maggiore è la distanza di sicurezza. Possiamo stimare la distanza di sicurezza come la somma di due contributi

$$d_{\text{sicurezza}} = d_{\text{reazione}} + d_{\text{frenata}} = vt_{\text{reazione}} + \frac{v^2}{2\mu g},$$

dove  $d_{\text{reazione}}$  è la distanza percorsa dalla macchina durante il tempo di reazione umano, mentre  $d_{\text{frenata}}$  è la distanza percorsa durante la frenata. Quest'ultima è stata calcolata considerando la frenata come un moto rettilineo uniformemente decelerato, causato dalla forza di attrito  $F = \mu mg$ . A questo punto, possiamo dire che la distanza  $d$  tra due auto è la somma della distanza di sicurezza  $d_{\text{sicurezza}}$  e la lunghezza di una singola auto  $l_{\text{auto}}$ . La portata (numero di auto al secondo) è

$$p(v) = n(v) \frac{v}{L} = \frac{v}{l_{\text{auto}} + vt_{\text{reazione}} + \frac{v^2}{2\mu g}}.$$

Massimizziamo questa funzione rispetto alla variabile  $v$ . Uguagliando a zero la sua derivata prima, si ottiene  $v^* = \sqrt{2\mu g l_{\text{auto}}}$ , quindi

$$p_{\text{max}} = \frac{\sqrt{2\mu g l_{\text{auto}}}}{l_{\text{auto}} + t_{\text{reazione}} \sqrt{2\mu g l_{\text{auto}}} + \frac{2\mu g l_{\text{auto}}}{2\mu g}} = \frac{1}{t_{\text{reazione}} + \sqrt{\frac{2l_{\text{auto}}}{\mu g}}}.$$

Le stime per  $\mu$ ,  $l_{\text{auto}}$  e  $t_{\text{reazione}}$  sono alla portata di tutti. Prendiamo dei valori sensati, tipo  $\mu \approx 0.8$ ,  $l_{\text{auto}} \approx 4$  m e  $t_{\text{reazione}} \approx 0.3$  s. Otteniamo  $p_{\text{max}} \approx 0.8$  auto al secondo, quindi circa 3000 auto all'ora.

## 6 Problemi finali

**Problema 6.1** (Stime solari). Schematizziamo il Sole come una sfera ferma di massa  $M$  e raggio  $R$ , costituita da idrogeno monoatomico alla temperatura assoluta  $T$ . L'energia totale del sole può essere scritta come

$$E = W + U,$$

dove  $T$  è l'energia termica e  $U$  è l'energia potenziale gravitazionale. Quest'ultima può essere espressa come

$$U = AGM^\alpha R^\beta,$$

dove  $G$  è la costante di gravitazione universale e  $A$  è una costante adimensionale il cui valore assoluto è dell'ordine dell'unità. L'energia termica può essere scritta nella forma

$$W = Bk_B T^\gamma,$$

dove  $k_B$  è la costante di Boltzmann e  $B$  è una costante adimensionale.

1. Trova i valori di  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ .
2. Ricordando il teorema del viriale  $W = -E$ , esprimi la temperatura assoluta del Sole in funzione di  $M$  e  $R$ .
3. Il Sole ha una massa di  $2 \times 10^{30}$  kg e dista dalla Terra circa  $1.5 \times 10^{11}$  m. Il flusso di energia che arriva sulla Terra è circa  $1 \text{ kW/m}^2$ . Assumendo che il modello precedente sia valido per il Sole e che tutta l'energia emessa provenga dalla sua contrazione, calcola approssimativamente di quanto dovrebbe diminuire in un anno il suo raggio, partendo dal valore iniziale di  $7 \times 10^8$  m.

**Problema 6.2** (Scaling volanti). Un aereo riesce a viaggiare ad un'altitudine costante mentre si muove a velocità  $u$  rispetto alla terra ferma. Mantenendo invariati gli altri parametri del problema, a quale velocità dovrebbe muoversi un aereo di dimensione doppia affinché possa viaggiare alla stessa altitudine del precedente?

**Problema 6.3** (Tempo di cottura). Supponiamo che il tempo necessario per la cottura di una fetta di carne omogenea rispetti la relazione

$$t = A \frac{c}{k} \rho^\alpha m^{\frac{2}{3}},$$

dove  $A$  è una costante adimensionata,  $c$  è il calore specifico della carne,  $k$  è la sua conducibilità termica,  $\rho$  è la sua densità e  $m$  è la sua massa. Quanto vale il coefficiente  $\alpha$ ?

**Problema 6.4** (Tempo di crescita di un albero). La costante solare  $C_S \sim 1 \text{ kW/m}^2$  è la quantità di radiazione elettromagnetica per unità di superficie e tempo che arriva sulla Terra e proveniente dal Sole. La radiazione solare, attraverso la fotosintesi, è responsabile della formazione della materia organica vegetale a partire da acqua e anidride carbonica. L'efficienza del processo di fotosintesi è dell'ordine dell'1%. Assumendo che l'energia per unità di massa immagazzinata nel legno sia dell'ordine del potere calorifico  $P_C \sim 10^7 \text{ J/Kg}$ , stima quanto tempo occorre affinché un albero possa crescere di 10 metri.

**Problema 6.5** (Urto con molla). Un corpo di massa  $m$  viaggia con velocità  $v_0$  su un piano orizzontale privo di attrito. Essa urta elasticamente una molla di costante elastica  $k$ , priva di massa, che è attaccata ad un blocco di massa  $M$ . Quanto vale la massima compressione della molla? Se il corpo si attacca alla molla, quanto vale la massima estensione di quest'ultima negli istanti successivi all'urto?

**Problema 6.6** (Palla contro asta non omogenea, dal test di ammissione 2023). Un'asta ferma (non necessariamente omogenea) di massa  $M$  e lunghezza  $L$ , è incardinata ad un piano orizzontale in uno dei due estremi ed è libera di ruotare attorno ad esso, come in Fig. 7. Una palla di massa  $M$  è lanciata perpendicolarmente all'asta contro l'altro estremo, con velocità  $v_0$ . Calcola il massimo e il minimo valore possibili della velocità finale della pallina dopo l'urto elastico con l'asta, se il centro di massa dell'asta dista  $d = 0.4L$  dal cardine.

**Problema 6.7** (Deflessione massima). Una particella di massa  $m_1$  viaggia con velocità  $\vec{v}_1 = v_1 \hat{x}$  e urta un'altra particella di massa  $m_2$  che viaggia a velocità  $\vec{v}_2 = v_2 \hat{y}$ . Dopo aver ripetuto questo esperimento migliaia di volte, il massimo angolo di deflessione della prima particella osservato è  $\frac{\pi}{2}$ . Trova  $v_2$  in funzione di  $m_1$ ,  $m_2$  e  $v_1$ .

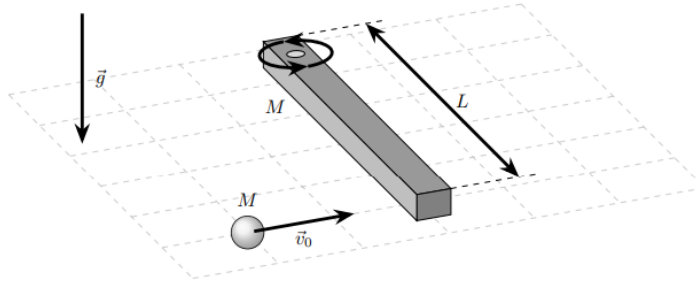


Figura 7: Schematizzazione dell'urto tra la palla e l'asta non omogenea.

**Problema 6.8** (Fagiolo nella ciotola, dal test di ammissione 2024). Un punto materiale di massa  $m$  si muove all'interno di una ciotola semisferica e omogenea, di massa  $M$ , raggio  $R$ , e altezza  $h$  libera di muoversi lungo un piano orizzontale liscio, come illustrato in Fig. 8. La ciotola è libera di traslare, ma non può ruotare, essendo essa fissata a un binario. Nel sistema non è presente alcun attrito. All'istante iniziale, il punto materiale viene posto nel punto A.

1. Giustificando adeguatamente la risposta, stabilisci se il punto materiale può perdere contatto con la ciotola durante il moto.
2. Stabilisci se il punto materiale può raggiungere l'altra estremità della ciotola (il punto B in Fig. 8) durante il suo moto. In caso affermativo, calcola di quanto si è spostato il centro di massa della ciotola quando ciò accade. Quanto vale lo spostamento massimo del centro di massa della ciotola durante il moto?
3. Descrivi il tipo di moto che l'intero sistema compie. In particolare, trova l'espressione delle funzioni  $\Delta x_M(\theta)$  e  $V_M(\theta)$ , dove  $\theta$  è l'angolo spazzato dal punto materiale all'interno della ciotola,  $\Delta x_M$  lo spostamento del baricentro della ciotola rispetto alla sua posizione iniziale e  $V_M$  la velocità della ciotola.

Sostituiamo la ciotola semisferica con una ciotola di massa  $M$ , tagliata a un angolo pari a  $\frac{\pi}{4}$ , come mostrato in Fig. 9.

4. Sotto le stesse ipotesi dei punti precedenti, calcola la gittata del punto materiale nel moto successivo al distacco dalla guida. In questo caso, per *gittata* si intende la proiezione lungo  $x$  della distanza tra la posizione del punto di distacco sulla ciotola, calcolata nell'istante in cui il punto materiale tocca il pavimento, e il punto stesso in cui il punto materiale tocca il pavimento.

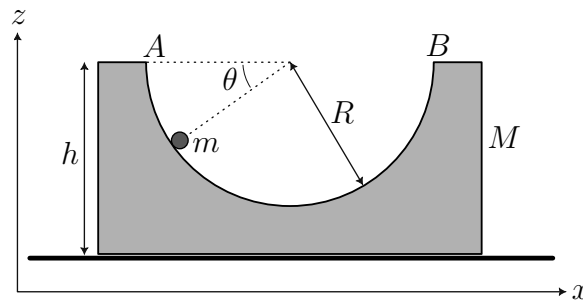


Figura 8: Disegno schematico della prima configurazione del Problema 6.8.

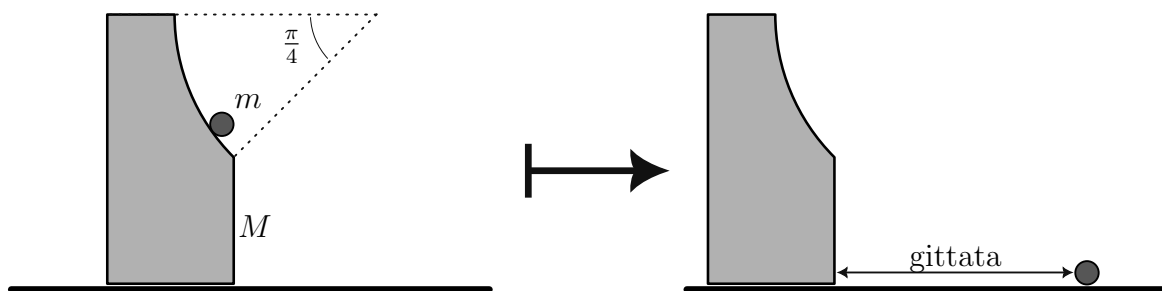


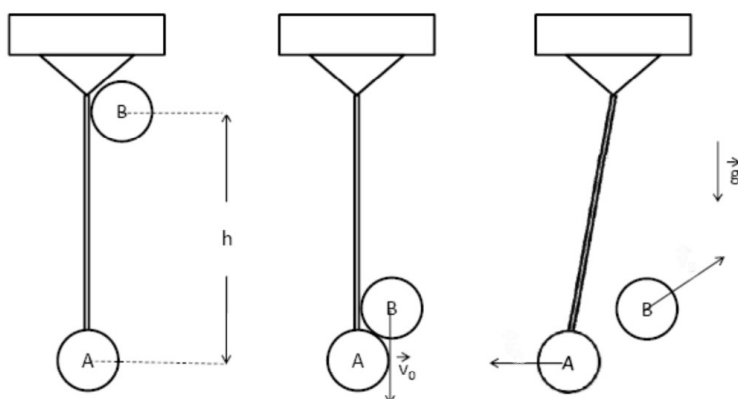
Figura 9: Disegno schematico della seconda configurazione del Problema 6.8.

**Problema 6.9** (Snell generalizzato). Un raggio di luce che si infrange contro l'interfaccia tra due mezzi diversi subisce un cambio di direzione descritto dalla legge di Snell, che vale nel caso in cui i due mezzi in contatto sono fermi l'uno rispetto all'altro. Se la velocità relativa tra i due mezzi non è nulla, si può dimostrare che la seguente quantità è indipendente dal mezzo:

$$\frac{1}{c_s \left(1 - \frac{w^2}{c_s^2}\right)} \left( \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c_s^2} \cos^2 \theta}} - \frac{w}{c_s} \right),$$

dove  $\theta$  è l'angolo tra la direzione del raggio di luce e la normale all'interfaccia,  $w$  è la velocità relativa tra i due mezzi e  $c_s$  è la velocità della luce nel mezzo. Controlla il limite in cui vale la legge di Snell vera e propria.

**Problema 6.10** (Urto tra due sfere in aria). Una sfera omogenea  $A$ , di massa  $M = 1$  kg e raggio  $R = 2$  cm, è appesa ad un supporto fisso mediante un'asta rigida di massa e diametro trascurabili. Una sfera  $B$ , identica ad  $A$ , si trova inizialmente ferma a contatto con l'asta. La differenza di quota tra i centri di massa delle due sfere è  $h = 1$  m, come mostrato in Problema 6.10. La sfera  $B$  viene lasciata cadere senza ruotare, con un'estremità che sfiora l'asta, fino a quando entra in contatto con la sfera  $A$ . In seguito all'urto, perfettamente elastico, la sfera  $A$  si mette in movimento e la sfera  $B$  cambia direzione. Nel sistema non è presente alcuna forma di attrito.



1. Sia  $v_0$  la velocità di  $B$  subito prima dell'urto. Quanto vale  $v_0$ ?
2. Sia  $\beta$  l'angolo che la velocità  $\vec{v}_B$  della sfera  $B$  forma con l'asse verticale subito dopo l'impatto. Quanto vale  $\beta$ ?
3. Quanto vale il modulo della velocità della sfera  $A$  subito dopo l'urto?

4. Qual'è l'altezza massima che raggiunge la sfera  $A$  dopo l'urto?
5. Come cambierebbero le risposte ai punti 2, 3 e 4 se, invece, l'asta rigida avesse una massa non trascurabile? Discutere, anche solo qualitativamente, cosa ci si aspetta che succeda in questo caso.