

Dispense di Relatività Ristretta

Tommaso Marini

Dicembre 2023

Indice

1	Introduzione	1
2	Cambiamo prospettiva	2
2.1	Relatività di Galileo	3
2.2	Relatività di Einstein	4
3	Ritorno al Futuro	6
3.1	Dilatazione dei tempi	6
3.2	Contrazione delle lunghezze	8
3.3	Tempo Proprio	9
4	Mi gira la testa	10
4.1	Excursus: Matrici	10
4.2	Rotazioni	13
4.3	Boost	16
4.4	Trasformazioni di Lorentz	22
5	Argomenti di conversazione	25
5.1	Un etto di luce	25
5.2	Non è colpa mia	25
6	Esercizi	28
6.1	Un treno di fisici	28
6.2	Scossa?	28
6.3	God bless America	29
6.4	Non cambiare niente	29
6.5	L'equazione più famosa del mondo	29

1 Introduzione

Ogni teoria fisica descrive qualche aspetto della Natura, dal movimento dei pianeti alle interazioni tra particelle subatomiche. La relatività ristretta è una teoria particolare, che ci insegna qual è il modo giusto (e quello sbagliato!) di descrivere questi fenomeni. Chiamiamo **evento** qualcosa che accade: stamani vi siete svegliati (presto?) nel vostro letto, avete fatto colazione (un po' dopo) in hotel e siete entrati in aula (ancora dopo!) nel Palazzo della Carovana. Possiamo pensare ad ognuno di questi eventi come un punto, e chiamiamo **spazio-tempo**

l'insieme di questi punti. Notate che ogni evento succede in un luogo (il letto, la mensa, Palazzo della Carovana) e in un momento (presto, dopo, ancora dopo...) ma non ha attaccato nessun numero che ci permetta di identificare questi luoghi e questi tempi: nello spazio-tempo non ci sono numeri, solo eventi!

Per fare fisica, tuttavia, abbiamo bisogno di numeri da inserire nelle equazioni per fare previsioni sul futuro; vogliamo dare un nome (spoiler: 4 numeri) ad ogni evento. Possiamo allora immaginare di avere a disposizione un grande foglio di carta millimetrata, su cui segniamo un punto particolare detto **origine**. Allora possiamo sovrapporre il foglio (che deve essere abbastanza grande) all'insieme di punti che chiamiamo spazio-tempo ¹, segnare la posizione sul foglio di ogni evento che ci interessa e infine misurare quanto questa disti dall'origine lungo tutti i lati del foglio. In questo modo possiamo chiamare quel particolare evento con le distanze che abbiamo misurato, ovvero con 4 numeri: 1 per ognuna delle direzioni "spaziali" del foglio (*dove* è successo) e 1 per la direzione temporale (*quando* è successo). Questi 4 numeri sono le **coordinate** dell'evento. Questa procedura è semplice, anche se un foglio a 4 dimensioni è piuttosto raro.

Il problema è come appoggiare il foglio sullo spazio tempo: persone diverse (li chiameremo **osservatori**) potrebbero metterlo in modo diverso (spostato, ruotato, uno che scivola in movimento rispetto all'altro) e dunque misurerebbero coordinate diverse per lo stesso evento. Allora metterebbero numeri diversi dentro le equazioni della fisica, e otterrebbero risultati diversi per lo stesso fenomeno, che è assurdo. Nessun problema! La relatività ci dà tutte le regole per tradurre le coordinate di un osservatore in quelle degli altri.

2 Cambiamo prospettiva

Formalizziamo adesso il discorso precedente. In realtà non è niente di complicato, e già lo fate (consapevolmente o inconsapevolmente) ogni volta che iniziate un problema di fisica. Il foglio è quello che chiamiamo **sistema di riferimento** e le direzioni nelle quali si misurano le coordinate sono gli assi, che si incrociano nell'origine. Indichiamo gli assi con un cappuccio: $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ sono quelli spaziali. Le coordinate di un evento, come detto, sono 4 numeri (ct, x, y, z). La prima è la coordinata temporale (Il *quando* è successo l'evento, misurato nel sistema di riferimento scelto); il c che moltiplica il tempo è la velocità della luce, e si è messo per avere tutte le coordinate con le stesse dimensioni fisiche (una lunghezza)². Le altre tre coordinate indicano la posizione spaziale dell'evento nel sistema di riferimento scelto. Questo vettore³ con 4 componenti che indica la posizione di un oggetto si chiama, senza molta fantasia, **quadrivettore posizione**.

¹Chiunque abbia provato a incartare un regalo sferico sa che possiamo sovrapporre senza fare pieghe un foglio su qualcosa solo se questo qualcosa è piatto. In relatività ristretta, allora, assumiamo che lo spazio sia piatto.

²Notiamo che non c'è nessuna assunzione fisica nel moltiplicare per la velocità della luce, se tutti gli osservatori usano lo stesso valore per questa: dire che qualcosa è successo 1 secondo fa, o 299 792 458 metri fa è lo stesso se sappiamo il fattore di conversione.

³Non preoccupatevi troppo di definire cosa è un vettore esattamente, lo vedremo più avanti. Vi avverto però che i nostri colleghi matematici non sono troppo d'accordo con quello che diremo.

2.1 Relatività di Galileo

Come abbiamo detto il problema sorge quando vogliamo confrontare coordinate di sistemi di riferimento diversi. Indichiamo allora con x le (quattro) coordinate del sistema $\mathbf{S}$ e x' le coordinate del sistema $\mathbf{S}'$. Ciò che vogliamo è una relazione tra i due:

$$x' = x'(x) \quad (1)$$

Notate che quella sopra è una relazione tra quadri-vettori: se conosco x^0, x^1, x^2, x^3 in un sistema di riferimento posso calcolare x'^0, x'^1, x'^2, x'^3 nell'altro. Ovvero, se conosco dove e quando è avvenuto un evento secondo un osservatore, posso calcolare dove e quando è avvenuto lo stesso evento per l'altro osservatore.

Ci sono molti modi in cui due sistemi di riferimento possono essere orientati diversamente tra loro: gli assi possono essere ruotati, l'origine può essere traslata, oppure un'origine può muoversi rispetto all'altra a velocità costante. Definiamo sistema di riferimento **inerziale** uno in cui vale il primo principio della dinamica. Tutti i sistemi orientati diversamente da uno inerziale nel modo descritto sopra sono anch'essi inerziali, ovvero le trasformazioni elencate individuano una classe di sistemi in cui un corpo libero si muove di moto rettilineo uniforme. La relatività ristretta ci dice come trasformare le coordinate tra sistemi inerziali ⁴. In particolare siamo interessati alla trasformazione di coordinate tra due sistemi che hanno gli assi paralleli e una velocità relativa v lungo uno di questi assi (che sceglieremo x). Questa trasformazione è detta **boost**. In relatività galileiana allora l'equazione 1 per un boost è quella più ingenua possibile:

$$\begin{cases} ct' = ct \\ x' = x - \frac{v}{c}ct \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (2)$$

Questa è la trasformazione più *naïf* che potremmo scrivere (detta **trasformazione di Galileo**). L'origine del sistema S , al tempo t si trova in $-vt$ nel sistema S' , quindi la posizione di un evento nel nuovo sistema si trova semplicemente traslando di questa quantità. Notiamo che $t' = t$ implica che tutti gli osservatori misurano lo stesso tempo, che dunque possiamo considerare un **tempo universale**. Anche questa è un'assunzione *naïf* o, se volete, filosofica.

Dalle trasformazioni possiamo calcolare come trasforma la velocità di un oggetto:

$$u = \frac{dx}{dt} \quad u' = \frac{dx'}{dt'} \quad (3)$$

Ovvero:

$$u' = \frac{dx'}{dt} = \frac{d(x - vy)}{dt} = \frac{dx}{dt} - v = u - v \quad (4)$$

Anche questo risultato sembra ovvio, ed è esperienza quotidiana: in treno, ad esempio, se guardo fuori dal finestrino, vedo oggetti fermi rispetto alle rotaie ($u = 0$) muoversi con velocità opposta a quella del treno.

⁴Ci sono molte trasformazioni che ci portano da un sistema inerziale a uno non inerziale. Ad esempio se l'origine di uno è accelerata rispetto a quella dell'altro compariranno forze apparenti e non varrà la prima legge della dinamica.

2.2 Relatività di Einstein

Tutto ciò che abbiamo visto finora sembra ovvio, quasi noioso, e per fortuna la Natura è un po' più interessante. In effetti, abbiamo scritto le trasformazioni di Galileo basandoci sulla vita di tutti i giorni, ma ci piacerebbe poter derivare la relazione 1 da un principio ⁵. In particolare, se pensate all'introduzione, un buon principio è:

Le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali

Questo è noto come **Principio di Relatività** e fu formulato per la prima volta da Galileo. Il suo significato è molto profondo e ci dice che le leggi della fisica sono qualcosa che appartiene allo spazio-tempo (l'insieme di eventi) e non al modo in cui noi "ci appoggiamo un foglio sopra" ⁶.

L'ultimo ingrediente di cui abbiamo bisogno è una legge fisica a cui applicare il principio di relatività. Quella che fa al caso nostro è molto semplice:

La luce si muove a velocità $c \sim 299792458$ [m/s] in ogni sistema di riferimento

Questa legge fisica è una predizione della teoria di Maxwell dell'elettromagnetismo, ed è stata verificata sperimentalmente moltissime volte. Per quanto semplice sembri, è in realtà estremamente contro intuitiva e tutte le stranezze che vedremo oggi sono conseguenza di questa. La Natura non è così noiosa dopotutto.

Vediamo subito che le trasformazioni di Galileo non soddisfano il principio di relatività. Usando l'equazione 4, infatti, avremmo che la velocità della luce cambia da un sistema di riferimento a un altro. La cosa più facile che possiamo fare è partire dalla 2.1 e provare a modificarla: d'altronde le trasformazioni di Galileo valgono per la maggior parte di ciò che vediamo tutti i giorni (Galileo non era stupido!) e quindi deve esistere un limite in cui le nuove equazioni si riducono alle vecchie. Possiamo pensare di lasciare intatta la struttura di x' a meno di moltiplicarla per una funzione. Questa funzione può dipendere dall'unico parametro della trasformazione, la velocità relativa v .

$$x' = \gamma(v)(x - \beta ct) \quad (5)$$

dove si è scritto β al posto di v/c per semplicità. Per quanto riguarda il tempo possiamo scrivere una cosa generale:

$$ct' = \tilde{\gamma}(v)(ct + ax) \quad (6)$$

dove $\tilde{\gamma}(v)$ è un'altra funzione di v , diversa, per adesso da $\gamma(v)$. Non fatevi confondere, non abbiamo fatto nessuna assunzione fisica strana sul tempo. Potremmo ottenere $\tilde{\gamma} = 1$ e $a = 0$ e recuperare il tempo universale: abbiamo solo preso più libertà per fare i conti e vedere cosa succede ⁷. Vogliamo adesso determinare γ , $\tilde{\gamma}$ e a . Per farlo imponiamo che:

⁵I principi, a loro volta, sono ispirati dall'esperienza quotidiana e da ragionamenti logici. Se una legge derivata da un principio non è in accordo con i dati sperimentali, dobbiamo rivedere il principio stesso, e questo porta spesso a delle rivoluzioni concettuali.

⁶Il principio si limita a sistemi inerziali perché sappiamo che in un sistema accelerato già il primo principio della dinamica non vale. Tuttavia i sistemi accelerati non sono da buttare; sono alla base, ad esempio, della costruzione della Relatività Generale.

⁷L'unica assunzione che abbiamo fatto è che la trasformazione sia lineare e che le origini coincidano ($ct = 0 = x = 0 \implies ct' = x' = 0$). Per il resto la trasformazione è la più generale possibile, un eventuale coefficiente davanti a ct' si può riassorbire nella funzione incognita $\tilde{\gamma}(v)$.

1. l'origine del sistema S ($x = 0$) sia in posizione $x' \stackrel{!}{=} -vt'$. Questa condizione si può vedere come definizione di due sistemi che si muovono con velocità relativa v lungo x ;
2. se passo da S a S' e poi da S' a S devo ottenere le stesse coordinate di partenza. Ovvero $x(x'(x)) \stackrel{!}{=} x$;
3. la velocità della luce è costante, e pari a c , in entrambi i sistemi di riferimento.

Il simbolo $\stackrel{!}{=}$ significa che è una condizione che imponiamo. Pronti? Iniziamo con la condizione 1. Ricordando che l'origine (spaziale) di S ha posizione $x = 0$:

$$x' = \gamma(v)(x - \beta ct) = -\gamma(v)vt \stackrel{!}{=} -vt' = -v\tilde{\gamma}(v)t$$

ovvero confrontando i termini:

$$\tilde{\gamma} = \gamma(v) \quad (7)$$

D'ora in poi, allora, usiamo $\gamma(v)$ sia per x' che per ct' . Imponiamo adesso la condizione che la velocità della luce sia costante. Per farlo abbiamo bisogno di calcolare la velocità nei due sistemi di riferimento: dx/dt e dx'/dt' . Ma dx , dt ... sono differenze (infinitesime) e dunque valgono le stesse regole di trasformazione di x' , t' ⁸:

$$\begin{cases} dx' = \gamma(v)(dx - \beta cdt) \\ cdt' = \gamma(v)(cdt + \beta dx) \end{cases} \quad (8)$$

Vogliamo $dx/dt = c \implies dx'/dt' = c$:

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - \beta cdt}{dt + \frac{a}{c}dx} = \frac{dx/dt - \beta c}{c + \frac{a}{c}dx/dt} = \frac{c - \beta c}{1 + a} = c \frac{1 - \beta}{1 + a} \stackrel{!}{=} c$$

allora deve essere:

$$a = -\beta \quad (9)$$

con buona pace del tempo universale: anche il tempo è una coordinata che scegliamo noi, non un qualcosa di intrinseco allo spazio-tempo, quindi può avere valori diversi in sistemi di riferimento diversi. Imponiamo infine la seconda condizione, facendo attenzione che quando torno da S' a S la velocità è invertita, cioè $-\beta \rightarrow \beta$:

$$x = \gamma(x' + \beta ct') = \gamma(\gamma(x - \beta ct) + \beta \gamma(ct - \beta x)) = \gamma^2(1 - \beta^2)x \stackrel{!}{=} x$$

e ciò è possibile solo se:

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (10)$$

Abbiamo quindi le trasformazioni complete sotto un boost, note come **trasformazioni di Lorentz**:

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (11)$$

⁸Se non ci credete provate a calcolare come trasforma $\Delta x = x_1 - x_2$ e $\Delta t = t_1 - t_2$ a partire dalle equazioni 5 e 6.

dove si è assunto non succedesse niente di strano nelle direzioni perpendicolari al moto ⁹. Fate attenzione al segno della velocità ($\beta = v/c$): questa è la velocità con cui il sistema S vede il sistema S' . Si mostra facilmente che per un boost in direzione $\vec{\beta}$ arbitraria inoltre vale:

$$ct' = \gamma(ct - \vec{\beta} \cdot \vec{x}) \quad (12)$$

con $\vec{\beta} \cdot \vec{x}$ prodotto scalare tra i due vettori.

Per apprezzare a fondo la bellezza di queste trasformazioni dovete vederle in questa forma:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (13)$$

Non vi preoccupate se non capite cosa significa ¹⁰, lo vedremo più avanti. Per adesso, è solo un modo più veloce (e bello) di scrivere le equazioni 11.

Prima di procedere guardiamo ancora un po' le equazioni che abbiamo trovato. In particolare potete calcolare cosa succede se $c \rightarrow \infty$. Facendo i limiti:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \beta = 0 \quad \lim_{c \rightarrow \infty} \gamma = 1 \quad \lim_{c \rightarrow \infty} \beta c = v \quad (14)$$

e ritroviamo le trasformazioni di Galileo. Fisicamente, il limite $c \rightarrow \infty$ significa che c è molto più grande delle velocità tipiche della situazione, come succede nella vita di tutti i giorni.

3 Ritorno al Futuro

Come già detto, le trasformazioni di Lorentz hanno delle conseguenze contro intuitive, che dipendono tutte dal fatto che la velocità della luce è costante in ogni sistema di riferimento. Per convincerci di questo, ricaviamo i due risultati più insoliti, la dilatazione dei tempi e la contrazione delle lunghezze, direttamente dall'assunzione che c è costante. Nella prossima sezione, vedremo che le trasformazioni di Lorentz danno lo stesso risultato in modo più diretto.

3.1 Dilatazione dei tempi

Il motivo per cui la costanza della velocità della luce ha conseguenze così strane è che, nella vita di tutti i giorni, la velocità di un oggetto è data dal rapporto tra spazio e tempo. Se la velocità della luce non fa quello che ci aspettiamo (cioè trasformare come dice Galileo), allora anche spazio e tempo devono fare qualcosa di strano. Iniziamo dal tempo. Il tempo si misura con gli orologi, per cui dobbiamo costruire un orologio. Un modello molto semplice prevede due specchi, posizionati uno sopra l'altro a una distanza l , tra cui rimbalza un raggio di luce. Il tempo che ci mette la luce a rimbalzare è esattamente:

$$\Delta t = \frac{2l}{c} \quad (15)$$

⁹Questo si può dimostrare a partire da dalla simmetria per rotazione nel piano y e z del problema: se i due sistemi hanno moto relativo lungo $\hat{x}$ non ci sono direzioni privilegiate nel piano yz .

¹⁰Per chi conosce il prodotto tra matrici e vettori colonna è chiaro che la scrittura è equivalente alle equazioni 11, per chi non lo conosce ma è curioso può guardare questo video.

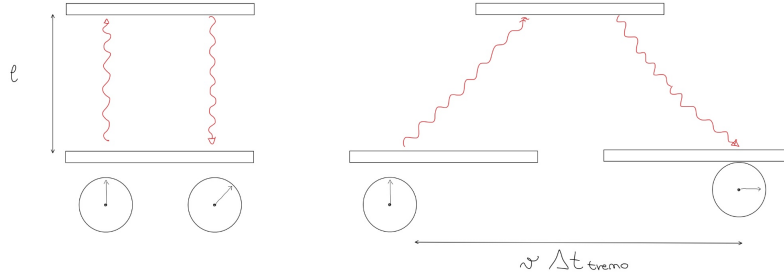


Figura 1: Un orologio composto da due specchi e un raggio di luce che rimbalza. Per un osservatore fermo alla stazione, la luce nell'orologio sul treno percorre più spazio

e possiamo prendere questo come un tic dell'orologio: Un tic dell'orologio è il tempo che passa tra l'evento *il raggio di luce colpisce lo specchio inferiore una volta* e l'evento *il raggio di luce colpisce lo specchio inferiore la volta successiva*. Adesso consideriamo due osservatori, uno in movimento rispetto all'altro ed entrambi con un orologio del tipo descritto. Per esempio, immaginate di essere alla stazione e di vedere un vostro amico su un treno che si muove con velocità v . Per l'orologio alla stazione vicino a voi il tempo trascorso tra due rimbalzi è quello che abbiamo trovato prima:

$$\Delta t_{stazione} = \frac{2l}{c} \quad (16)$$

Per l'orologio sul treno, invece, qualcosa cambia. Chiamiamo Δt_{treno} l'intervallo di tempo misurato dall'orologio alla stazione tra i due rimbalzi consecutivi della luce nell'orologio sul treno. Mentre il raggio di luce rimbalza, il treno si è spostato in orizzontale di una distanza $v\Delta t_{treno}$. Allora, usando il teorema di Pitagora, lo spazio percorso dalla luce è:

$$d = 2\sqrt{l^2 + v^2\Delta t_{treno}^2/4} \quad (17)$$

La luce sul treno percorre più spazio, ma la velocità della luce è costante, quindi deve essere passato più tempo tra i due rimbalzi! In effetti il tempo è dato dallo spazio percorso diviso c :

$$\Delta t_{treno} = \frac{2\sqrt{l^2 + v^2\Delta t_{treno}^2/4}}{c} \quad (18)$$

Risolvendo per Δt_{treno} si ha:

$$\Delta t_{treno} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{2l}{c} \quad (19)$$

cioè, per un osservatore fermo alla stazione:

$$\Delta t_{treno} = \gamma \Delta t_{stazione} \quad (20)$$

A volte questo risultato viene riassunto con: "per un osservatore in movimento il tempo passa più lentamente" ma questo è fonte di confusione. Infatti non si specifica quale tempo né si dice rispetto a cosa l'osservatore è in movimento. In effetti il vostro amico sul treno vede una situazione completamente analoga. Se pensate alla discussione vi accorgete che i due orologi non stanno misurando la stessa cosa: quello alla stazione misura il tempo trascorso tra due eventi con la stessa coordinata spaziale, mentre quello sul treno misura il tempo trascorso tra due eventi con coordinate spaziali diverse (per esempio $x = 0$ e $x = vt$). I due orologi misurano cose diverse, non c'è da sorprendersi che diano risultati diversi! La cosa sorprendente è che non si può misurare un tempo "universale": il tempo è una coordinata tra due eventi e come ogni coordinata dipende dal sistema di riferimento usato. Inoltre un evento è un punto nello spazio tempo, non una linea (quella che chiameremmo "presente"). Per ricordarci possiamo scrivere:

$$\Delta t_{fermo} = \gamma \Delta t_{movimento} \quad (21)$$

dove **fermo** significa "misura il tempo tra due eventi con stesse coordinate spaziali" e **movimento** significa "misura il tempo tra due eventi con coordinate spaziali diverse".

Se il fatto che tutto questo valga sia per voi che per il vostro amico vi sembra ancora paradossale, non siete gli unici. Per ora potete tranquillizzarvi notando che finché il treno si muove a velocità costante, non rivedrete mai il vostro amico e non potrete mai confrontare i due orologi. Più avanti ritorneremo su questo "paradosso" ¹¹.

Esercizio: *Un muone è una particella elementare con vita media $\tau = 2.2$ [μ s] che viene prodotto dall'interazione dei raggi cosmici con l'atmosfera a 15 [km] di altezza. In che sistema di riferimento il muone decade dopo τ secondo voi? Quanto veloce deve muoversi il muone affinché sia osservato sulla superficie della Terra?*

3.2 Contrazione delle lunghezze

Approfittiamo del risultato ottenuto sopra per derivarne uno altrettanto importante, guardando cosa succede allo spazio, cioè alle lunghezze. Supponiamo che una particella con velocità $\vec{v}$ percorra un tratto L in un certo sistema di riferimento. Un fisico sperimentale potrebbe prendere un'asta di lunghezza L_{lab} , ferma rispetto a lui, e misurare il tempo trascorso tra il passaggio della particella sul primo estremo e il secondo; chiamiamo questo tempo Δt_{lab} . Ovviamente vale:

$$v = \frac{L_{lab}}{\Delta t_{lab}} \quad (22)$$

Qua Δt_{lab} è un tempo misurato in movimento: i due eventi accadono in punti diversi: i due estremi della sbarra. Dal punto di vista della particella l'asta del fisico sperimentale si muove con velocità $-\vec{v}$ e la attraversa in un tempo

¹¹Questo è noto come paradosso dei gemelli: un gemello viaggia su un astronave a velocità vicino a c , mentre uno resta sulla terra. Per entrambi, l'altro si sta muovendo e il suo tempo è dilatato: al ritorno dell'astronave, chi è più vecchio?

che misura essere Δt_{part} (se avesse un polso per portare l'orologio). Questo è un tempo fermo: i due eventi "il primo estremo oltrepassa la particella" e "il secondo estremo attraversa la particella" avvengono alla stessa coordinata spaziale per la particella ($x_{part} = 0$). Utilizziamo allora il ragionamento della sezione precedente. Secondo la particella, il tempo Δt_{lab} misurato dal fisico è dilatato rispetto a Δt_{part} :

$$\Delta t_{lab} = \gamma \Delta t_{part} \quad (23)$$

Quindi la particella vede un'asta che si muove a velocità (in modulo) $v = L_{lab}/\Delta t_{lab}$ superarla in un tempo Δt_{part} . Conclude che la lunghezza dell'asta è:

$$L_{part} = \Delta t_{part} v = \Delta t_{part} \frac{L_{lab}}{\Delta t_{lab}} = \frac{L_{lab}}{\gamma} \quad (24)$$

Un'asta in movimento con velocità v appare contratta di un fattore γ nella direzione del moto! Fate attenzione a questa precisazione: le direzioni perpendicolari al moto non sono contratte (una sferetta, ad esempio, diventa un ellissoide).

Vediamo una conseguenza immediata della contrazione delle lunghezze. L'asta dell'esempio precedente avrà una certa massa M , che supponiamo essere distribuita uniformemente. Si può definire nel sistema di riposo una densità $\rho_0 = M/L$. Il pedice $_0$ indica che questa densità è calcolata nel sistema dove l'asta è ferma. Ma la sua massa, che è data dal numero di atomi che la costituiscono, non cambia nel sistema dove si muove, mentre la sua lunghezza è contratta. Allora la densità aumenta:

$$\rho = \gamma \rho_0 \quad (25)$$

Questo risultato vale per ogni tipo di densità, ad esempio per la densità di carica, dove è ancora più chiaro che la carica elettrica, la differenza tra il numero di cariche positive e negative, non cambia da un sistema di riferimento all'altro.

Ripetiamo i risultati di queste ultime due sezioni: un orologio in movimento (rispetto a un certo osservatore) appare rallentato in confronto a un orologio fermo (rispetto allo stesso osservatore); un oggetto in movimento (rispetto a un certo osservatore) appare più corto (nella direzione del moto), in confronto allo stesso oggetto fermo (rispetto allo stesso osservatore).

3.3 Tempo Proprio

Abbiamo visto le due conseguenze più strane dovute alla costanza della velocità della luce. In particolare, due orologi in movimento reciproco misurano il tempo in modo diverso. Tuttavia, la nostra idea di tempo, non è legata a strani orologi fatti con specchi e laser, ma al susseguirsi di una serie di processi che avvengono dentro di noi. Questo è vero a tutte le scale, dagli esseri umani che lentamente invecchiano, alle particelle elementari che hanno una certa vita media dopo la quale decadono (come nell'esercizio sopra). Ha senso chiedersi quale è questo tempo "interno". Non è difficile convincersi che questi processi siano scanditi da "orologi" fermi rispetto all'oggetto in questione (un essere umano o una particella elementare ...): gli eventi "i miei capelli sono castani" e "i miei capelli sono grigi" avvengono nella stessa posizione: la mia testa. Definiamo allora il **tempo proprio** di un osservatore come il tempo (che trascorre tra due eventi) misurato da un orologio fermo rispetto a lui. Notate che la risposta a

questa domanda non dipende dal sistema di riferimento in cui ve la ponete: è il primo esempio di invariante che incontriamo.

Mettiamoci allora in un certo sistema di riferimento e supponiamo di voler trovare il tempo proprio di una particella che descrive una certa traiettoria $x(t)$. Qui x e t sono la posizione e il tempo misurati nel nostro sistema di riferimento. In generale questa particella non si muove di moto rettilineo uniforme, per cui non possiamo usare direttamente il risultato che abbiamo trovato per la dilatazione dei tempi. Tuttavia, posso dividere il moto della particella in tanti intervalli piccoli dx , in cui la velocità della particella è circa costante. Chiamiamo $d\tau$ il tempo proprio trascorso tra l'inizio e la fine di questo intervallo. Rispetto alla particella gli orologi che misurano il tempo t si muovono, per cui

$$dt = \gamma(v)d\tau \quad (26)$$

La velocità v è la velocità relativa mentre la particella percorre l'intervallo dx . Questa si può calcolare nel nostro sistema di riferimento, ed è dx/dt , ovvero la derivata rispetto al tempo della traiettoria $x(t)$: $v = \dot{x}(t)$. Allora:

$$d\tau = \frac{1}{\gamma(\dot{x}(t))} dt = \sqrt{1 - \frac{\dot{x}(t)^2}{c^2}} dt \quad (27)$$

Questo è vero per ogni intervallo dx in cui abbiamo diviso la traiettoria. Per trovare il tempo proprio totale tra due eventi, dobbiamo sommare tutti questi intervalli, ovvero dobbiamo integrare:

$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\gamma(\dot{x}(t))} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{\dot{x}(t)^2}{c^2}} dt \quad (28)$$

Riassumiamo: la formula sopra dà il tempo proprio di una particella trascorso tra due eventi che avvengono a tempi t_1 e t_2 in un certo sistema di riferimento in cui la particella descrive la traiettoria $x(t)$.

4 Mi gira la testa

Abbiamo visto le conseguenze fisiche più importanti della costanza della velocità della luce. Tuttavia queste sono contro intuitive, ed è facile fare confusione (Quale tempo è più grande? Quale tempo è più corto? Quale lunghezza è più grande? ...). In questa sezione sviluppiamo un formalismo che ci permette di evitare questa confusione e di tradurre direttamente le coordinate di un evento da un sistema di riferimento all'altro.

4.1 Excursus: Matrici

Per sviluppare questo formalismo dobbiamo studiare un pò di matematica. Non vi preoccupate, torniamo presto alla fisica!

Abbiamo visto che le trasformazioni da un sistema di riferimento ad un altro si possono scrivere come un sistema lineare:

$$\begin{cases} ct' = \gamma ct - \beta \gamma x \\ x' = \gamma x - \beta \gamma ct \end{cases} \quad (29)$$

Il sistema è detto lineare perché le nuove variabili (t', x') sono date da combinazioni lineari delle vecchie (t, x) , ovvero le vecchie variabili sono al più sommate tra loro e moltiplicate per costanti (non compare mai x^2 per esempio). Prendiamo un sistema lineare generico, che lega delle variabili x_1, x_2 a delle variabili x'_1, x'_2 (queste adesso sono variabili matematiche, non indicano una posizione):

$$\begin{cases} x'_1 = ax_1 + bx_2 \\ x'_2 = cx_1 + dx_2 \end{cases} \quad (30)$$

dove a, b, c, d sono coefficienti costanti. Come già accennato, un sistema lineare può essere rappresentato da una "griglia" di coefficienti, detta **matrice**. Una matrice con n righe e m colonne, è detta matrice $n \times m$. Nel sistema lineare riportato sopra, organizziamo i coefficienti in una matrice 2×2 :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (31)$$

L'elemento $(1, 1)$ della matrice è a , l'elemento $(1, 2)$ è b , $(2, 1)$ è c , $(2, 2)$ è d . Organizziamo le variabili nuove e vecchie in matrici 2×1 . Queste sono dette vettori colonna:

$$x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (32)$$

Il sistema lineare si scrive:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (33)$$

Quando diciamo che due matrici sono uguali, intendiamo che sono uguale elemento per elemento. Quando mettiamo due matrici accanto, invece, stiamo indicando il prodotto righe per colonne. Questo è più difficile da spiegare che da fare, ma ci provo. In generale il prodotto tra una matrice $n \times m$ e una matrice $m \times l$ è una matrice $n \times l$. Notate che è importante che le colonne della prima siano lo stesso numero delle righe della seconda. Nello specifico siamo interessati al prodotto tra matrici 2×2 e matrici 2×1 (vettori colonna). Il risultato è una matrice 2×1 (un altro vettore colonna): l'elemento $(1, 1)$ del prodotto è dato dalla moltiplicazione tra l'elemento $(1, 1)$ della prima matrice e l'elemento $(1, 1)$ della seconda, sommata alla moltiplicazione tra l'elemento $(1, 2)$ della prima matrice e l'elemento $(2, 1)$ della seconda. L'elemento $(2, 1)$ del prodotto è dato dalla moltiplicazione tra l'elemento $(2, 1)$ della prima matrice e l'elemento $(1, 1)$ della seconda, sommata alla moltiplicazione tra l'elemento $(2, 2)$ della prima matrice e l'elemento $(2, 1)$ della seconda. Come vi avevo promesso, più difficile da spiegare che da fare! In pratica:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x'_1 = ax_1 + bx_2 \\ x'_2 = cx_1 + dx_2 \end{cases} \quad (34)$$

Spero di avervi convinto che le matrici sono un modo intelligente di rappresentare i sistemi lineari. Tuttavia possiamo vederle in un modo più illuminante. Innanzitutto possiamo interpretare i vettori colonna come veri e propri vettori. Immaginate un vettore come una freccia nello spazio. Per semplicità prendiamo uno spazio bidimensionale, ad esempio una lavagna o un foglio di carta. Se

volete mettere dei numeri a questa freccia, dovete scegliere degli assi (due in questo caso, e per semplicità perpendicolari tra loro) e misurare le proiezioni della freccia lungo questi assi. Queste sono le componenti del vettore ¹². Possiamo allora scrivere la prima componente nell'elemento $(1, 1)$ e la seconda nell'elemento $(2, 1)$ di un vettore colonna. Il nome vettore colonna per una matrice 2×1 (in generale $n \times 1$) in effetti è azzeccato! Allora l'operazione che abbiamo fatto sopra di moltiplicare per una matrice, manda un vettore di componenti x_1, x_2 in un altro vettore di componenti x'_1, x'_2 . Questo a volte si indica con:

$$x' = Mx \quad (35)$$

dove dovete ricordare che x e x' sono vettori, cioè oggetti a più componenti, e non variabili.

Possiamo interpretare una matrice in un modo ancora diverso, che è quello che ci risulterà più utile. Possiamo pensare che il vettore colonna x' e il vettore colonna x siano le componenti dello *stesso* vettore, misurate con due scelte diverse degli assi. Se oriento gli assi in un modo misuro le componenti x_1, x_2 , se li oriento in un altro misuro x'_1, x'_2 , e la matrice M ci permette di passare da uno all'altro. Questo è esattamente quello che ci serve in relatività: un evento è un vettore (l'abbiamo chiamato quadrivettore posizione) che esiste indipendentemente da come scegliamo gli assi, ovvero dal sistema di riferimento. Le sue coordinate, invece, dipendono dal sistema di riferimento scelto, ma possiamo passare da uno all'altro con una matrice.

Concludiamo questa digressione matematica, chiarendo il concetto di trasformazione lineare. Una matrice rappresenta una trasformazione lineare perché vale:

$$M(\alpha x + \beta y) = \alpha Mx + \beta My \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (36)$$

dove α e β sono costanti, mentre x e y sono due vettori colonna. Questo è facile da verificare, sapendo che la somma tra vettori e la moltiplicazione per una costante, agiscono componente per componente:

$$\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \end{pmatrix} \quad (37)$$

Esercizio: Verificare la relazione 36 per una generica matrice:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Dimostrare inoltre che il vettore nullo

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è sempre mandato in sé stesso.

¹²Notate che la freccia esiste indipendente dal fatto che abbiate scelto gli assi o da come li avete orientati.

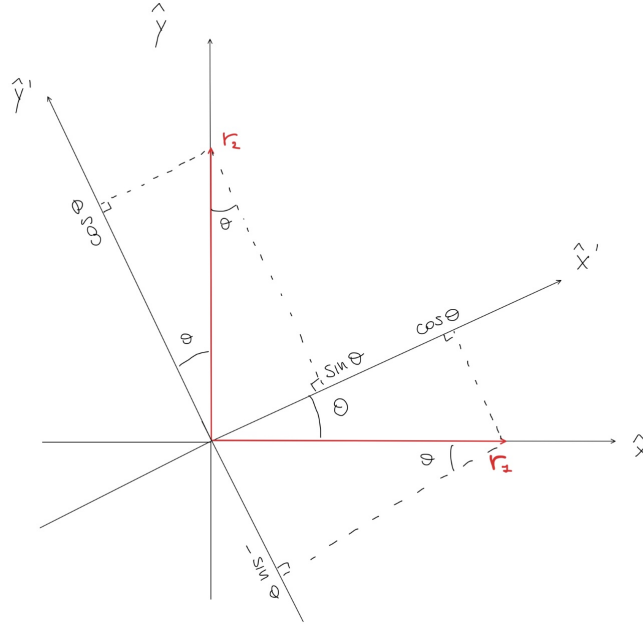


Figura 2: Gli assi di due sistemi di riferimento ruotati uno rispetto all'altro.

4.2 Rotazioni

Vogliamo adesso mettere in pratica il formalismo sviluppato nella sezione precedente. Prima di usarlo per i boost vediamo in un caso che ci risulta più intuitivo, le rotazioni. Una rotazione coinvolge solo le coordinate spaziali, quindi possiamo concentrarci solo su quelle. Consideriamo per semplicità uno spazio bidimensionale, e due sistemi di riferimento S e S' con assi $\hat{x}$ $\hat{y}$ e $\hat{x}'$ $\hat{y}'$ rispettivamente. In particolare, l'asse $\hat{x}'_1$ del sistema S' è ruotato di un certo angolo θ rispetto all'asse $\hat{x}_1$ del sistema S . La posizione di un oggetto in questo piano è individuata da un vettore $\vec{r}$, la freccia che punta dall'origine all'oggetto. Chiamiamo r^S le sue componenti nel sistema S e $r^{S'}$ le sue componenti nel sistema S' .

Vogliamo trovare la matrice che lega i due sistemi di riferimento. Vedendo la figura 2, non è immediato trovare il sistema lineare che lega le componenti in un sistema di riferimento a quelle in un altro. Tuttavia possiamo scrivere una matrice generica 2×2 :

$$R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (38)$$

e trovare i coefficienti imponendo che dia il risultato giusto per due vettori comodi. Come primo vettore comodo scegliamo il vettore $\vec{r}_1$ lungo 1 che punta verso l'asse $\hat{x}_1$. Questo ha componenti:

$$r_1^S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad r_1^{S'} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \quad (39)$$

per cui dobbiamo avere:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \implies \begin{cases} a = \cos \theta \\ c = -\sin \theta \end{cases} \quad (40)$$

Come secondo vettore prendiamo $\vec{r}_2$, lungo 1 che punta verso l'asse $\hat{x}_2$:

$$r_2^S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad r_2^{S'} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (41)$$

per cui:

$$\begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \implies \begin{cases} b = \sin \theta \\ d = \cos \theta \end{cases} \quad (42)$$

Concludiamo che la matrice di rotazione è: ¹³

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (43)$$

e per le componenti di un generico vettore $\vec{r}$, si ha $r^{S'} = Rr^S$, ovvero:

$$\begin{pmatrix} r'_x \\ r'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix} \implies \begin{cases} r'_x = r_x \cos \theta + r_y \sin \theta \\ r'_y = -r_x \sin \theta + r_y \cos \theta \end{cases} \quad (44)$$

Abbiamo detto più volte che un vettore esiste indipendentemente dal sistema di riferimento che scegliamo per descriverlo. Pensando ad un vettore come una freccia è facile pensare ad una sua proprietà che non dipende da come ruotiamo gli assi: la sua lunghezza. Se scegliamo gli assi perpendicolari tra di loro ¹⁴, la lunghezza di un vettore $\vec{r}$ si trova con il teorema di Pitagora e si indica con $|\vec{r}|$:

$$r^S = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix} \quad |\vec{r}|^2 = r_x^2 + r_y^2 \quad (45)$$

Possiamo verificare velocemente che la lunghezza non cambia se la calcoliamo in un altro sistema di riferimento, usando le relazioni 44:

$$\begin{aligned} |\vec{r}|^2 &= r_x'^2 + r_y'^2 = (r_x \cos \theta + r_y \sin \theta)^2 + (-r_x \sin \theta + r_y \cos \theta)^2 = \\ &= r_y^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + r_x^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + 2r_x r_y (\cos \theta \sin \theta - \cos \theta \sin \theta) = \\ &= r_x^2 + r_y^2 \end{aligned} \quad (46)$$

Trovare qualcosa che non dipende dal sistema di riferimento in cui lo calcoliamo è molto utile, perché ci permette di fare i conti dove risultano più comodi.

Finora non siamo stati precisi sul significato esatto di vettore, ma l'abbiamo sempre pensato come una freccia. Adesso possiamo dare una definizione: Un

¹³Notate che la prima e la seconda colonna della matrice di rotazione sono, rispettivamente, le componenti dei vettori di base $\hat{x}'_1$ e $\hat{x}'_2$ rispetto a S . Questo non è un caso, ma è legato al fatto che possiamo interpretare la matrice come una trasformazione *attiva*, che manda i vettori di una base in quelli dell'altra. In relatività è più comodo pensare alla matrice come una trasformazione *passiva*, in cui i vettori, cioè gli eventi, non cambiano, ma cambia solo la base, cioè il sistema di riferimento.

¹⁴Notate che la matrice di rotazione l'abbiamo ricavata in questo caso.

oggetto è un vettore (rispetto alle rotazioni) se le sue componenti trasformano sotto rotazioni come in equazione 44. Questa definizione può sembrarvi inutile o addirittura stupida (stiamo dicendo qualcosa del tipo "un vettore è un oggetto che trasforma come un vettore") ma in realtà è molto utile. Infatti se due oggetti trasformano nello stesso modo, le relazioni tra loro non dipendono dal sistema di riferimento in cui le scriviamo. Ad esempio, se due oggetti $\vec{v}$, $\vec{w}$ sono uguali in un sistema di riferimento $v^S = w^S$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad (47)$$

e trasformano nello stesso modo, ad esempio sono entrambi vettori, allora sono uguali in tutti i sistemi di riferimento. Per dimostrarlo basta usare la linearità della matrice di rotazione:

$$\begin{aligned} v^S = w^S &\rightarrow v^S - w^S = 0 \\ R(v^S - w^S) &= 0 \rightarrow Rv^S - Rw^S = 0 \\ Rv^S = Rw^S &\rightarrow v^{S'} = w^{S'} \end{aligned} \quad (48)$$

Una relazione tra oggetti che trasformano nello stesso modo si dice **covariante**. Abbiamo visto che se una relazione covariante rispetto alle rotazioni è vera in un sistema di riferimento, allora è vera anche in tutti i sistemi di riferimento ruotati rispetto a questo. Vediamo un esempio di una relazione che non è covariante, cioè una relazione tra oggetti che non trasformano nello stesso modo. Abbiamo visto, ad esempio, che la lunghezza di un vettore non cambia sotto rotazioni. Un oggetto che non trasforma sotto rotazioni si dice scalare. In fisica ci sono molte quantità scalari: la massa di un oggetto, la temperatura ... Chiaramente, non ha senso dire che un vettore è uguale a uno scalare. Innanzitutto uno è una freccia mentre l'altro è un numero, quindi non è chiaro il significato della parola uguale. Inoltre, anche se questo avesse un senso e fosse vero in un sistema di riferimento, sicuramente non sarebbe vero in un altro (le componenti del vettore cambiano, lo scalare non cambia). Questa è la versione avanzata (ancora peggio!) di dire che due cose con unità di misura diverse sono uguali. In generale esistono oggetti che trasformano in modo diverso da vettori e scalari (tensori, spinori ...). Una relazione tra oggetti dello stesso tipo è una buona relazione, una relazione tra oggetti diversi non lo è.

Finora l'unico vettore che abbiamo introdotto è quello che indica la posizione di un oggetto. Tuttavia è facile trovare altri vettori, ovvero altri oggetti che trasformano come in equazione 44. La linearità delle rotazioni ci dice subito che una combinazione lineare di vettori è un vettore. Ovvero, se abbiamo due oggetti che trasformano come vettori sotto rotazioni, allora possiamo trovare altri vettori prendendone la somma o la differenza, oppure moltiplicandoli per una costante. Qui con costante si intende qualcosa che non cambia sotto rotazioni, ovvero uno scalare. Ad esempio, se prendiamo la differenza tra due vettori posizione, otteniamo un altro vettore, detto vettore spostamento:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i \quad (49)$$

Se i due vettori sono abbastanza vicini tra loro e la differenza è infinitesima, il vettore spostamento si indica $d\vec{r}$. Sotto rotazioni gli intervalli di tempo non cambiano, per cui posso ottenere un altro vettore, detto vettore velocità, dividendo

per l'intervallo di tempo $\Delta t = t_f - t_i$, o dt se è infinitesimo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (50)$$

La velocità, così definita, è un buon vettore sotto rotazioni. Potete già immaginare, però, che qualcosa andrà storto quando considereremo i boost. Posso ripetere lo stesso ragionamento e ottenere il vettore accelerazione:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (51)$$

oppure posso moltiplicare per una costante, come la massa, e definire l'impulso Newtoniano:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (52)$$

Inoltre, posso introdurre nuovi vettori, definendoli con le giuste proprietà di trasformazione, come il vettore forza $\vec{F}$. Vedete, allora, che la legge più famosa della dinamica ¹⁵ è una legge covariante, perché è un'uguaglianza tra vettori:

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (53)$$

Abbiamo visto che tutti gli oggetti della cinematica e della dinamica Galileiana/Newtoniana hanno buone proprietà di trasformazione sotto rotazioni.

4.3 Boost

Vediamo adesso quello che ci interessa davvero, le trasformazioni di Lorentz. Dalla discussione fatta in 2.2 è chiaro che un evento è un quadrivettore che esiste indipendentemente dal sistema di riferimento in cui siamo. Le sue coordinate, invece, dipendono dal sistema di riferimento scelto, ma possiamo passare da uno all'altro con una matrice di Lorentz:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \quad (54)$$

Come vediamo, un boost lungo un asse, ad esempio l'asse $\hat{x}$, mescola la coordinata temporale e la coordinata x . Consideriamo quindi uno spazio bidimensionale con un asse temporale e un asse spaziale, e come sempre riscaliamo l'asse temporale con la velocità della luce c . Chiamiamo questo spazio (o la sua versione quadridimensionale) **spazio di Minkowsky** ¹⁶. Un punto nello spazio di Minkowsky corrisponde ad un evento: una cosa che è successa in una certa posizione e in un certo momento. Dato un evento E , indichiamo con x_E^S le coordinate di questo evento nel sistema di riferimento S :

$$x_E^S = \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (55)$$

Ormai abbiamo capito che la luce gioca un ruolo molto importante. Un raggio di luce ha traiettoria $x = \pm ct$ (+ se si muove verso destra, - se si muove

¹⁵D'altronde sono solo tre.

¹⁶In realtà non possiamo specificare uno spazio senza dire come si misurano le lunghezze. Lo spazio di Minkowsky è lo spazio quadridimensionale equipaggiato con la metrica di Minkowsky che vedremo più avanti.

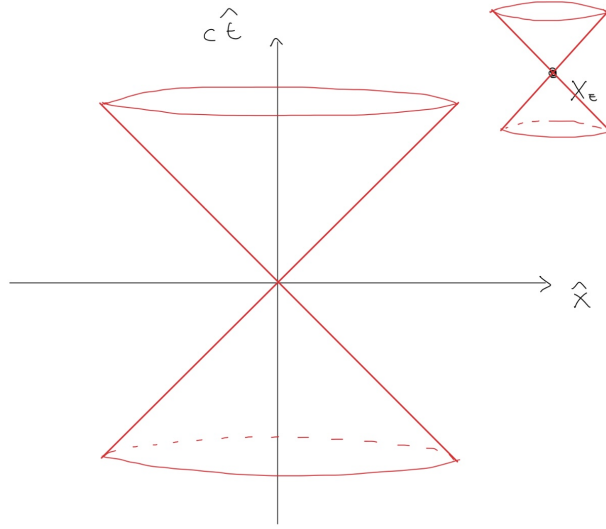


Figura 3: Il diagramma dello spazio di Minkowsky. Le linee rosse delimitano il cono luce dell'origine, ovvero il luogo dei punti raggiungibili dall'origine muovendosi a velocità $v < c$. Possiamo trovare il cono luce di ogni punto, facendo partire due raggi di luce (uno a destra e uno a sinistra) dal punto.

verso sinistra), ovvero si muove lungo le bisettrici del piano $ct - x$. Tutte le traiettorie con velocità minore di c , stanno sopra la bisettrice per $t > 0$ e sotto per $t < 0$. L'insieme di questi punti è detto **cono luce** dell'origine, ed è l'insieme degli eventi raggiungibili dall'origine muovendosi sempre a velocità minore di c . Vedremo che nessun oggetto può superare la velocità della luce, per cui il cono luce di un punto è l'insieme degli eventi raggiungibili, e quindi influenzabili, da quel punto. Torneremo più avanti a parlare di questo.

Consideriamo adesso due sistemi, S e S' , tali che S' si muove di velocità β lungo l'asse $\hat{x}$ rispetto a S . Come abbiamo visto, le coordinate di un evento nei due sistemi di riferimento sono legate da una trasformazione di Lorentz:

$$x_E^{S'} = \Lambda x_E^S \quad \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (56)$$

Esercizio: Svolgere il prodotto tra la matrice di Lorentz e il vettore colonna e verificare che riproduce le prime due righe del sistema lineare 11.

Vorremmo adesso disegnare gli assi del sistema di riferimento S' rispetto agli assi del sistema S . L'asse temporale ct' è il luogo dei punti con $x' = 0$. Dall'equazione sopra:

$$0 \stackrel{!}{=} x' = \gamma(x - \beta ct) \implies ct = \frac{1}{\beta}x \quad (57)$$

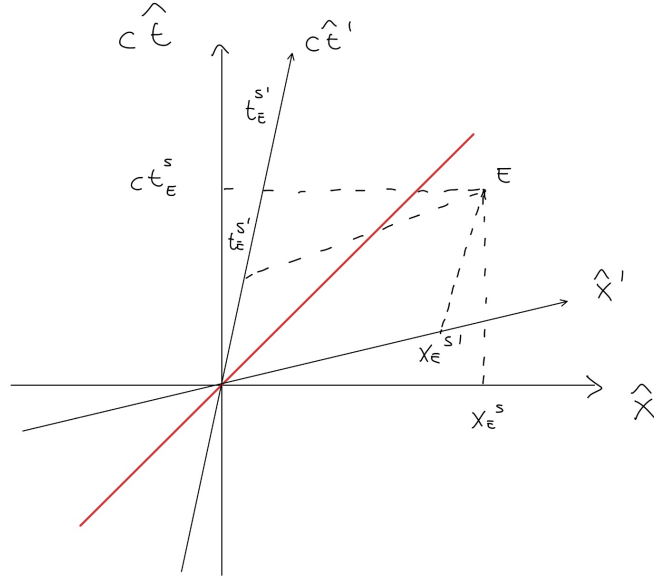


Figura 4: Gli assi del sistema S' rispetto a quelli del sistema S . Il sistema S' ha una velocità relativa β lungo $\hat{x}$ rispetto al sistema S .

ovvero non è altro che la traiettoria dell'origine del sistema S' , $x = vt$. Per $\beta < 1$, cioè $v < c$ quest'asse è nel cono luce dell'origine. Analogamente, l'asse spaziale $\hat{x}'$ è il luogo dei punti in cui $t' = 0$;

$$0 \stackrel{!}{=} ct' = \gamma(ct - \beta x) \implies ct = \beta x \quad (58)$$

Per $\beta < 1$ è fuori dal cono luce dell'origine. Gli assi del sistema S' , visti dal sistema S , sono schiacciati verso la bisettrice. Tanto più β è vicino a 1 tanto più sono schiacciati (vedi figura 4). Notate che la bisettrice del piano $ct - x$ rimane la bisettrice del piano $ct' - x'$: questo mostra graficamente che la velocità della luce è la stessa in entrambi i sistemi di riferimento.

Abbiamo visto nella sezione precedente che la lunghezza di un vettore non cambia se la misuro in sistemi di riferimento ruotati tra loro. Ci piacerebbe trovare una quantità simile che è costante per boost. Si vede subito che la somma dei quadrati delle componenti non è costante. Graficamente, questo si capisce dal fatto che gli assi del sistema S' non sono perpendicolari tra loro nel sistema S , dunque non possiamo usare Pitagora. Si vede però che la differenza

$-(ct)^2 + x^2$ è in effetti costante ¹⁷:

$$\begin{aligned} -(ct')^2 + x'^2 &= -\gamma^2((ct - \beta x)^2 - (x - \beta ct)^2) = \\ &= -\frac{1}{1 - \beta^2}((ct)^2(1 - \beta^2) - x^2(1 - \beta^2) - 2\beta ctx + 2\beta ctx) = \quad (59) \\ &= -(ct)^2 + x^2 \end{aligned}$$

Le "lunghezze" nello spazio di Minkowsky si misurano con un segno diverso. In un certo senso, il motivo per cui il tempo ci appare così diverso dallo spazio è solo questo segno! Notate che questa lunghezza può essere sia positiva che negativa. Se è positiva, $|x| > |ct|$ l'evento è fuori dal cono luce, se è negativa l'evento è dentro. Come abbiamo notato per le rotazioni, trovare una quantità invariante è comodo perché ci permette di fare i conti nel sistema di riferimento che preferiamo.

Possiamo adesso definire che un oggetto è un vettore per boost se le sue componenti temporali e spaziali trasformano per boost come in equazione 54. Come per le rotazioni, anche per i boost si ha che una buona relazione è una relazione tra oggetti che trasformano nello stesso modo, cioè una relazione covariante.

Troviamo adesso altri vettori che si comportano bene rispetto ai boost. Come per le rotazioni possiamo prendere le differenze.

$$x_{E_1}^S - x_{E_2}^S = \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \end{pmatrix} \quad \Delta t = t_2 - t_1 \quad \Delta x = x_2 - x_1 \quad (60)$$

Esercizio: Trovate la dilatazione dei tempi che abbiamo discusso in 3.1 usando la trasformazione di Lorentz:

$$\begin{pmatrix} c\Delta t' \\ \Delta x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \end{pmatrix}$$

Definite dove e quando avvengono i due eventi che considerate e scrivete il vettore differenza. Fate attenzione al sistema di riferimento in cui $\Delta x = 0$, ovvero dove l'orologio è fermo.

La differenza tra due eventi ha tutte le proprietà rispetto ai boost che abbiamo visto. In particolare la sua "lunghezza":

$$\Delta s^2 = -c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 \quad (61)$$

è costante in ogni sistema di riferimento. Questa è detta **intervallo invariante** tra i due eventi E_1 e E_2 . Come abbiamo detto sopra questa può essere sia positiva che negativa. Definiamo

¹⁷Nel caso delle rotazioni, abbiamo mostrato che la lunghezza è costante usando $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. Se avete mai incontrato le funzioni iperboliche, sapete che $\cosh^2\chi - \sinh^2\chi = 1$. Questo ci fa sospettare che la matrice di Lorentz possa essere scritta come una rotazione iperbolica:

$$\begin{pmatrix} \cosh\chi & -\sinh\chi \\ -\sinh\chi & \cosh\chi \end{pmatrix}$$

In effetti questo si può fare, con $\chi = \operatorname{arctanh}\beta$. Il parametro χ è detto rapidità. Seno e coseno iperbolici si possono scrivere come seno e coseno di angoli immaginari, ad esempio $\cosh\chi = \cos i\chi$, $i^2 = -1$, quindi possiamo dire che un boost non è altro che una rotazione di un angolo immaginario!

- $\Delta s^2 < 0$ intervallo di tipo **tempo**
- $\Delta s^2 = 0$ intervallo di tipo **luce**
- $\Delta s^2 > 0$ intervallo di tipo **spazio**

Due eventi separati da un intervallo di tipo tempo sono uno cono luce dell'altro e possono influenzarsi con una comunicazione a velocità $< c$. Due eventi separati da un intervallo di tipo luce possono comunicare solo con qualcosa che viaggia a c . Due eventi di tipo spazio non possono comunicare con qualcosa che viaggia a $v < c$.

Come sempre, gli stessi ragionamenti valgono anche per differenze infinitesime. Vediamo allora come possiamo trovare il tempo proprio per una particella che descrive una traiettoria $x(t)$ nel sistema di riferimento S . Dividiamo la traiettoria in intervalli infinitesimi, e consideriamo la differenza tra i due eventi inizio e fine dell'intervallo. Nel sistema S , questi avvengono a una distanza spaziale dx e una distanza temporale dt . Nel sistema solidale con la particella, questi avvengono nello stesso punto, cioè $dx' = 0$, a una distanza di tempo che è definita come il tempo proprio $dt' = d\tau$. La costanza dell'intervallo invariante allora ci dà subito:

$$\begin{aligned} -c^2 dt^2 + dx^2 &= -c^2 dt'^2 + dx'^2 = -c^2 d\tau^2 \\ d\tau^2 &= dt^2 \left(1 - \frac{dx^2}{c^2 dt^2} \right) \implies d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{\dot{x}(t)^2}{c^2}} \end{aligned} \quad (62)$$

Per le rotazioni dt è costante, quindi potevamo usarlo per dividere il vettore $d\vec{x}$, definendo un nuovo vettore $\vec{v}$ che ha buone proprietà sotto rotazioni. Per i boost questo non è più vero, perché dt non è costante. Se definiamo la velocità $v = dx/dt$, questa non avrà buone proprietà sotto boost. Possiamo infatti vedere come trasforma:

$$\begin{pmatrix} cdt' \\ dx' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cdt \\ dx \end{pmatrix} \implies \begin{cases} cdt' = \gamma(cdt - \beta dx) \\ dx' = \gamma(dx - \beta cdt) \end{cases} \quad (63)$$

ovvero:

$$v' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - \beta cdt}{dt - \frac{\beta dx}{c}} = \frac{\frac{dx}{dt} - \beta c}{1 - \beta \frac{dx}{cdt}} = \frac{v - \beta c}{1 - \frac{\beta v}{c}} \quad (64)$$

Potete verificare che se metto $v = c$ trovo $v' = c$: la velocità della luce è la stessa in entrambi i sistemi di riferimento (per fortuna!). Non fate confusione: v e v' sono le velocità di un oggetto misurate nel sistema di riferimento S e S' , mentre β contiene la velocità relativa tra i due sistemi. Se chiamiamo quest'ultima v_{rel} , si ha $\beta = v_{rel}/c$ e:

$$v' = \frac{v - v_{rel}}{1 - \frac{v v_{rel}}{c^2}} \quad (65)$$

Esercizio: Fate il limite per $c \rightarrow \infty$ dell'equazione sopra e verificate che si ottiene la legge di trasformazione delle velocità galileiane 4.

Abbiamo capito che dx/dt non ha buone proprietà. Se vogliamo definire una velocità che trasformi bene sotto i boost dobbiamo dividere per una costante.

Per fortuna abbiamo un candidato: il tempo proprio. Definiamo allora la quadri-velocità u , con una componente temporale u^0 e una componente spaziale $\vec{u}$, di una particella con tempo proprio τ :

$$\begin{pmatrix} u^0 \\ \vec{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c dt/d\tau \\ d\vec{x}/d\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v)c \\ \gamma(v)\vec{v} \end{pmatrix} \quad (66)$$

Questa trasforma sotto boost con la solita matrice di Lorentz e la sua "lunghezza" è costante.

Esercizio: Trovare la "lunghezza" del quadrivettore velocità. Vi torna che sia costante?

Infine possiamo moltiplicare per la massa della particella e definire il quadrimpulso:

$$\begin{pmatrix} p^0 \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\gamma(v)c \\ m\gamma(v)\vec{v} \end{pmatrix} \quad (67)$$

Piccola nota: la massa di una particella si definisce con il secondo principio della dinamica, che vale in fisica Newtoniana. Quindi la massa per cui moltiplichiamo è quella che si misura nel sistema dove la particella è ferma. A volte questa è detta massa a riposo e indicata con m_0 , ma è l'unica massa che ha veramente senso, quindi la chiamerò semplicemente m . L'importante è sapere che è costante per definizione.

In fisica Newtoniana l'impulso è una quantità conservata durante gli urti, e si può dimostrare che anche la componente spaziale $m\gamma(v)\vec{v}$ del quadrimpulso è conservata¹⁸ ed è la giusta generalizzazione, per cui ha un significato fisico importante. Anche la componente spaziale temporale $m\gamma(v)c$ è una quantità conservata, ed ha la stessa interpretazione dell'altra quantità conservata in meccanica Newtoniana: l'energia! Possiamo allora scrivere:

$$\begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\gamma(v)c \\ m\gamma(v)\vec{v} \end{pmatrix} \quad (68)$$

Esercizio: Trovate la "formula più famosa del mondo":

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$$

calcolando la "lunghezza" del quadrimpulso. In che limite si ottiene la formula scritta su tutte le magliette?

Dalla formula trovata nell'esercizio, vedete che la massa in relatività speciale è una forma di energia che anche un oggetto fermo $p = 0$ possiede. Come tutte le forme di energia si può scambiare durante un urto, per cui la massa delle particelle che entrano in un urto può essere diversa dalla massa delle particelle

¹⁸Notate che qua l'aggettivo conservata ha un significato diverso da quello in cui l'abbiamo usato finora. Prima significava che qualcosa non cambia quando faccio un cambio di sistema di riferimento, adesso indica qualcosa che è la stessa prima e dopo un urto.

che escano (fintanto che l'energia e l'impulso si conservino). Ma la massa delle particelle è una delle cose che le distingue (insieme alla carica elettrica ...). Per cui la relatività ci dice che in un urto le particelle possono "cambiare natura". Inoltre, si può scambiare la massa anche con altre forme di energia. Dalla formula sopra, se diminuisce m , p deve aumentare di conseguenza. Questo è quello che avviene in una reazione nucleare: ogni massa che perdiamo è moltiplicata da un fattore c^2 , che spiega come mai una bomba atomica è così distruttiva, ma anche come mai il Sole funziona così bene.

4.4 Trasformazioni di Lorentz

Concludiamo questa sezione mettendo insieme le rotazioni e i boost e introducendo la notazione che si usa di solito. In generale, gli assi di due sistemi di riferimento inerziali, sono legati da una combinazione di boost e rotazioni: gli assi possono essere orientati diversamente, oppure i due sistemi possono avere una velocità relativa (costante). Come detto più volte un evento è individuato da 4 numeri: una coordinata temporale t , che ci dice dove è avvenuto, e tre coordinate spaziali x, y, z , che specificano dove. In pratica è un vettore colonna a quattro componenti, o quadrivettore:

$$x_E^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix} \quad (69)$$

L'indice greco μ può assumere 4 valori (0,1,2,3) cioè x^μ indica la μ -esima coordinata: $x_E^0 = ct$, $x_E^1 = x$, $x_E^2 = y$, $x_E^3 = z$. La convenzione è di usare una lettera greca come indice ($\mu \nu \rho \dots$). Le componenti spaziali trasformano come un vettore sotto rotazione, la componente temporale si mescola a quelle spaziali sotto boost come abbiamo visto. Ad esempio, per una rotazione nel piano xy e un boost in direzione x , si ha, rispettivamente:

$$\begin{cases} ct' = ct \\ x' = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' = -x \sin \theta + y \cos \theta \\ z' = z \end{cases} \quad \begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (70)$$

ovvero sul quadrivettore agiscono le matrici:

$$R_{xy}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Lambda_x(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (71)$$

D'ora in avanti indicheremo con Λ una generica trasformazione di Lorentz, che

può essere sia una rotazione che un boost.

Esercizio: Vogliamo ricavare la formula 12 per un boost in direzione $\vec{\beta}$ generica. Per semplicità lavoriamo con due direzioni spaziali e una temporale. Scrivete la matrice di rotazione nel piano xy e la matrice di boost lungo x

che agiscono su (ct, x, y) . Scrivete la relazione tra le coordinate del sistema di riferimento S in cui $\vec{\beta}$ è inclinato di un angolo θ rispetto all'asse $\hat{x}_1$ e quelle di un sistema S' in cui $\vec{\beta}$ punta lungo l'asse $\hat{x}'_1$. Nel sistema di riferimento S' potete usare la trasformazione 13 perché la velocità relativa è lungo un asse. Scrivete le coordinate nel sistema S'' boostato. Scrivete le coordinate nel sistema S''' , boostato rispetto S , dove la velocità relativa ha un angolo $-\theta$.

Le componenti spaziali trasformano come un vettore, quindi la lunghezza $|\vec{x}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$ non cambia se facciamo una rotazione. Inoltre, come abbiamo visto la combinazione $-c^2t^2 + x^2$ non cambia per boost (lungo x). Concludiamo che il **modulo** del quadrivettore:

$$|x_E^\mu|^2 = -ct^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -c^2t^2 + |\vec{x}|^2 \quad (72)$$

è costante in ogni sistema di riferimento inerziale.

Ormai siamo abituati: definiamo quadrivettore un oggetto che trasforma come abbiamo visto sopra. Come sempre tutto quello che abbiamo detto per il quadrivettore posizione vale per ogni quadrivettore v^μ . Spesso si utilizza la seguente notazione per il modulo di un quadrivettore:

$$|v^\mu|^2 = v^\mu v_\mu \quad (73)$$

dove v_μ è un quadrivettore con le stesse componenti di v^μ ma con un segno meno nella parte temporale:

$$v^\mu = \begin{pmatrix} v^0 \\ \vec{v} \end{pmatrix} \quad v_\mu = \begin{pmatrix} v_0 \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v^0 \\ \vec{v} \end{pmatrix} \quad (74)$$

Gli indici ripetuti "si sommano" (convenzione di Einstein):

$$v^\mu v_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^3 v^\mu v_\mu = v^0 v_0 + v^1 v_1 + v^2 v_2 + v^3 v_3 = -(v^0)^2 + |\vec{v}|^2 \quad (75)$$

e vediamo che si riproduce il modulo del quadrivettore. I quadrivettori con gli indici in alto si dicono **covarianti**, quelli con gli indici in basso **controvarianti**. Possiamo ottenere il vettore controvariante dal vettore covariante con una matrice η che cambia il segno della prima componente:

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \quad (76)$$

Questo prodotto tra matrici si indica:

$$v_\mu = \eta_{\mu\nu} v^\nu \quad (77)$$

dove $\eta_{\mu\nu}$ è l'elemento (μ, ν) della matrice η :

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (78)$$

e vale la convenzione di sommare indici ripetuti.

Esercizio: Verificare che la convenzione di Einstein di sommare indici ripetuti riproduce il prodotto righe per colonne tra matrici.

Vedete allora che la matrice η dà le lunghezze dei quadrivettori:

$$|v^\mu|^2 = v^\mu v_\mu = \eta_{\mu\nu} v^\mu v^\nu \quad (79)$$

La matrice che ci dice come misurare le lunghezze è chiamata **metrica**. La matrice η è una metrica costante detta metrica di Minkowsky. Notate che la metrica ha un ruolo molto importante. Ad esempio, un raggio di luce descrive la traiettoria $dx^2 = c^2 dt^2$, cioè $\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0$. La metrica determina come si muovono i raggi di luce, ovvero come sono orientati i coni luce. In relatività speciale abbiamo visto che la metrica è quella di Minkowsky, ed è costante. In relatività generale, invece, anche la metrica diventa una variabile della teoria, che dipende dal contenuto di energia in ogni punto: questo è quello che si intende quando si dice che l'energia curva lo spaziotempo!

Notate adesso che i quadrivettori controvarianti non possono trasformare sotto boost e rotazioni con la stessa matrice con cui trasformano quelli covarianti, perché il prodotto tra i due deve rimanere uguale. Invece i vettori controvarianti, devono trasformare con la matrice inversa. Usando la notazione di sopra, sotto una trasformazione di Lorentz generica, si deve avere:

$$v^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu v^\nu \quad v_\mu \rightarrow (\Lambda^{-1})^\nu_\mu v_\nu \quad (80)$$

Per consistenza si deve avere $\Lambda\eta\Lambda^{-1} = \eta$ ¹⁹ e potete verificare che questo è vero.

In generale, possiamo caratterizzare gli oggetti che ci interessano in una teoria fisica in base a come trasformano. Alcuni oggetti, detti tensori, hanno più indici, sia in alto che in basso. Ogni indice in alto trasforma come un vettore covariante, ogni indice in basso come un vettore controvariante. Ad esempio:

$$T^\mu_\nu \rightarrow \Lambda^\mu_\rho (\Lambda^{-1})^\sigma_\nu T^\rho_\sigma \quad (81)$$

Concludiamo questa sezione riprendendo il principio di relatività. Abbiamo detto che una legge fisica non deve dipendere dal sistema di riferimento in cui la considero, e abbiamo visto che questo è vero se la legge è una relazione tra oggetti che trasformano nello stesso modo, ovvero se è espressa in modo covariante. La notazione con gli indici in alto e in basso ci aiuta: una legge è covariante se è una relazione tra oggetti con gli stessi indici nello stesso posto. Ad esempio:

$$G^\mu_\nu = \frac{8\pi G}{c^4} T^\mu_\nu \quad (82)$$

è una buona equazione, mentre:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^\mu_\nu + 42u_\mu \quad (83)$$

non lo è. Notate anche che due indici "contratti" T^ρ_ρ non trasformano, per lo stesso motivo per cui $v^\mu v_\mu$ è invariante.

¹⁹Questa richiesta è sufficiente a determinare la forma più generica di Λ , e storicamente è stato il modo in cui sono state trovate le matrici di Lorentz.

5 Argomenti di conversazione

Non sapete più di cosa parlare con un vostro amico? Leggendo questa sezione potrete spiegargli quanto pesa la luce e quanto veloce possono andare le cose.

5.1 Un etto di luce

Abbiamo capito che la velocità della luce ha un ruolo fondamentale in relatività speciale e nella fisica in generale. Tuttavia alcune espressioni che abbiamo scritto sono patologiche per $v \rightarrow c$. In particolare, il fattore γ :

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \xrightarrow{v \rightarrow c} \infty \quad (84)$$

diventa infinito. Sembrerebbe allora problematico descrivere oggetti che si muovono alla velocità della luce, tra cui la luce stessa. In particolare, l'energia di una particella che si muove alla velocità della luce $E = m\gamma(c)c^2$ sembrerebbe essere infinita.

In generale, possiamo esprimere la velocità di un oggetto $v = dx/dt$ (in un certo sistema di riferimento) in funzione del suo impulso e della sua energia, usando le equazioni 68:

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{E}c^2 \quad (85)$$

Se sostituiamo la relazione $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$, otteniamo:

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{\sqrt{m^2c^2 + p^2}}c \quad (86)$$

Questa è la relazione tra impulso e velocità, che generalizza quella della meccanica Newtoniana $\vec{v} = \vec{p}/m$. Come abbiamo detto, l'impulso è una quantità conservata, quindi è fisicamente più importante della velocità. Comunque, dall'espressione sopra, si vede che:

$$|\vec{v}| = c \iff m = 0 \quad (87)$$

Ovvero, un oggetto si può muovere alla velocità della luce se e solo se la sua massa è nulla. Notate che questo risolve il problema dell'energia infinita: $E = m\gamma(c)c^2 = 0 \cdot \infty$ può essere un numero finito. In effetti l'energia di una particella che si muove alla velocità della luce è data da $E = pc$. Può risultare contro intuitivo pensare a qualcosa che esiste ma ha massa nulla. In realtà, noi ci accorgiamo dell'esistenza di qualcosa quando questa interagisce con noi, e in un'interazione la quantità conservata e scambiata è l'energia (e l'impulso). Quindi qualsiasi oggetto che ha un'energia "esiste". In meccanica Newtoniana l'energia è $E = \frac{1}{2}mv^2$, quindi un oggetto di massa nulla non ha energia. Tuttavia questa è solo un'approssimazione della formula generale, dove si vede che massa e movimento (cioè impulso) sono due forme distinte di energia.

5.2 Non è colpa mia

Probabilmente avete sentito che la velocità della luce è la massima velocità a cui un oggetto può muoversi, ma finora non abbiamo visto il perché. Si vede

facilmente che un oggetto massivo non può essere accelerato fino a $v = c$, e quindi non può superare la velocità della luce. Infatti, se $m \neq 0$, $E = m\gamma(c)c^2 = \infty$: poiché l'energia si conserva dovremmo dare un'energia infinita per portare un oggetto massivo a $v = c$. D'altra parte abbiamo visto che se $m = 0$ allora $v = c$, anche in questo caso non superiamo la velocità della luce. Tuttavia rimane un'altra possibilità. Dalla formula 86 vedete che:

$$v > c \implies \sqrt{m^2 c^2 + p^2} < p \implies m^2 < 0 \quad (88)$$

ovvero solo le particelle con massa immaginaria ²⁰ possono andare più veloci della luce! A queste ipotetiche particelle che non sono mai state osservate è stato dato il nome di tachioni ²¹. Questo sembrerebbe provare che nessuna particella "normale" può viaggiare a $v > c$. Tuttavia, abbiamo visto diverse stranezze finora, e particelle con massa immaginaria alla fine non sembrano così strane.

Il motivo per cui ci aspettiamo che non esistano tachioni, e per cui la relatività "predice" che la velocità della luce sia un limite invalicabile, è più profondo, ed è legato alla **causalità**. Una relazione di causalità tra due eventi A e B , è una relazione del tipo:

$$L'evento A ha causato l'evento B$$

Affinché questo sia possibile, l'evento A deve essere successo prima dell'evento B : $\Delta t = t_B - t_A > 0$. In relatività, però, l'intervallo di tempo tra due eventi dipende dal sistema di riferimento in cui lo misuriamo, quindi per dire che A ha causato B , dobbiamo richiedere che Δt sia maggiore di zero in ogni sistema di riferimento. Mostriamo che questo è possibile solo se gli eventi A e B sono separati da una distanza di tipo tempo: $\Delta s^2 < 0$. Supponiamo infatti che Δt sia maggiore di zero in un certo sistema di riferimento, e che i due eventi siano separati da una distanza di tipo spazio ($\Delta t > 0$, $\Delta s^2 > 0$). Trasformando in un altro sistema di riferimento che si muove con una velocità relativa v_{rel} :

$$c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta\Delta x) \quad (89)$$

ma:

$$\Delta s^2 < 0 \implies c\Delta t > |\Delta \vec{x}| \quad \text{o} \quad c\Delta t < -|\Delta \vec{x}| \quad (90)$$

Scegliendo la prima per $\Delta t > 0$ e sostituendo in equazione 89 si trova, se $\beta < 1$, cioè se $v_{rel} < c$:

$$\Delta t' > 0 \quad (91)$$

ovvero un evento che è nel mio futuro rispetto a me, lo è anche rispetto a un osservatore in movimento. Se calcio un pallone e rompo un vetro, sia chi è fermo rispetto a me che chi è in movimento può dire che la colpa è mia.

Vediamo perché questo non è possibile per eventi di tipo spazio. Anzitutto la dimostrazione sopra non vale più ($\Delta s^2 > 0$), anzi si può mostrare (provate) che esiste sempre un sistema di riferimento in cui $\Delta t'$ cambia segno. Possiamo intuirlo geometricamente dal diagramma di Minkowski. Come abbiamo detto, l'asse x' di un osservatore O' con velocità $v = \beta c$ è il luogo dei punti a $t' = 0$,

²⁰Ricordiamo che l'unità immaginaria i ha la proprietà $i^2 = -1$. Possiamo allora esprimere la massa di un tachione come $m_T = iM$.

²¹Qualche tempo fa sembrava che fossero state osservate al CERN, ma si trattava solo di un filo elettrico collegato male ...

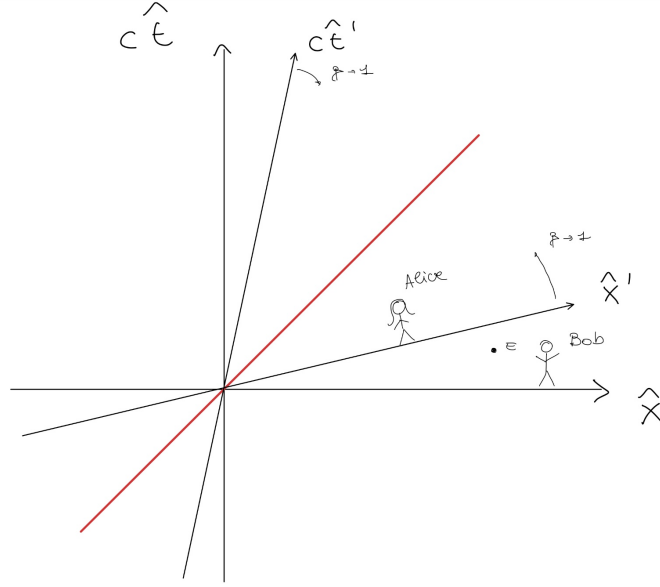


Figura 5: Tra eventi separati da una distanza di tipo spazio (in figura: l'evento E e l'origine) non ci può essere una relazione causale. Per Bob l'evento E è nel futuro dell'origine, per Alice è nel passato.

ovvero la retta $ct = \beta x$. Al variare di $v_{rel} < c$ questa retta varia dall'asse $\hat{x}$ alla bisettrice, ovvero spazia tutti gli eventi di tipo spazio. Gli eventi nel futuro dell'osservatore O' sono quelli sopra questa retta. Si vede subito allora che posso sempre trovare una retta (una velocità) rispetto alla quale un punto di tipo spazio sta sotto e quindi è nel passato. Concludiamo allora che se potessimo inviare segnali più veloci della luce, violeremmo la causalità. Infatti con un segnale a $v > c$ partito dall'origine del nostro sistema di riferimento potremmo influenzare un evento di tipo spazio. In un certo sistema di riferimento, però, questo evento è successo prima che il segnale partisse e quindi non ne può essere influenzato. Inoltre se due sistemi di riferimento potessero avere velocità relativa maggiore di c , la dimostrazione sopra non varrebbe neanche per eventi di tipo tempo: posso sempre portare la retta $t' = 0$ sopra a qualsiasi evento. Non potremmo stabilire una relazione di causa effetto tra nessuna coppia di eventi: fare fisica in questo mondo sarebbe molto più complicato ²².

Concludiamo, notando che questo ragionamento cambia la nozione di presente, passato e futuro. Infatti io posso essere influenzato solo dagli eventi nel cono luce $\Delta s^2 < 0, \Delta t < 0$, e posso influenzare gli eventi solo nel cono luce $\Delta s^2 < 0, \Delta t > 0$. Chiamiamo allora il primo **passato**, il secondo **futuro**, mentre tutti gli eventi fuori dal mio cono luce sono il mio *presente*. Il presente non è un istante di tempo, ma un insieme di eventi che non posso raggiungere in nessun modo (viaggiando a $v < c$).

²²Pensate per esempio che gli eventi A e B siano: A="faccio cadere un bicchiere" e B="il bicchiere si rompe": non potremmo dire che il bicchiere si rompe *perché* l'ho fatto cadere: sicuramente ci sarebbe molta meno responsabilità!

6 Esercizi

6.1 Un treno di fisici

Un gruppo di fisici sta andando in treno all'inaugurazione del nuovo acceleratore di particelle che sicuramente scoprirà la supersimmetria. Un gruppo di ingegneri, gelosi dei fisici, decide di fare un attentato al treno e piazza due bombe all'ingresso e all'uscita di una galleria in cui dovrà passare il treno dei fisici. Il treno ha lunghezza L mentre la galleria ha lunghezza $L/2$. Gli ingegneri decidono di far esplodere entrambe le bombe quando l'inizio del treno è all'uscita della galleria. Per fortuna gli ingegneri non conoscono la relatività ristretta e i fisici riescono a salvarsi andando abbastanza veloci.

1. Scrivere i quadrivettori corrispondenti all'esplosione delle due bombe nel sistema degli ingegneri. Specificare l'origine spaziale e temporale utilizzata.
2. Scrivere gli stessi quadrivettori nel sistema dei fisici, supponendo che il treno vada a velocità v .
3. Qual è la minima velocità v con la quale i fisici si salvano?
4. Secondo gli ingegneri come hanno fatto i fisici a salvarsi? E secondo i fisici?

6.2 Scossa?

In un filo, una densità di carica lineare ρ (in un pezzo lungo l di filo c'è una carica $Q = \rho l$) si muove a velocità v_ρ . Parallelamente al filo, a una distanza d , si muove un elettrone a velocità v , che subisce una forza.

1. Trovare l'espressione della corrente I nel filo in funzione di ρ e di v_ρ .
2. Trovare le densità a riposo ρ_0 delle cariche che percorrono il filo in funzione di ρ .
3. Notate che la corrente $I = \rho v_\rho = \rho_0 \gamma(v) v_\rho$ è la componente spaziale di un quadrivettore. Giustificate che:

$$j^\mu = \begin{pmatrix} \rho c \\ \rho \vec{v}_\rho \end{pmatrix}$$

trasforma come un quadrivettore, detto quadricorrente. La componente temporale è la densità (lineare) di carica, la componente spaziale è la corrente.

4. Scrivere la quadricorrente che agisce sull'elettrone nel sistema di riferimento in cui il filo è fermo. Trovare la forza che agisce sull'elettrone. Cosa la causa?
5. Trovare la quadricorrente che agisce sull'elettrone nel sistema di riferimento in cui l'elettrone è fermo. Trovare la forza che agisce sull'elettrone. Cosa la causa?

6. Trovare la quadricorrente che agisce sull'elettrone nel sistema di riferimento in cui la densità di carica è ferma. Trovare la forza che agisce sull'elettrone. Cosa la causa?

Ricordate che il campo magnetico prodotto da un filo percorso da corrente, a una distanza r , ha modulo $B = \mu_0 I / 2r$ e direzione data dalla regola della mano destra, e il campo elettrico prodotto da una densità lineare ρ , ha modulo $\rho / 2\pi r \epsilon_0$ e direzione radiale.

6.3 God bless America

In questo esercizio "risolviamo" il paradosso dei gemelli. L'America organizza una missione spaziale per esportare democrazia, con una navicella che si inoltra nello spazio profondo (che sappiamo essere pieno di petrolio) e torna indietro. La traiettoria della navicella vista dalla Terra è supposta in una dimensione per semplicità, è:

$$\begin{cases} x = vt & 0 < t \leq T - a \\ x = -\frac{v}{2a}(t - T)^2 + v(T - a) + \frac{av}{2} & T - a < t \leq T + a \\ x = v(2T - t) & T - a < t \leq 2T \end{cases} \quad (92)$$

Le costanti v ed a sono parametri della traiettoria che inizialmente supponiamo dati. La comandante della missione è Alice, mentre suo fratello gemello Bob rimane a Terra. La missione dura in totale $2T = 1$ anno terrestre.

1. Quanto è il tempo proprio passato per Bob quando Alice torna dalla missione?
2. Per Alice invece? date la risposta in funzione dei parametri a e v ?
3. Alice è stanca di Bob, così prende i comandi della navicella e modifica i parametri a e v . Che valori deve utilizzare affinché un anno sulla navicella corrisponda a 80 anni sulla Terra?

Può essere utile l'integrale:

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2}(a \sin(x) + x\sqrt{1-x^2}) \quad (93)$$

e sapere che il corpo umano può sopportare accelerazioni fino a 5g.

6.4 Non cambiare niente

Scrivete la matrice che manda un vettore (di quante dimensione volete) in se stesso. Scrivere la matrice di un boost di Lorentz in direzione $\hat{y}$ e in direzione $\hat{z}$.

6.5 L'equazione più famosa del mondo

Utilizzate gli sviluppi di Taylor per dare un'espressione dell'energia di una particella con $v \ll c$. Che interpretazione fisica ha questo risultato?