

Fluidodinamica

Daniele Battesimo Provenzano*

7 febbraio 2026



Sommario

Dopo un breve antipasto idrostatico, i primi piatti saranno basati sull'equazione di Bernoulli e sulle sue ipotesi di lavoro: verranno discussi i miti e gli errori più diffusi sia tra gli studenti che tra gli insegnanti. Per ognuna delle ipotesi di lavoro, verranno forniti esempi di non-applicabilità. Le seconde portate conterranno delle generalizzazioni dell'equazione di Bernoulli, in grado di superare i limiti di non-applicabilità incontrati precedentemente. Il dolce avrà un sapore sperimentale, con una dimostrazione fatta dal vivo. Caffè e ammazzacaffè non pervenuti.

*daniele.provenzano@sns.it oppure daniele.battesimo.provenzano@gmail.com

— INDICE —

1	Idrostatica	3
2	Conservazione della portata	5
3	Equazione di Bernoulli ristretta	7
3.1	Falsi paradossi e inconsistenze	8
4	Generalizzazioni dell'equazione di Bernoulli ristretta	14
4.1	Equazione di Bernoulli per fluidi viscosi	15
4.2	Equazione di Bernoulli per flussi non stazionari	17
4.3	Equazione di Bernoulli per flussi rotazionali	20
4.4	Equazione di Bernoulli per fluidi comprimibili	21
4.5	Equazione di Bernoulli per flussi turbolenti	24
5	Rottura delle linee di flusso	24
6	Forza sui condotti	29

SEZ. 1 — IDROSTATICA

Quando si parla di idrostatica, ci si riferisce alle situazioni in cui, in un particolare sistema di riferimento, ogni parte del fluido è ferma. In questa situazione, valgono le seguenti leggi.

- **Legge di Pascal:** *In un fluido incompressibile in equilibrio, una variazione di pressione applicata in un punto del fluido si trasmette inalterata a tutti gli altri punti del fluido e alle pareti del recipiente che lo contiene.*

Esempio 1.1 (Torchio idraulico). Il torchio idraulico è utilizzato nell'industria per tirare su carichi molto grandi e comprimere materiali, ad esempio nei sollevatori per automobili e nelle presse idrauliche. Il suo principio di funzionamento sfrutta la legge di Pascal. Esso è costituito da due cilindri comunicanti, riempiti di fluido incompressibile (generalmente olio di qualche tipo), dotati di pistoni di aree diverse A_1 e A_2 . Applicando una forza F_1 sul pistone di area minore si genera nel fluido una variazione di pressione

$$\Delta p = \frac{F_1}{A_1}.$$

Per la legge di Pascal, tale variazione di pressione si trasmette inalterata a tutto il fluido e agisce anche sul pistone di area maggiore, producendo una forza

$$F_2 = \Delta p A_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1}.$$

Il dispositivo consente quindi di amplificare la forza. Questa amplificazione non viola la conservazione dell'energia: lo spostamento h_2 del pistone grande è minore di quello del pistone piccolo h_1 , in modo che il lavoro meccanico resti invariato (in assenza di perdite). Infatti, per la conservazione del volume si ha $A_1 h_1 = A_2 h_2$.

- **Legge di Stevino:** *In un fluido in quiete e a densità uniforme, la pressione aumenta con la profondità a causa del peso del fluido sovrastante. Se si sceglie come riferimento una superficie in cui la pressione vale p_0 , la pressione p a una profondità Δz al di sotto di tale superficie è data da*

$$p(h) = p_0 + \rho g \Delta z,$$

dove ρ è la densità del fluido e g l'accelerazione di gravità.

La legge di Stevino, nella formulazione appena presentata, vale solamente per campi gravitazionali omogenei e per fluidi a densità omogenea. Possiamo rimuovere entrambi i vincoli e scrivere un'equazione più generale, cioè

$$\frac{dp}{dz} = -\rho(z)g(z), \quad (1.1)$$

che va integrata opportunamente. Ad esempio, all'interno delle stelle, il gradiente di pressione è dato da

$$\frac{dp}{dr} = -\rho(r) \frac{Gm(r)}{r^2} = -\rho(r) \frac{G}{r^2} \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr'.$$

Il problema sta nel trovare una buona espressione per $\rho(r)$! Questo non è affatto banale.

Problema 1.1. Un blob sferico di acqua fluttua nello spazio in assenza di perturbazioni gravitazionali esterne. Se il raggio del blob è R la pressione dello spazio circostante è p_0 , quanto vale la pressione al centro?

Problema 1.2. Consideriamo una sbarretta rigida cava, contenente del fluido incompressibile di densità ρ . La sbarretta viene messa in rotazione attorno a un asse passante per una delle sue estremità, con velocità angolare ω . Trova la dipendenza della pressione del fluido dalla distanza dall'asse di rotazione.

L'equazione Eq. (1.1) vale solo nei casi in cui il campo esterno varia solamente lungo un'unica coordinata, come x in cartesiane o r in polari. Più in generale, l'equazione di riferimento è

$$\vec{\nabla} p = -\rho(z) \vec{g}(z), \quad (1.2)$$

che, nel caso di fluido incompressibile in un campo conservativo il cui potenziale è φ , restituisce

$$\vec{\nabla} p = \vec{\nabla} (\rho \varphi), \quad (1.3)$$

che implica che le superfici a pressione costante coincidono con quelle a potenziale costante.

Problema 1.3 (Preso da *200 More Puzzling Physics Problems*). Un tubo a forma di U contiene un liquido inizialmente all'equilibrio, sotto l'azione di un campo gravitazionale omogeneo diretto verso il basso. Se una palla molto pesante viene avvicinata al tubo come mostrato in Fig. 1, come si dispongono i livelli del liquido nei due rami del tubo?

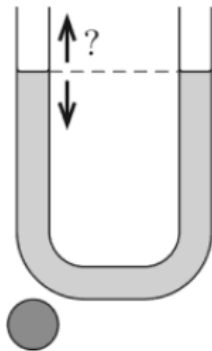


Figura 1: Corpo attrattore posizionato accanto a un tubo a U .

Problema 1.4. Un fluido incompressibile di densità ρ è permeato da un campo gravitazionale omogeneo diretto come $\hat{x}$. In un punto del fluido viene messo un corpo attrattore puntiforme che genera un campo centrale del tipo $\vec{f}(\vec{r}) = -\alpha \hat{r}$, dove $\vec{r}$ indica la direzione radiale uscente dal punto in cui esso è posizionato. Trova la forma delle superfici a pressione costante nel fluido.

Una volta che si conosce la pressione $p(\vec{r})$ in tutti i punti del fluido è possibile, ad esempio, calcolare la forza agente su oggetti immersi nel fluido, tramite la relazione

$$\vec{F} = \oint_S p(\vec{r}) \hat{n} dS, \quad (1.4)$$

dove S è l'intera superficie che racchiude l'oggetto e $\hat{n}$ è il versore normale alla superficie dell'oggetto ed entrante in esso. Fare questo conto nel caso di un fluido sottoposto a un campo gravitazionale omogeneo, porta alla forza data dalla legge di Archimede.

- **Legge di Archimede:** *Un corpo di volume V immerso in un fluido di densità uniforme subisce una forza risultante diretta verso l'alto pari al peso del fluido spostato, cioè $\rho g V$.*

Le assunzioni di questa legge sono le stesse di quelle della legge di Stevino, quindi è possibile generalizzarla al caso di densità non uniformi e campi di forza non omogenei, non necessariamente quello gravitazionale.

SEZ. 2 — CONSERVAZIONE DELLA PORTATA —

Introduciamo alcune definizioni che serviranno per tutto il resto della lezione.

- *Fluido incompressibile*: la densità di tutti gli elementi fluidi è costante nel tempo.
- *Fluido non viscoso*: non ci sono perdite di energia dovute al fatto che i vari elementi fluidi strisciano l'uno sull'altro.
- *Flusso irrotazionale*: il campo di velocità ha circuitazione nulla per qualsiasi curva chiusa. In soldoni, non ci sono vortici e la velocità non ruota attorno a nessun punto.
- *Flusso stazionario*: il flusso è sempre uguale a sé stesso. Il campo di velocità non cambia nel tempo.¹
- *Flusso laminare*: gli elementi fluidi seguono linee di flusso ordinate e distinte.
- *Flusso turbolento*: gli elementi fluidi seguono un moto caotico e non prevedibile, le linee di flusso si intersecano e cambiano nel tempo.

Consideriamo un tubo di sezione variabile $A(x)$, che si estende in direzione x come in Fig. 2. Vogliamo scrivere la conservazione della quantità di materia per un fluido che scorre dentro il

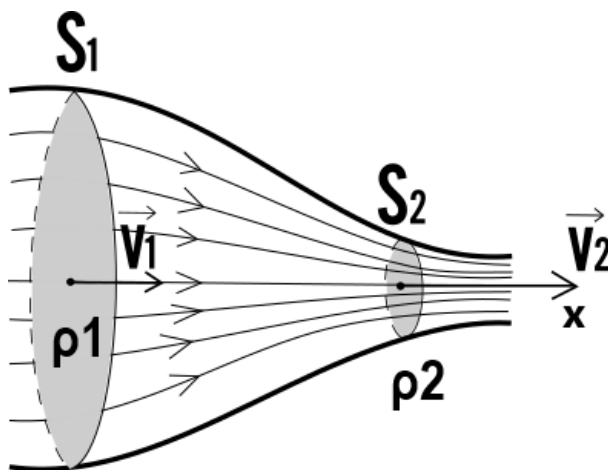


Figura 2: Tubo con sezione variabile.

tubo con velocità orizzontale $v(x)$ e densità $\rho(x)$, in situazione stazionaria. Dobbiamo imporre che, presa la zona di tubo compresa tra due generiche coordinate x_1 e x_2 , tanta materia entra quanta ne esce. Ciò è vero se il flusso di materia attraverso la sezione $A(x)$ è costante, cioè indipendente da x . In formule

$$\Phi_m = \frac{dm}{dt} = \frac{\rho(x)A(x)dx}{dt} = \rho(x)A(x)v(x) = \text{costante}.$$

In generale il ragionamento resta valido se la velocità dipende dal tempo. Il risultato trovato invece non vale se è ρ a dipendere dal tempo. Infatti, a differenza di prima, in questo caso si può avere un accumulo temporaneo di materia nella regione compresa tra x_1 e x_2 . Detta M la massa di fluido compresa in questa regione, la sua variazione nel tempo è uguale al flusso netto entrante:

$$\frac{dM}{dt} = \Phi_m^1 - \Phi_m^2 = \rho(x_1, t)A(x_1)v(x_1, t) - \rho(x_2, t)A(x_2)v(x_2, t).$$

¹Qui bisogna fare molta attenzione alla terminologia. Infatti, in Inglese esistono due parole legate a questo concetto: *stationary* e *steady*. La seconda è la parola giusta, che significa esattamente quello che è stato scritto su nel testo. *Stazionario*, invece, potrebbe far pensare a una situazione ferma. Purtroppo, non esiste un corrispettivo italiano per *steady*, ma ricordate che ogni volta che parleremo di flussi (non)stazionari saranno da intendersi nel senso di (un)steady.

Quest'ultima quantità può essere positiva o negativa, in base alle condizioni esterne che regolano il valore della densità

Esempio 2.1 (Rubinetto). *Da un rubinetto di sezione A_0 fuoriesce acqua alla velocità $\bar{v}_0$, rivolta verso il basso. Trova la sezione del flusso a una generica quota z , se il rubinetto è posto ad altezza h .*

Dato che la densità è costante, vale

$$v_z A(z) = v_0 A_0, \quad \implies \quad A(z) = \frac{v_0 A_0}{v_z} = \frac{A_0}{\sqrt{\frac{2g(h-z)}{v_0^2} + 1}},$$

dove v_z è stata trovata imponendo la conservazione dell'energia meccanica. Quindi, la sezione del flusso si restringe perché la velocità aumenta.²

Esempio 2.2 (Chiudere il rubinetto). *Quando mettiamo un dito davanti alla bocca del rubinetto la velocità del flusso aumenta per mantenere costante la portata di acqua. Invece, quando azioniamo la maniglia per chiudere progressivamente il rubinetto, la portata di acqua diminuisce. A cosa è dovuta questa differenza?*

Quando ostacoliamo il getto d'acqua con un dito, riduciamo la sezione di uscita del fluido. In questa situazione, se l'ostruzione è piccola, l'acqua continua a scorrere quasi come se fosse un fluido ideale: la portata resta approssimativamente costante e la velocità di uscita aumenta. È per questo che il getto diventa più sottile e più veloce.

Quando invece azioniamo la maniglia del rubinetto, la sezione interna del condotto diminuisce progressivamente. In questo caso, però, la velocità dell'acqua non aumenta: al contrario, la portata diminuisce sempre di più fino a fermarsi. Anche qui stiamo riducendo una sezione, ma il risultato è diverso. Perché?

La differenza sta nel modo in cui l'acqua viene disturbata. La valvola interna del rubinetto ha una forma tale che, quando inizia a chiudersi, il flusso diventa rapidamente irregolare e turbolento. Questo provoca una dissipazione di energia sotto forma di vortici e attrito: una parte dell'energia del fluido "si perde" prima di arrivare all'uscita. Questa perdita di energia prende il nome di *exit loss*. A causa di queste perdite, la pressione disponibile per spingere l'acqua diminuisce e quindi anche la portata si riduce. In altre parole, l'acqua non riesce più a trasformare efficacemente la spinta data dalla pressione in velocità.

Nel caso del dito davanti al rubinetto, invece, per ostruzioni moderate le perdite di energia sono piccole e concentrate solo all'uscita. Per questo motivo l'acqua riesce ancora ad accelerare. Tuttavia, se chiudiamo quasi completamente il foro con il dito, anche in questo caso le perdite aumentano, la pressione sul dito cresce (ce ne accorgiamo facilmente) e la portata diminuisce, fino ad annullarsi del tutto.

²Dato che la sezione diminuisce, la componente radiale della velocità v_r è non nulla. Quindi, a rigore dovremmo tenere conto anche di questa quando imponiamo la conservazione dell'energia. Tuttavia $v_r \ll v_z$ se v_0 è abbastanza grande, quindi possiamo trascurare questo contributo.

SEZ. 3 — EQUAZIONE DI BERNOULLI RISTRETTA

Quando si studia la meccanica dei fluidi ci si imbatte per forza nell'equazione di Bernoulli. La piaga di questo argomento è che ad esso sono comunemente associate nozioni sbagliate, sia dai professori che dai libri di testo. Nel resto della lezione smonteremo alcuni di questi falsi miti.³

Siano p , ρ , v e ϕ rispettivamente la pressione, la densità, la velocità e l'energia potenziale per unità di massa in un generico punto del fluido. Ad esempio, nel caso gravitazionale si ha $\phi = gz$, quindi potete considerare gz al posto di ϕ ogni volta che comparirà nei paragrafi a seguire. Lasciare scritto ϕ serve a ricordarci che il teorema di Bernoulli, in qualsiasi sua forma, vale in tutti i campi di forza che ammettono potenziale, quindi conservativi.

Teorema (Equazione di Bernoulli ristretta). (1°) Si consideri un flusso **laminare**, **stazionario** e **irrotazionale** di un fluido **incomprimibile** e **non viscoso**. La quantità

$$B = p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\phi$$

è **uniforme in tutti i punti del flusso**. (2°) Nel caso in cui manchi solo l'ipotesi di irrotazionalità, la stessa quantità è **uniforme soltanto lungo la singola linea di flusso**. In generale, il suo valore cambia da linea di flusso in linea di flusso.

Ricordate: nei problemi di fluidodinamica, la maggior parte dei paradossi e delle inconsistenze che si incontrano sono causati da un uso improprio del teorema di Bernoulli. Tantissime volte capita di invocarlo dimenticandosi delle ipotesi che esso richiede: non bisogna stupirsi se poi qualcosa non torna. Provate a capire quali ipotesi saltano in ognuna delle configurazioni mostrate in Fig. 3. A seguire, analizzeremo qualcuno di questi falsi paradossi.

³La dimostrazione scolastica, che viene fornita anche nei corsi universitari introduttivi, è sbagliata per tanti motivi. Su tutti, non è vero che l'energia di un fluido stazionario si conserva! Essa viene trasportata assieme al fluido. Inoltre, la dimostrazione non tiene conto delle ipotesi del teorema: non viene mai detto e non si capisce quando esse entrano in gioco. Una dimostrazione di tipo scolastico, ma fatta molto bene, è fornita in [questo articolo](#), che pone rimedio alla dimostrazione standard (sbagliata e incompleta).



Figura 3: 11 esempi di non applicabilità dell'equazione di Bernoulli ristretta: un palloncino che si sta sgonfiando, un irrigatore rotante, un secchio rotante, un pallone rototraslante in aria, un contenitore d'acqua riempito dal basso, un flusso di vapore in una ciminiera, del vento che alimenta una pala eolica, un'arteria, un contenitore che si sta svuotando tramite un foro, una massa d'acqua in caduta libera e un imbuto che si sta svuotando.

3.1 Falsi paradossi e inconsistenze

Esempio 3.1 (Paradosso del fumatore). *Supponiamo che un fumatore stia guidando un'auto a velocità u costante su una strada rettilinea, con i finestrini leggermente aperti. Dal punto di vista del fumatore, l'aria all'esterno dell'auto si muove a una velocità maggiore rispetto all'aria all'interno. Secondo il teorema di Bernoulli in forma ristretta, maggiore è la velocità, minore è la pressione. Pertanto, il fumo dovrebbe uscire fuori dall'auto perché il gas tende ad andare dove la pressione è minore. Ma secondo la relatività (anche quella galileiana), poiché qualsiasi sistema di riferimento inerziale è valido, una persona ferma a terra mentre l'auto passa vede che l'aria all'interno dell'auto si muove più velocemente di quella all'esterno, quindi, per lei la pressione all'interno dell'auto è inferiore rispetto a quella fuori. Questo significa che l'aria tenderebbe a entrare nell'auto, mantenendo il fumo dentro. Ecco che abbiamo trovato un paradosso. Come si risolve? Il fumo rimane all'interno dell'auto o viene spinto fuori?*

L'inghippo sta nel fatto che per uno dei due osservatori il flusso non è stazionario! Per un osservatore solidale con l'auto, a meno di effetti turbolenti, l'aria dentro di essa e l'aria dall'esterno costituiscono dei flussi stazionari: egli vede l'aria dentro ferma e l'aria fuori venirgli incontro alla velocità u . Questo vale **sempre**, per ogni istante temporale. Invece, quando l'auto passa, un osservatore posto a terra rileva un soffio d'aria che si smorza subito dopo. Inoltre, egli vede l'aria dentro l'auto occupare posizioni diverse durante lo scorrere del tempo perché l'auto si muove. Quindi, il teorema di Bernoulli in forma ristretta può essere applicato solo nel sistema di riferimento solidale con l'auto. Allora, per lo stesso ragionamento fatto nel testo, il fumo esce fuori dall'auto. Nel caso in cui l'auto stia accelerando, il flusso sarebbe non stazionario in ogni sistema di riferimento inerziale, quindi si può applicare l'equazione di Bernoulli ristretta solo introducendo un potenziale fittizio, come faremo successivamente.

Considerazione generale: quando il flusso di un fluido è stazionario per un osservatore in un certo sistema di riferimento, in generale non sarà stazionario per osservatori in sistemi di riferimento che sono in movimento rispetto al primo. In altre parole, la validità dell'equazione di Bernoulli in un sistema di riferimento non implica, in generale, che essa sia valida anche negli altri sistemi di riferimento.⁴ Questo significa che **l'equazione di Bernoulli non è relativisticamente invariante**.

Esempio 3.2 (Secchio rotante). *Un recipiente cilindrico di raggio R , contenente un volume V di un certo liquido, ruota attorno al suo asse con velocità angolare ω . Trova la forma della superficie del pelo del liquido una volta che il sistema ha raggiunto il regime stazionario.*



Figura 4: Secchio cilindrico rotante.

⁴I casi in cui il teorema di Bernoulli è valido in più di un sistema di riferimento sono casi altamente simmetrici. Ad esempio, consideriamo un tubo dritto e infinito in cui scorre acqua. Sia un osservatore posto a terra che uno in moto con velocità parallela al tubo vedono sempre la stessa situazione stazionaria. Entrambi possono invocare il teorema di Bernoulli, ma trovano un risultato banale perché tale configurazione è altamente simmetrica.

Dopo molto tempo, a causa delle forze viscosse tutto il liquido ruoterà rigidamente attorno all'asse del cilindro con velocità angolare ω . Una volta raggiunto questo stato, le forze viscosse smettono di agire, quindi gli elementi fluidi non perdono più energia. Per simmetria, il liquido occuperà un certo volume di rotazione. Poniamoci sulla superficie del liquido.

Procedura sbagliata: il teorema di Bernoulli in forma ristretta ci dice che la quantità

$$B = p(z, r) + \frac{1}{2}\rho v^2(z, r) + \rho\phi(z) = p_0 + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + \rho g z$$

è uniforme. Qui, $p = p_0$ è la pressione atmosferica, uniforme su tutta la superficie libera del liquido, mentre z e r sono due coordinate che descrivono, rispettivamente, la quota e la distanza dall'asse di rotazione. Isolando z dall'equazione precedente, si trova

$$z(r) = \frac{B - p_0}{\rho g} - \frac{\omega^2}{2g} r^2,$$

che descrive un paraboloide con la concavità rivolta verso il basso. Questo risultato è davvero contro ogni legge della Fisica: significherebbe che il liquido è maggiormente concentrato vicino all'asse. Cosa abbiamo sbagliato? In questo caso, il flusso del liquido nel recipiente è rotazionale: le linee di flusso sono delle circonferenze centrate nell'asse di rotazione e appartenenti a piani orizzontali. Cercando la forma dell'intera superficie (e di tutte le superfici equipotenziali), abbiamo usato il primo enunciato del teorema di Bernoulli in forma ristretta, ma non potevamo farlo a causa dell'assenza dell'ipotesi di irrotazionalità del flusso. Possiamo usare solo il secondo enunciato e dire che la quantità B scritta sopra è costante solo lungo le linee di flusso, che, come appena detto, sono caratterizzate da z e r costanti. Questo non porta a nulla, perché otteniamo la banale uguaglianza $p_0 + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + \rho g z = p_0 + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + \rho g z$, che non dà alcuna informazione.

Procedura corretta. Il problema può essere risolto in due modi. Il primo è l'applicazione del diagramma di corpo libero su un piccolo elemento fluido, provate a farlo da soli. Il secondo sfrutta comunque l'invariante di Bernoulli! Ma com'è possibile? Non abbiamo appena mostrato che esso non porta a nulla? È vero, ma non porta a nulla nel sistema di riferimento in cui ci siamo posti. L'idea furba sta nel mettersi nel sistema di riferimento centrato in un punto qualsiasi dell'asse del cilindro e che ruota alla stessa velocità angolare del fluido. In tale sistema, il fluido appare fermo. Essendo fermo, il flusso è irrotazionale! A questo punto possiamo usare il primo enunciato del teorema di Bernoulli in forma ristretta e dire che

$$B' = p(z, r) + \frac{1}{2}\rho v'^2(z, r) + \rho\phi'(r, z) = p_0 + 0 + \rho\left(gz - \frac{1}{2}\omega^2 r^2\right),$$

dove abbiamo usato il fatto che la pressione, essendo una quantità scalare, ha lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento, la velocità in ogni punto è nulla e il potenziale è

$$\phi' = gz - \frac{1}{2}\omega^2 r^2,$$

cioè la somma dei potenziali gravitazionale e centripeto: essendo in un sistema di riferimento non inerziale, bisogna tener conto anche di quest'ultimo. Invece, la forza di Coriolis non dà alcun contributo perché $v = 0$ ovunque. Segue che

$$z = \frac{B' - p_0}{\rho g} + \frac{\omega^2}{2g} r^2,$$

cioè un paraboloide con concavità rivolta verso l'alto, cioè nel modo corretto. La costante B' si trova dalla condizione sulla conservazione del volume:

$$V = \int_0^R \left(\frac{B' - p_0}{\rho g} + \frac{\omega^2 r^2}{2g} \right) 2\pi r \, dr = \pi R^2 \left(\frac{B' - p_0}{\rho g} + \frac{\omega^2 R^2}{4g} \right).$$

La forma della superficie libera di liquido è, dunque,

$$z = \frac{V}{\pi R^2} + \frac{\omega^2}{4g} (2r^2 - R^2),$$

che è indipendente dalla densità. Notate che, se ω è molto grande, per $r = 0$ può succedere che z sia negativo. In questo caso il liquido non tocca affatto l'asse di rotazione.

Problema 3.1. Un carrello contenente acqua si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato, con accelerazione $a\hat{x}$. Trova come si dispone la superficie libera dell'acqua. Ripeti il conto per un secchio cilindrico rotante a velocità angolare ω e traslante come il carrello di prima.

Esempio 3.3 (Effetto Magnus fuorviante). *Durante un tiro, un calciatore imprime una velocità angolare ω a un pallone di raggio R e massa m , che inizia a rototraslare in aria a velocità v . Escludendo la resistenza fluidodinamica e la forza peso, quanto vale la forza che il pallone avverte dovuta alla presenza dell'aria?*

Prima di procedere all'analisi, bisogna fare una premessa importantissima. Nella realtà, non si possono trascurare gli effetti dovuti alla viscosità: essa è responsabile della presenza dello strato limite, che si stacca continuamente dal retro della palla formando coppie di vortici. Questo fa sì che il flusso sia non-stazionario, turbolento e rotazionale... praticamente saltano quasi tutte le ipotesi del teorema di Bernoulli in forma ristretta. Detto ciò, possiamo comunque provare a vedere cosa succede a ipotizzare che il flusso sia lido e casto.

Supponiamo che la viscosità sia nulla e consideriamo una sfera che ruota ma non trasla: essa non ha alcun effetto sull'aria. In altre parole, dato che lo strato limite non esiste, l'aria non si accorge che la sfera sta ruotando, quindi quest'ultima non risente di alcuna forza. Nella stessa ipotesi, consideriamo una sfera che non ruota ma trasla verso destra a velocità v : essa sposta l'aria come mostrato in Fig. 5 (*sinistra*). Per meglio dire, la figura mostra la situazione vista nel sistema di riferimento solidale alla sfera, in cui l'aria indisturbata, lontana dalla sfera, viaggia a velocità v ma verso sinistra. Quindi, in questo caso l'aria risente della presenza della sfera. Data la simmetria del sistema, la sfera non risente di alcuna forza. Se mettiamo assieme i due effetti, otteniamo che anche una sfera rototraslante non risente di alcuna forza. Dove stiamo sbagliando? Evidentemente, è necessaria la presenza dello strato limite! Quindi, è inutile fare conti in questo caso.

Proviamo a fare un qualcosa di ibrido, cioè supporre che ci sia un meccanismo che permetta la presenza dello strato limite ma senza considerare gli effetti di turbolenza legati al distacco. Questa non è una trattazione rigorosa, ma è meglio di niente. Dato che il pallone rototrasla, le diverse parti della sua superficie sono soggette a diversi valori della pressione, dovuti a diversi valori delle velocità relative degli elementi di aria. Questo fa sì che si generi una forza che tende a spostare il pallone verso le zone a pressione minore. Come troviamo questa forza? Potremmo pensare di applicare uno dei due enunciati del teorema di Bernoulli in forma ristretta, ma in quale sistema di riferimento è lecito farlo?

Nel sistema di riferimento del campo da calcio, il flusso è sicuramente non stazionario perché cambia mentre il pallone trasla in aria, come nell'Es. 3.1. Quindi, potremmo pensare di metterci nel sistema rotante centrato nel centro del pallone e solidale a esso, ma anche in questo caso il flusso non è stazionario: un osservatore in quel sistema di riferimento vede un periodico alternarsi di flussi a velocità diversa. L'unico sistema in cui il flusso sembra essere stazionario è quello che trasla alla stessa velocità v del pallone ma che non ruota.⁵ Però qui, come in tutti gli altri sistemi di riferimento, manca l'ipotesi di irrotazionalità: se la palla ruota, trascina con sé l'aria, quindi il campo di velocità acquista una circuitazione. Allora, potremmo pensare di doverci assegnare il secondo enunciato del teorema e dire che, per due diverse linee di flusso che arrivano da molto

⁵Questo vale solo se l'oggetto rotante è simmetrico per rotazioni, come le sfere.

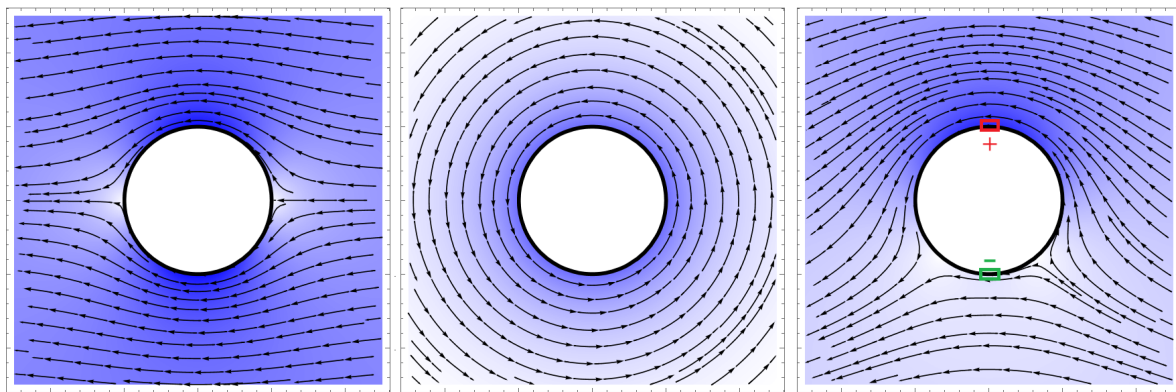


Figura 5: (*sinistra*) Linee di flusso nel sistema di riferimento solidale a una sfera che trasla verso destra. (*centro*) linee di flusso per una sfera che ruota in senso antiorario. (*destra*) linee di flusso per una sfera che ha entrambi i movimenti delle precedenti, viste nel sistema di riferimento traslante ma non rotante.

lontano e tangono la palla agli antipodi (+) e (-), valgono rispettivamente

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_{\pm} + \frac{1}{2}\rho(v \pm \omega R)^2, \quad (3.1)$$

dove l'effetto dovuto alla differenza di quota non è conteggiato perché trascurabile. Dall'Eq. (3.1) si ricava

$$p_+ - p_- = -\rho v \omega R. \quad (3.2)$$

La forza non può essere ricavata moltiplicando per una qualche superficie perché, come si può capire dalla Fig. 5 (*destra*), il flusso non è simmetrico rispetto all'equatore.

Come già anticipato, ribadiamo che questa modellizzazione non è rigorosa, per diversi motivi. Intanto, abbiamo usato l'equazione di Bernoulli ristretta anche in presenza di viscosità, sfruttata in Eq. (3.1) per dire che la velocità agli estremi è quella dello strato limite. Ma se il fluido è viscoso, non siamo autorizzati a usare l'equazione di Bernoulli ristretta. Inoltre, i vortici citati nella premessa sono strutture fluidodinamiche che evolvono nel tempo: si staccano dal pallone e rimangono indietro! Quindi, anche se a prima vista sembrerebbe che il flusso sia stazionario nel sistema traslante con la palla, in realtà non lo è! La presenza di vortici dovuti a instabilità rende il flusso non stazionario in ogni sistema di riferimento immaginabile.⁶ Quindi, non possiamo proprio applicare il teorema di Bernoulli, ma libri lo fanno comunque. Inoltre, stimano la forza agente sulla sfera moltiplicando l'Eq. (3.2) per πR^2 . La dipendenza funzionale dalle grandezze in gioco risulta corretta, ma il valore della costante di proporzionalità è infondato. Esso va trovato sperimentalmente! Alternativamente, possiamo farci aiutare dall'analisi dimensionale.

Problema 3.2 (Effetto Magnus, tratto dal concorso di ammissione della SNS 2015). Una palla da baseball può essere lanciata con una certa velocità angolare attorno al proprio asse per ottenere la cosiddetta “palla curva”, schematizzata in Fig. 6. Stima la forza laterale F_l e la deflessione d usando l'analisi dimensionale e i dati forniti in seguito. Assumi che la forza F_l sia direttamente proporzionale a ω e che la costante di proporzionalità adimensionale sia dell'ordine dell'unità.

$$\begin{aligned} m &= 0,145 \text{ kg}, & R &= 3,7 \text{ cm}, & v &= 36 \text{ m/s}, \\ \omega &= 227 \text{ rad/s}, & L &= 18 \text{ m}, & \rho_a &= 1,2 \text{ kg/m}^3. \end{aligned}$$

⁶Invece, la presenza di vortici stazionari come nei mulinelli d'acqua o nell'Es. 3.2 rende il flusso rotazionale, ma comunque stazionario. In questi casi, siamo autorizzati ad applicare il secondo enunciato del teorema di Bernoulli in forma ristretta.

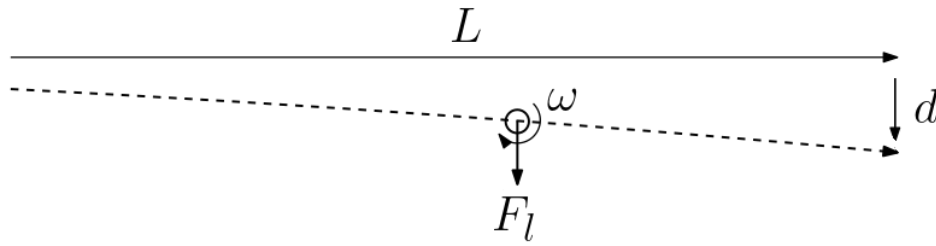


Figura 6: Traiettoria della palla da baseball, vista dall'alto.

Esempio 3.4 (Svuotamento di un secchio cilindrico). Calcola il tempo di svuotamento di un secchio cilindrico di altezza h_0 e area di base A , supponendo che la sezione del foro alla base sia $S \ll A$.

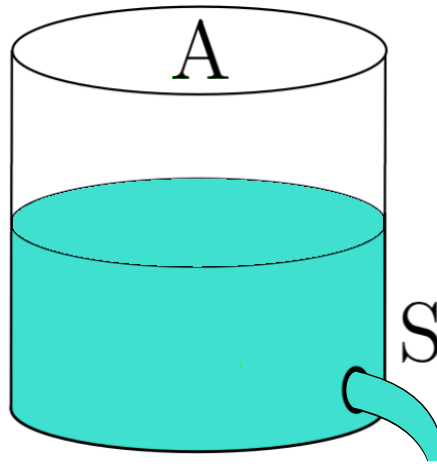


Figura 7: Secchio cilindrico con foro.

Data l'ipotesi sulla sezione del tubo, il flusso può essere considerato stazionario. Detta v la velocità dell'acqua non appena esce dal foro, il teorema di Bernoulli in forma ristretta implica la legge di Torricelli

$$v = \sqrt{2gh},$$

dove h è l'altezza del liquido. La velocità del pelo del liquido è legata alla portata in uscita, che è l'opposto della derivata del volume di liquido contenuto nel secchio

$$vS = -A \frac{dh}{dt}.$$

Sostituendo nella legge di Torricelli, troviamo

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{S}{A} \sqrt{2gh},$$

che è un'equazione differenziale con soluzione

$$h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{St}{2A} \sqrt{2g} \right)^2.$$

Dunque, il tempo di svuotamento vale

$$t = \frac{A}{S} \sqrt{\frac{2h_0}{g}},$$

che è estremamente più grande del tempo di caduta di un grave che parte da fermo da un'altezza h_0 . In questo problema pare che sia filato tutto liscio, ma se uno provasse a fare l'esperimento di svuotamento, otterrebbe un valore di t un po' più grande di quello calcolato. La colpa è di un mix di effetti non considerati fino ad ora, come l'effetto *vena contracta* e le perdite all'uscita.

Esempio 3.5 (Svuotamento di un secchio conico). *Calcola il tempo di svuotamento di un secchio conico di altezza h_0 e raggio di base R , con la punta rivolta verso il basso, supponendo che la sezione del foro sia $S \ll R^2$.*

Procedendo analogamente al problema precedente, si ottiene la seguente equazione differenziale

$$-\frac{\pi h_0}{R} r^2(t) \frac{dr}{dt} = S \sqrt{\frac{2gh_0}{R}} r(t),$$

dove $r(t)$ è il raggio istantaneo della superficie del pelo dell'acqua. Un'equazione differenziale equivalente si può trovare per $h(t)$. Imponendo le solite condizioni iniziali, si ottiene

$$r(t) = \left[R^{\frac{5}{2}} - \frac{5S}{2\pi} \sqrt{\frac{2gR}{h_0}} t \right]^{\frac{2}{5}},$$

che si annulla per

$$t = \frac{2\pi R^2}{5S} \sqrt{\frac{h_0}{2g}}.$$

In questo caso rimangono validi tutti i problemi che affliggono il caso cilindrico. Oltre a questi, c'è n'è un altro, legato all'ipotesi di stazionarietà: prima o poi, data la forma a cono, ci sarà un momento in cui la sezione del pelo libero dell'acqua sarà paragonabile a S . Dal quel punto in avanti, l'evoluzione del sistema è totalmente non stazionaria e la legge di Torricelli non è più valida. Stessa cosa succede nel seguente problema.

Problema 3.3. Determina che forma deve avere un recipiente a simmetria cilindrica in modo che in esso il livello dell'acqua si abbassi a velocità costante se sul fondo viene praticato un foro di dimensioni *molto piccole*.

SEZ. 4 — GENERALIZZAZIONI DELL'EQUAZIONE DI BERNOULLI RISTRETTA

In questa sezione vederemo come superare i limiti dell'equazione di Bernoulli ristretta, esaminando delle generalizzazioni legate a ciascuna delle ipotesi del teorema enunciato in Sez. 3: viscosità, stazionarietà, irrotazionalità, incomprimibilità e laminarità.

Per comprendere appieno le generalizzazioni dell'equazione di Bernoulli ristretta che introdurremo successivamente, bisogna guardare all'equazione del bilancio della quantità di moto fluida (Navier-Stokes):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} + \frac{d^2 \vec{\Lambda}}{dt^2} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r} + \\ + \frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \vec{\tau} + \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + \phi \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

valida per flussi non stazionari, rotazionali (sia laminari che turbolenti) di fluidi comprimibili e viscosi, osservati da un generico sistema di riferimento non inerziale, come mostrato in Fig. 8. Qui, $\vec{\tau}$ è un tensore che tiene conto degli effetti viscosi del fluido, per gli scopi di questa lezione non ci interessa sapere com'è definito. L'espressione più generale dell'equazione di Bernoulli è *semplicemente* l'integrale dell'Eq. (4.1) lungo un generico percorso:⁷

$$\begin{aligned} \int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} \left[\underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\text{non stazionario}} + \underbrace{(\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v}}_{\text{rotazionale}} \right] \cdot d\vec{s} + \int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} \left[\underbrace{\frac{d^2 \vec{\Lambda}}{dt^2} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r}}_{\text{SDR non inerziale}} \right] \cdot d\vec{s} + \\ + \int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} \left[\underbrace{\frac{1}{\rho} \nabla p}_{\text{comprimibile}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \vec{\tau}}_{\text{viscoso}} \right] \cdot d\vec{s} + \left[\underbrace{\frac{1}{2} v^2 + \phi}_{\text{conservativo}} \right]_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

⁷**Attenzione:** il generico percorso di cui si parla può eventualmente essere descritto da una linea di flusso, ma questo non è vincolante. Ovviamente, nella maggior parte dei problemi conviene considerare un percorso coincidente con una linea di flusso, perché, ad esempio, sappiamo com'è diretta la velocità su di esse. Ma esistono dei casi in cui conviene prendere altri percorsi, come fatto in Es. 4.3.

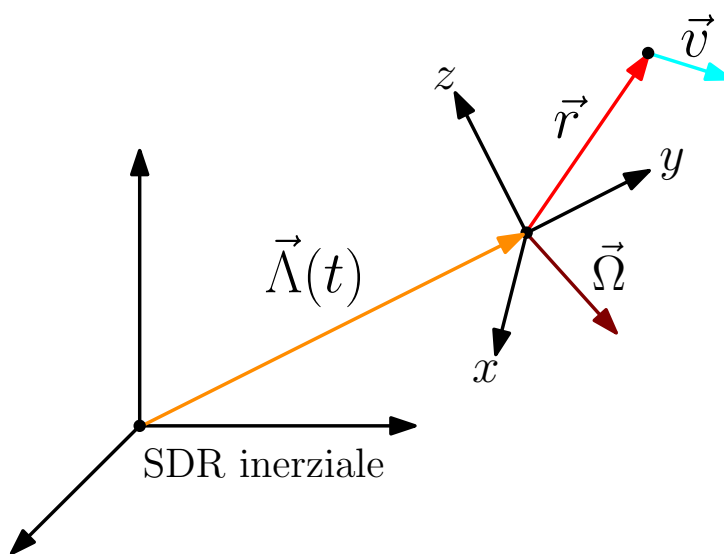


Figura 8: Schematizzazione dei vettori coinvolti in Eq. (4.1). La velocità $\vec{v}$ è calcolata nel sistema di riferimento non inerziale xyz .

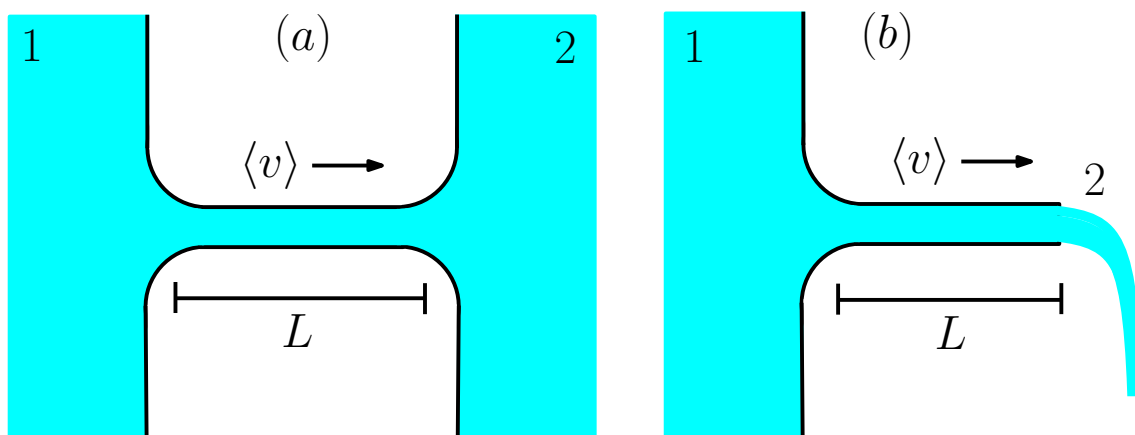


Figura 9: Flusso tra due regioni di spazio $1 \rightarrow 2$ passante per un condotto cilindrico.

Dato che l'Eq. (4.2) sarebbe troppo difficile da usare nella sua interezza, ci limiteremo a usarne un pezzo generalizzante per volta. A parte il caso comprimibile, la costante di Bernoulli assumerà sempre la forma

$$B = p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\phi$$

descritta nel teorema in forma ristretta. Infatti, se ρ è costante, l'integrale di linea del termine di pressione in Eq. (4.2) restituisce la differenza dei valori della pressione nei punti 2 e 1, che quindi può essere inglobata nell'ultimo addendo della stessa equazione. Inoltre, ritorneremo sui sistemi di riferimento non inerziali in un caso particolare relativo all'assunzione di irrotazionalità.

4.1 Equazione di Bernoulli per fluidi viscosi

Generalmente, a scuola e all'università viene insegnato che “l'equazione di Bernoulli vale per fluidi non viscosi, mentre per quelli viscosi vale l'equazione di Poiseuille”. Quest'ultima vale solo per condotti cilindrici orizzontali e si legge

$$\Delta p = \frac{8\pi\mu LQ}{S^2} = \frac{8\mu LQ}{\pi r^4}, \quad (4.3)$$

dove Q è la portata associata al flusso e μ la viscosità del fluido. Ora, vedete che qui c'è un problema: se prendiamo il limite per $\mu \rightarrow 0$ dell'equazione di Poiseuille, otteniamo $\Delta p = 0$, risultato che evidentemente non è l'equazione di Bernoulli. Quindi, l'equazione di Poiseuille non è un risultato più generale di quella di Bernoulli, ma esse rappresentano due casi limite di un'equazione più generale, che chiameremo *equazione di Bernoulli viscosa*.

Facendo riferimento alla Fig. 9, nel caso di condotti cilindrici di lunghezza L e sezione omogenea S , l'**equazione di Bernoulli viscosa** si legge:

$$B_1 - B_2 = \frac{8\pi\mu L}{S} \langle v \rangle, \quad (4.4)$$

dove $\langle v \rangle$ è la media della velocità fatta sulla sezione del condotto. Quest'equazione tiene conto sia degli effetti viscosi che degli effetti legati all'inerzia del flusso. È fondamentale ricordarsi che l'ordine $1 \rightarrow 2$ non può essere scambiato a piacere: la posizione 1 deve essere quella a monte del flusso e la 2 quella a valle, in modo che $B_1 - B_2$ sia una quantità positiva come previsto in Eq. (4.4). Infatti, dopo l'azione degli effetti viscosi ci si aspetta che la densità di energia fluida sia diminuita ($B_2 < B_1$). Esaminiamo due casi limite di quest'equazione.

- Caso $\mu \rightarrow 0$: otteniamo semplicemente l'equazione di Bernoulli ristretta $B_1 = B_2$.

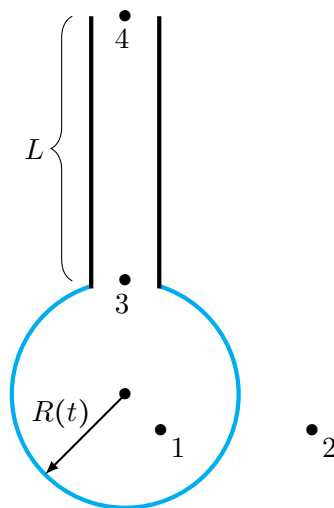


Figura 10: Bolla di sapone sferica attaccata ad una cannuccia cilindrica.

- Caso $\mu \rightarrow \infty$: i termini cinetici in v^2 diventano trascurabili rispetto a tutti gli altri, quindi l'Eq. (4.4) tende asintoticamente a

$$\Delta p + \rho g \Delta z = \frac{8\pi\mu L}{S} \langle v \rangle = \frac{8\pi\mu L Q}{S^2},$$

che nel caso di condotti orizzontali ($\Delta z = 0$) restituisce proprio l'equazione di Poiseuille.

Esempio 4.1 (Sgonfiamento di una bolla di sapone). *Trova il tempo di sgonfiamento di una bolla di sapone di tensione superficiale σ e raggio iniziale R_0 , attraverso una cannuccia cilindrica di lunghezza L e sezione S . La configurazione in esame è schematizzata in Fig. 10.*

Assumeremo che l'aria sia incompressibile e che la bolla sia istantaneamente una sfera per tutto il processo. In queste condizioni, l'equazione di continuità si legge

$$-4\pi R^2(t) \frac{dR}{dt} = S \langle v(t) \rangle_c, \quad (4.5)$$

dove $\langle v(t) \rangle_c = v_3 = v_4$ è la velocità dell'aria all'interno della cannuccia, mediata sulla sezione e omogenea sulla lunghezza.

È importante osservare che il risultato finale non dipende né dall'accelerazione di gravità g né dall'inclinazione della cannuccia. Questo fatto può essere compreso invocando la legge di Archimede: non è necessario compiere lavoro per sollevare un volume di fluido all'interno di un volume più grande dello stesso fluido.⁸

⁸Il motivo fisico per cui g non compare nel risultato è lo stesso, ben più familiare, per cui non si osserva alcun flusso d'aria in un tubo immerso nell'aria e inclinato arbitrariamente. In quel caso, tra l'estremità superiore e quella inferiore del tubo esiste una differenza di pressione data dalla legge di Stevino, ma tale differenza è esattamente bilanciata dal termine gravitazionale nell'equazione di Bernoulli. In altre parole, lungo il tubo vale

$$\Delta p = -\rho g \Delta z,$$

per cui la somma $p + \rho g z$ resta costante e la velocità del fluido è nulla.

Nel problema della bolla accade esattamente la stessa cosa: la colonna d'aria nella cannuccia è immersa in aria dello stesso tipo, quindi non è necessario compiere alcun lavoro per spostarla verso l'alto o verso il basso. La differenza di pressione idrostatica tra i due estremi della cannuccia viene sempre compensata dal termine gravitazionale, indipendentemente dall'inclinazione. Di conseguenza, l'unica sorgente effettiva di moto è la sovrappressione dovuta alla tensione superficiale della bolla, mentre g scompare completamente dal problema.

Per lo stesso motivo, il tempo di sgonfiamento è lo stesso per cannucce verticali o orizzontali, a parità di tutti gli altri parametri.

Applicando l'Eq. (4.4) tra i punti 1 e 4, si ottiene

$$p_1 + 0 + \rho g z_1 - \left(p_4 + \frac{1}{2} \rho \langle v \rangle_c^2 + \rho g z_4 \right) = \frac{8\pi\mu L}{S} \langle v \rangle_c. \quad (4.6)$$

Ricordando che $p_1 = p_2 + \frac{4\sigma}{R(t)}$, $p_2 = p_4 + \rho g(z_4 - z_2) \simeq p_4 + \rho g L$ e $z_4 - z_1 \simeq L$, si ottiene

$$\frac{4\sigma}{R} = \frac{1}{2} \rho \langle v \rangle_c^2 + \frac{8\pi\mu L}{S} \langle v \rangle_c, \quad (4.7)$$

La cui unica soluzione fisicamente sensata è

$$\langle v(R) \rangle_c = \sqrt{\left(\frac{8\pi\mu L}{\rho S} \right)^2 + \frac{8\sigma}{\rho R}} - \frac{8\pi\mu L}{\rho S}. \quad (4.8)$$

Accoppiando quest'ultima equazione con la condizione della conservazione della portata in Eq. (4.5), si ottiene l'equazione differenziale ordinaria non lineare

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{S}{4\pi R^2(t)} \left(\sqrt{\left(\frac{8\pi\mu L}{\rho S} \right)^2 + \frac{8\sigma}{\rho R}} - \frac{8\pi\mu L}{\rho S} \right).$$

Separando le variabili, si ottiene

$$T = \frac{\pi^2 \mu L}{\sigma S^2} R_0^4 + \frac{4\pi^2 \mu L}{\sigma S^2} \int_0^{R_0} R'^3 \sqrt{1 + \frac{\sigma \rho S^2}{8\pi^2 \mu^2 L^2 R'}} dR'.$$

Problema 4.1. Rifai il calcolo dell'Es. 4.1 nei due casi particolari (e meno generici) di flusso dominato dalla viscosità e di fluido non viscoso.

Problema 4.2. Consideriamo due secchi identici pieni d'acqua, ciascuno con un foro sul fondo collegato a una cannuccia verticale. Le cannucce hanno la stessa sezione, ma una è più lunga dell'altra. Tenendo in considerazione le perdite dovute alla viscosità, determina quale dei due secchi si svuota per primo al variare dei parametri in gioco.

4.2 Equazione di Bernoulli per flussi non stazionari

Nel caso di flussi non stazionari, bisogna usare l'**equazione di Bernoulli non stazionaria**, che si legge

$$B_1 - B_2 = \rho \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial v}{\partial t} ds. \quad (4.9)$$

Per andare avanti, bisogna considerare degli esempi specifici: l'integrale che contiene la derivata temporale della velocità va calcolato conoscendo la forma delle linee di flusso e la velocità del fluido su di esse.

Esempio 4.2 (Generalizzazione della legge di Torricelli). La velocità di fuoriuscita dell'acqua da un piccolo foro sul fondo di un contenitore cilindrico può essere descritta dalla legge di Torricelli

$$v_{\text{fuoriuscita}} = \sqrt{2gh}, \quad (4.10)$$

dove h è la quota istantanea del pelo dell'acqua nel contenitore. Una versione accurata di questa legge è

$$v_{\text{fuoriuscita}} = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2}}, \quad (4.11)$$

dove S_1 è la sezione trasversale del contenitore cilindrico e S_2 è la sezione del foro. Il problema è che queste relazioni vengono ricavate tramite il teorema di Bernoulli in forma ristretta, quindi per flussi stazionari, e valgono solo per fori “piccoli”. Tuttavia, se immaginassimo di fare un foro sul fondo del serbatoio grande quanto l'intera base del cilindro, l'acqua cadrebbe con accelerazione g dovuta alla gravità, quindi con velocità data da $\sqrt{2g(h_0 - h(t))}$, dove h_0 è l'altezza iniziale dell'acqua nel contenitore. Notate che questo risultato tiene conto delle condizioni iniziali e differisce abbondantemente da $\sqrt{2gh(t)}$, dove non c'è alcuna traccia delle condizioni iniziali. Usando l'Eq. (4.9), proviamo a generalizzare la legge di Torricelli per buchi di larghezza arbitraria, in modo ritrovare entrambi i limiti, cioè buco di area massima e buco piccolissimo.

Supponendo che l'acqua sia incomprimibile e non viscosa e che il flusso sia irrotazionale ovunque, l'equazione di Bernoulli non-stazionaria diventa

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho\phi_1 - \left(p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho\phi_2\right) = \rho \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial v}{\partial t} ds.$$

Scegliamo il punto 1 sulla superficie del pelo libero dell'acqua e il punto 2 in corrispondenza del foro sul fondo. La pressione in entrambi i punti è pari a quella atmosferica, mentre le velocità sono legate tra di loro tramite la conservazione della portata $v_1 S_1 = v_2 S_2$. Inoltre, visto che compare anche la prima potenza della velocità e che il potenziale gravitazionale detta una direzione il cui segno non può essere preso a caso, è necessario specificare che queste velocità sono negative, cioè rivolte verso il basso. Inoltre, per andare avanti c'è bisogno di assumere che le linee di flusso dentro il flusso siano pressoché verticali dentro il contenitore, in modo da poter scrivere $v_1 = \frac{dh}{dt}$ e non solo: tutti i punti all'interno del fluido si muoveranno alla stessa velocità. Ecco perché serve l'ipotesi di irrotazionalità: è necessario coinvolgere tutto il fluido e non una sola linea di flusso! Sfruttando il fatto che le linee di flusso sono segmenti verticali, possiamo scrivere

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial v}{\partial t} ds = \int_{h(t)}^0 \frac{d^2 h}{dt^2} dz.$$

Dato che, per le considerazioni appena fatte, v è omogenea in tutto il flusso interno, allora la funzione integranda è costante e può esser portata fuori dall'integrale. Segue che

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial v}{\partial t} ds = -\frac{d^2 h}{dt^2} h(t).$$

L'equazione di Bernoulli non stazionaria diventa

$$-\frac{d^2 h}{dt^2} h(t) = \frac{1}{2} v_1^2 - \frac{1}{2} v_2^2 + \phi_1 - \phi_2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 - 1 \right] v_2^2(h(t)) + gh(t).$$

In quest'equazione compaiono tre variabili: v_2 , h e t . Possiamo, però, sfruttare nuovamente la conservazione della portata per trovare

$$-\frac{d^2 h}{dt^2} h(t) = -\frac{dv_1}{dt} h(t) = -\frac{1}{2} \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 \frac{dv_2^2}{dh} h(t).$$

L'equazione differenziale da risolvere è

$$\left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 \frac{dv_2^2}{dh} \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 - 1 \right] v_2^2(h) + gh = 0,$$

con la condizione iniziale

$$v_2(h = h_0) = 0.$$

La soluzione dell'equazione è

$$v_2(h) = \sqrt{\frac{2gh}{2\alpha - 1} \left[\left(\frac{h}{h_0} \right)^{\frac{1}{\alpha} - 2} - 1 \right]}, \quad (0 \leq h \leq h_0). \quad (4.12)$$

dove $\alpha \equiv (S_2/S_1)^2$. Nei casi limite $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$, essa si riduce rispettivamente a

$$v_2(h, \alpha = 0) = \sqrt{2gh}, \quad v_2(h, \alpha = 1) = \sqrt{2g(h_0 - h)}.$$

Per $\alpha = 0$ otteniamo la legge di Torricelli, rigorosamente valida solo per buchi piccoli! Nel caso $\alpha = 1$, cioè il caso in cui il foro di uscita è grande quanto l'intera base del recipiente cilindrico, ritroviamo la legge della caduta libera. Tutto torna! Nelle figure (11), (12) e (13) sono mostrati tre casi relativi alla stessa configurazione, ma con buchi di grandezza diversa. I tre colori che caratterizzano le funzioni nei grafici sono relativi all'Eq. (4.10) (azzurro), (4.11) (rosso) e (4.12) (verde).

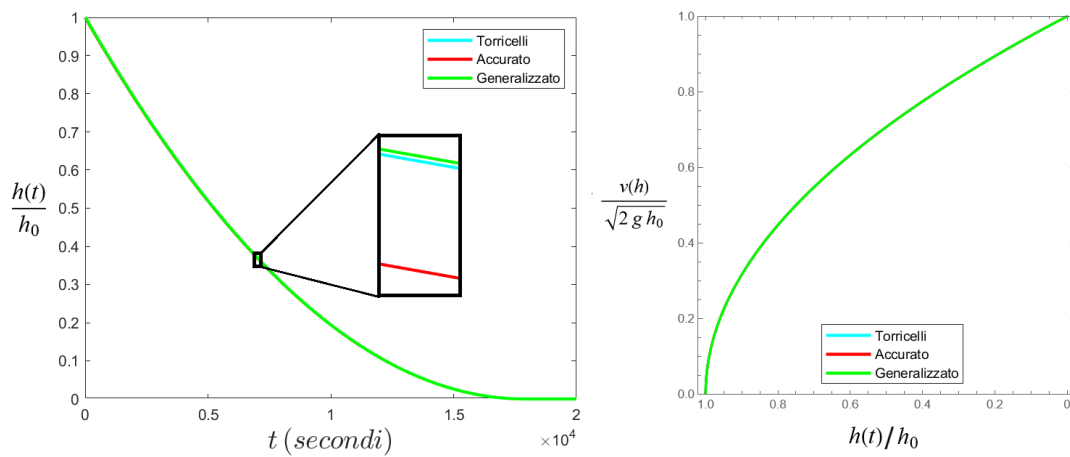


Figura 11: Svuotamento di un contenitore cilindrico con $h_0 = 1$ m, raggio di base $R = 20$ cm e $\alpha \approx 0$.

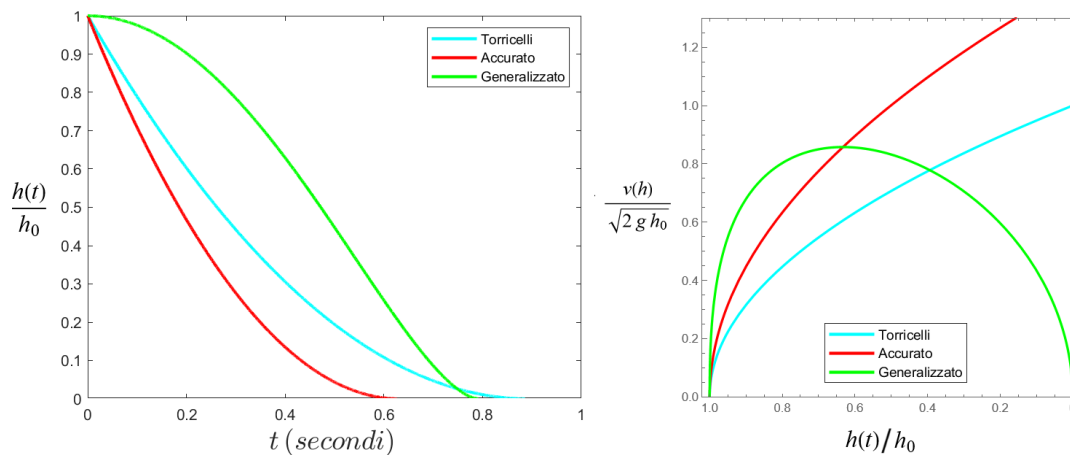


Figura 12: Svuotamento di un contenitore cilindrico con $h_0 = 1$ m, raggio di base $R = 20$ cm e $\alpha = 0.5$.

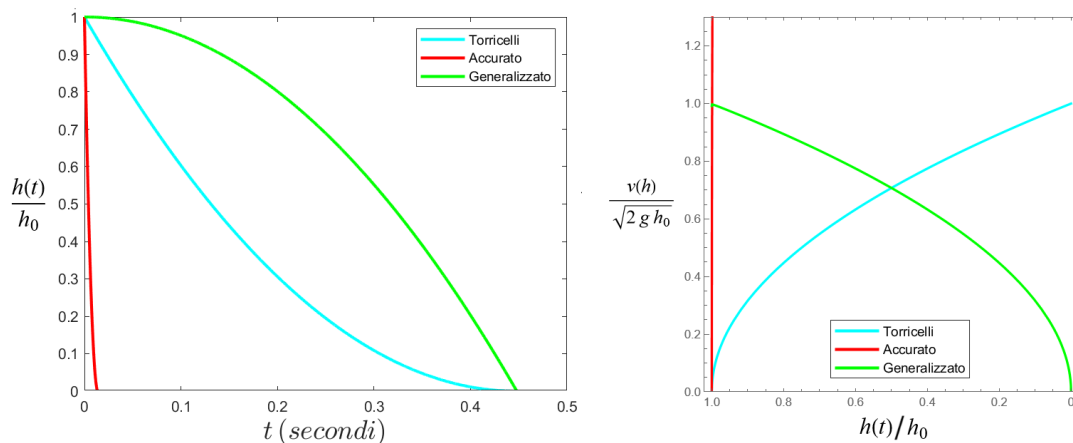


Figura 13: Svuotamento di un contenitore cilindrico con $h_0 = 1$ m, raggio di base $R = 20$ cm e $\alpha \approx 1$.

4.3 Equazione di Bernoulli per flussi rotazionali

L'equazione di Bernoulli per flussi rotazionali è

$$B_1 - B_2 = \rho \int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} [(\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v}] \cdot d\vec{s}. \quad (4.13)$$

Qui non c'è molto altro da dire, bisogna fare i conti nei casi specifici. Nel caso generico in cui $\nabla \times \vec{v}$ è una funzione non costante, i conti non sono facili. Limitiamoci a un caso in cui $\nabla \times \vec{v}$ è costante.

Esempio 4.3 (Secchio rotante, parte 2). Riprendiamo l'esempio del secchio cilindrico in rotazione attorno al suo asse. Rimanendo nel sistema di riferimento del laboratorio (che è inerziale), si ottiene

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho \phi_1 - \left(p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho \phi_2 \right) = \rho \int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} [(\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v}] \cdot d\vec{s}, \quad (4.14)$$

Dato che le linee di flusso sono delle circonferenze di raggio generico $|\vec{r}|$, dove $\vec{r}$ è il vettore posizione rispetto all'asse di rotazione, la velocità è $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, quindi $\nabla \times \vec{v} = 2\vec{\omega}$. Segue che $[(\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v}] \cdot d\vec{s} = -2\omega^2 \vec{r} \cdot d\vec{s} = -2\omega^2 r dr$. Scegliendo come punto 1 il punto della superficie libera sull'asse di rotazione caratterizzato dalle coordinate $(0, z_0)$, come punto 2 un generico punto del fluido caratterizzato dalle coordinate (r, z) (Fig. 14), si ottiene

$$p(r, z) - p_0 + \rho g(z - z_0) + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 = 2\rho \int_0^r \omega^2 r' dr', \quad (4.15)$$

che restituisce la giusta equazione del paraboloide.

Versione alternativa. Svolgiamo i conti nel sistema di riferimento rotante. Dato che ω è costante, nel sistema di riferimento in cui il fluido è fermo, l'Eq. (4.2) si riduce a

$$p_1 + \rho \phi_1 - \left(p_2 + \rho \phi_2 \right) = \rho \int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} \left[\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \right] \cdot d\vec{s}. \quad (4.16)$$

Scegliendo come punto 1 il punto della superficie libera sull'asse di rotazione caratterizzato dalle coordinate $(0, z_0)$, come punto 2 un generico punto del fluido caratterizzato dalle coordinate (r, z) (Fig. 14), si ottiene $[\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})] \cdot d\vec{s} = -\omega^2 \vec{r} \cdot d\vec{s} = -\omega^2 r dr$ e

$$p(r, z) = p_0 + \rho g(z_0 - z) + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2, \quad (4.17)$$

che è la forma giusta. Purtroppo è possibile usare questa seconda versione solo se il fluido ruota rigidamente. Altrimenti, non esiste alcun sistema di riferimento in cui tutto il fluido appare fermo.

4.4 Equazione di Bernoulli per fluidi comprimibili

Nel caso dei fluidi comprimibili, le cose sono un po' più complicate dei casi rimanenti. Questo è dovuto al fatto che la densità ρ compare in più di un termine nell'Eq. (4.2) e, inoltre, il fatto che essa non è fissa comporta una ridefinizione della costante B . In questa sezione, ci limitiamo a fluidi non viscosi, così che l'unico termine da aggiungere/modificare nell'equazione di Bernoulli ristretta è

$$\int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\vec{s}.$$

Purtroppo, questo integrale non si può fare analiticamente per un generico fluido comprimibile. Quindi, restringiamo il nostro insieme di lavoro ai cosiddetti *fluidi barotropici*, cioè tutti quei fluidi in cui la pressione può essere espressa unicamente in funzione della densità (e viceversa). Quindi, le superfici a densità costante sono anche superfici a pressione costante.⁹ In questo caso, l'integrale diventa

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp'}{\rho(p')},$$

dove $p_1 \equiv p(\vec{r}_1)$ e $p_2 \equiv p(\vec{r}_2)$. Quindi, l'**equazione di Bernoulli per fluidi comprimibili barotropici** è

$$\frac{1}{2} v_1^2 + \phi_1 - \left(\frac{1}{2} v_2^2 + \phi_2 \right) = \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho(p)}, \quad (4.18)$$

che si riduce all'equazione di Bernoulli ristretta nel caso di fluido a densità uniforme e costante. Vediamo due esempi per un fluido comprimibile isoentropico, cioè adiabatico, e uno comprimibile isoterma.

Esempio 4.4 (Fluido isoentropico). Per le trasformazioni adiabatiche si ha

$$pV^\gamma = \text{cost.} \implies \frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cost.} \implies p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma,$$

⁹Inoltre, solo per quanto riguarda i gas perfetti, vale

$$\frac{p}{\rho} \propto T,$$

allora anche la temperatura è costante sulle stesse superfici. Per cultura, tutti i gas non barotropici sono detti *baroclinici*. In essi, la pressione è funzione sia di ρ che di T e le equisuperfici delle tre grandezze non coincidono.

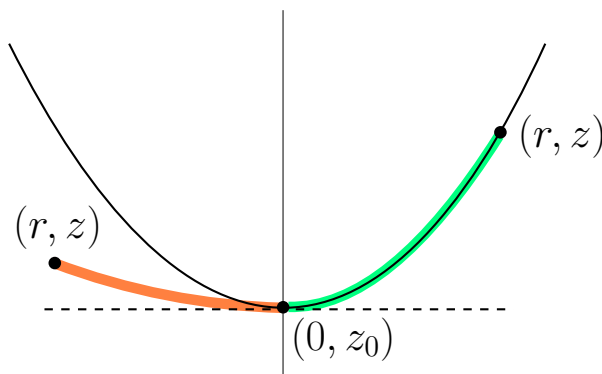


Figura 14: Esempi di due percorsi plausibili.

dove $\gamma \equiv \frac{c_p}{c_v}$ è l'indice adiabatico. L'Eq. (4.18) diventa

$$\frac{1}{2} v_1^2 + \phi_1 - \left(\frac{1}{2} v_2^2 - \phi_2 \right) = \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho(p)} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right).$$

Vediamo come possiamo riscrivere la costante B , scegliendo come estremi di integrazione due generici valori p_0 e p :

$$\int_{p_0}^p \frac{dp'}{\rho(p')} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1}.$$

Questa espressione rappresenta l'entalpia per unità di massa del fluido. Ciò implica che

$$B_{\text{isoentropico}} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} + \frac{1}{2} v^2 + \phi = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \phi. \quad (4.19)$$

L'Eq. (4.19) vale per tutti i tipi di gas, anche quelli non perfetti.¹⁰

Esempio 4.5 (Fluido isoterma). Questo caso è equivalente a considerare il precedente nel limite $\gamma \rightarrow 1$, ma non possiamo calcolarlo direttamente sul risultato finale a causa di una divergenza. Per un fluido isoterma vale

$$pV = \text{cost.} \implies \frac{p}{\rho} = \text{cost.} \implies p = p_0 \frac{\rho}{\rho_0},$$

che è una variante della legge dei gas perfetti. Segue che

$$\frac{1}{2} v_1^2 + \phi_1 - \left(\frac{1}{2} v_2^2 - \phi_2 \right) = \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho(p)} = \frac{p_1}{\rho_1} \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right).$$

Vediamo ora che forma assume la costante B . Come nel caso isoentropico, otteniamo

$$\int_{p_0}^p \frac{dp'}{\rho(p')} = \frac{p_0}{\rho_0} \ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) \quad \text{oppure} \quad \frac{p}{\rho} \ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right),$$

che comporta

$$B_{\text{isoterma}} = \frac{p}{\rho} \ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) + \frac{1}{2} v^2 + \phi.$$

Potrebbe sembrare che ρ_0 sia un parametro di cui bisogna tener conto nei problemi, ma non è così: per le proprietà dei logaritmi, possiamo scrivere

$$B_{\text{isoterma}} = \frac{p}{\rho} \ln \left(\frac{1 \text{ kg/m}^3}{\rho_0} \right) + \frac{p}{\rho} \ln \left(\frac{\rho}{1 \text{ kg/m}^3} \right) + \frac{1}{2} v^2 + \phi, \quad (4.20)$$

dove abbiamo moltiplicato e diviso per l'unità di misura della densità nel SI perché gli argomenti delle funzioni trascendenti devono essere adimensionali. A questo punto, essendo p/ρ costante, ci accorgiamo che il primo termine è anch'esso costante, quindi può essere ignorato. In definitiva, l'Eq. (4.20) può essere riscritta come

$$B'_{\text{isoterma}} = \frac{p}{\rho} \ln \left(\frac{\rho}{1 \text{ kg/m}^3} \right) + \frac{1}{2} v^2 + \phi,$$

senza alcuna perdita di generalità.

¹⁰Per i gas perfetti, possiamo dire qualcosa di più. Dato che in essi valgono

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M} \quad \text{e} \quad c_p - c_v = nR,$$

dove M è la massa molare, mentre c_p e c_v sono i calori specifici per unità di massa a pressione e volume costante, la definizione di γ comporta che l'Eq. (4.19) può essere scritta come

$$B_{\text{isoentropico}} = c_p T + \phi + \frac{1}{2} v^2.$$

Esempio 4.6 (Flusso comprimibile attraverso un ugello convergente). *Un grande serbatoio contiene un gas comprimibile ed è collegato a un ugello corto e convergente, la cui area all'uscita è A_2 . Sia 1 un punto nel serbatoio e 2 un punto all'uscita dell'ugello. Indichiamo con (p_i, ρ_i, T_i, v_i) le grandezze nei due punti. Assumendo che il flusso sia isoentropico e che $z_1 = z_2$, trova il massimo flusso di materia che può fluire nell'ugello.*

A prima vista, la richiesta del problema potrebbe risultare molto banale: infatti, un potrebbe pensare che il massimo flusso di materia si ha quando la differenza tra le due pressioni è massima, ovvero quando $p_2 \rightarrow 0$. Questo è vero per la portata volumetrica, ma non per la portata di massa. Infatti, se la pressione in 2 fosse bassissima, non appena il fluido arriva all'uscita dell'ugello esso avrebbe una densità troppo piccola, quindi l'intero elemento fluido peserebbe poco. Ci sarà quindi un bilanciamento di effetti che porterà a un'espressione non banale per il rapporto ottimale tra le due pressioni in gioco.

L'ipotesi di serbatoio grande implica che nel punto 1 la velocità sia trascurabile: $v_1 \simeq 0$. Abbiamo già mostrato che per un fluido isoentropico vale

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} v_1^2 + \phi_1 = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} v_2^2 + \phi_2.$$

Segue che

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right)}.$$

Usando la relazione isoentropica $\rho_2/\rho_1 = (p_2/p_1)^{1/\gamma}$, si ricava la forma in funzione del rapporto di pressioni:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}. \quad (4.21)$$

Il flusso di materia uscente dall'ugello vale

$$\dot{m} = \rho_2 A_2 v_2.$$

Sostituendo $\rho_2 = \rho_1 (p_2/p_1)^{1/\gamma}$ e l'Eq. (4.21), otteniamo

$$\dot{m} = A_2 \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} p_1 \rho_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}. \quad (4.22)$$

Fissati A_2 , p_1 e ρ_1 , il flusso di materia dipende solo dal rapporto $r \equiv p_2/p_1$. Per trovare la condizione di massima portata è più comodo massimizzare $\dot{m}^2$, dato che ha lo stesso massimo di $\dot{m}$. Dall'Eq. (4.22) si vede che, a fattori costanti, vale

$$\dot{m}^2 \propto r^{\frac{2}{\gamma}} \left(1 - r^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right).$$

Derivando e ponendo a zero:

$$0 = \frac{d}{dr} \left[r^{\frac{2}{\gamma}} - r^{\frac{2}{\gamma} + \frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] = \frac{2}{\gamma} r^{\frac{2}{\gamma}-1} - \frac{\gamma+1}{\gamma} r^{\frac{\gamma+1}{\gamma}-1},$$

da cui

$$\frac{2}{\gamma} r^{\frac{2}{\gamma}-1} = \frac{\gamma+1}{\gamma} r^{\frac{\gamma+1}{\gamma}-1} \quad \implies \quad r^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{2}{\gamma+1}.$$

In definitiva, il rapporto critico è

$$\left(\frac{p_2}{p_1} \right)_{\text{crit}} = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

Per l'aria ($\gamma \simeq 1.4$) si ottiene $(p_2/p_1)_{\text{crit}} \simeq 0.528$. In generale, il massimo flusso di materia è

$$\dot{m}_{\text{max}} = A_2 \sqrt{\gamma p_1 \rho_1} \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}.$$

4.5 Equazione di Bernoulli per flussi turbolenti



Purtroppo, nel caso di flussi turbolenti (cioè non laminari) non c'è modo di scrivere un'equazione di Bernoulli perché le linee di flusso si rompono continuamente, rendendo il flusso intrinsecamente non stazionario e rotazionale. Quindi, per qualsiasi percorso $1 \rightarrow 2$ esistente, non si può conoscere la distribuzione della velocità sulla tratta da $\vec{s}_1$ a $\vec{s}_2$: questo rende impossibile valutare ogni termine contenente $\vec{v}$ in Eq. (4.2).

SEZ. 5 — ROTTURA DELLE LINEE DI FLUSSO —

I prossimi esempi dimostrano che i fenomeni *riempimento* e *svuotamento* non sono speculari sotto inversione temporale. A questo concetto è fortemente legato il famoso *paradosso dell'irrigatore* di Richard Feynman, che non analizzeremo. Vediamo, però, due esempi minimali che aiutano a comprendere appieno la natura di questo problema.

Esempio 5.1 (Svuotamento di un contenitore). Consideriamo due contenitori con la stessa sezione trasversale A , aperti superiormente e disposti uno sopra l'altro, come mostrato in Fig. 15. Un tubo verticale di lunghezza L e sezione interna $S \ll A$ collega i due contenitori, permettendo all'acqua di defluire da quello superiore, che si svuota, a quello inferiore, che si riempie. Sia H la differenza di quota tra i fondi dei due contenitori e h_0 l'altezza iniziale del pelo libero dell'acqua nel contenitore superiore, tale che $L + h_0 > H$ e che $h_0 A \gg LS$.

Per tutto il problema assumeremo che l'acqua sia incomprimibile e non viscosa e che la giunzione tra il fondo del contenitore superiore e l'estremità superiore del tubo sia a forma di imbuto, in modo da evitare fenomeni di turbolenza all'ingresso dello stesso.

1. Detta $h(t)$ l'altezza del livello dell'acqua nel contenitore in basso in un generico istante di tempo, disegna il grafico della funzione $v(h)$ nel dominio $0 < h < h_0$, dove v è la velocità di fuoriuscita dell'acqua dall'estremità inferiore del tubo. Indica tutti i punti notevoli.
2. Calcola la durata totale del processo t_f . Fornisci un grafico di $t_f(h_0)$.
3. Quanta energia è stata dissipata durante l'intero processo? Dove è avvenuta tale dissipazione? Come è possibile che sia stata dissipata energia nonostante la viscosità del fluido sia nulla?
4. Descrivere, con sole argomentazioni qualitative, come cambierebbero i grafici dei primi due punti se venissero tirati in ballo gli effetti viscosi.

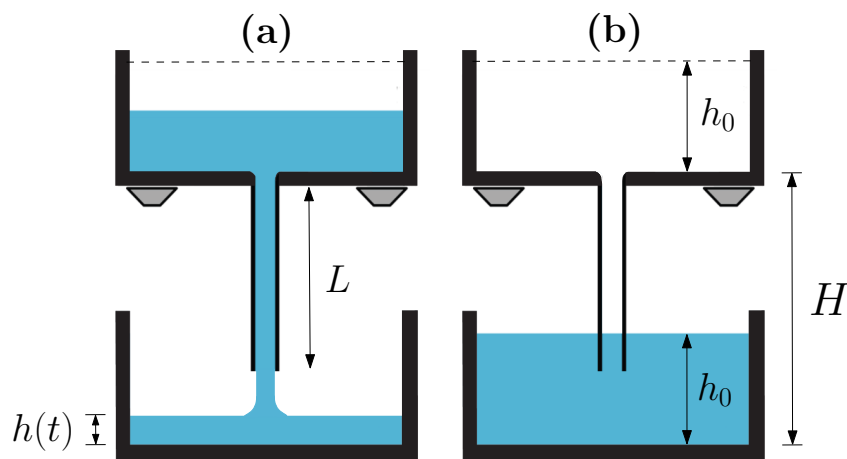


Figura 15: Flusso tra i due contenitori. Il diametro del tubo è stato esagerato per ragioni di chiarezza. (a) Configurazione in un istante generico. (b) Configurazione finale.

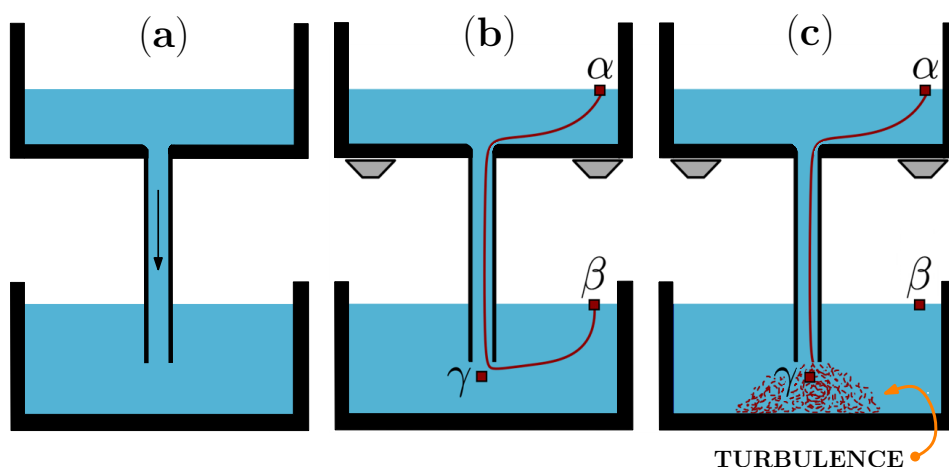


Figura 16: Schematizzazione del flusso tra due contenitori. Il diametro del tubo è stato esagerato per ragioni di chiarezza.

Date le ipotesi $h_0 A \gg LS$ e $S \ll A$, è possibile trascurare cosa succede nei primissimi e ultimissimi istanti del processo di trasferimento dell'acqua, in cui il tubo non è riempito per intero. Tali effetti sono non stazionari, per cui bisognerebbe usare una versione più generale dell'equazione di Bernoulli ristretta. Ma, date queste ipotesi di lavoro, il loro contributo è irrilevante perché la durata dell'intero processo di trasferimento dell'acqua è molto più grande dei tempi caratteristici su cui avvengono gli effetti non stazionari.

1. Supponiamo che esista almeno una linea di flusso regolare—corrispondente a un flusso laminare—che connetta due punti generici α e β , situati rispettivamente sulle superfici libere del liquido, come mostrato schematicamente in Fig. 16(b). Sotto questa ipotesi, tentiamo di applicare l'equazione di ristretta lungo tale linea di flusso:

$$p_\alpha + \frac{1}{2}\rho v_\alpha^2 + \rho g z_\alpha = p_\beta + \frac{1}{2}\rho v_\beta^2 + \rho g z_\beta. \quad (5.1)$$

Poiché $p_\alpha = p_\beta = p_{\text{atm}}$ e $v_\alpha = v_\beta$ per conservazione della portata, da Eq. (5.1) si ottiene $z_\alpha = z_\beta$, il che è assurdo. Dunque, l'ipotesi iniziale deve essere scorretta: una tale linea di

flusso non può esistere.¹¹ In realtà, ciò che accade è che le linee di flusso risultano regolari solo nel contenitore superiore e all'interno del tubo, mentre all'uscita inferiore del tubo esse si spezzano: il liquido in uscita dal tubo urta con il liquido quasi fermo nel contenitore inferiore, causando una redistribuzione disordinata delle molecole e generando turbolenza, come schematizzato in Fig. 16(c). I flussi turbolenti sono intrinsecamente non stazionari (e rotazionali) a tutte le scale, perciò non è possibile applicare alcuna generalizzazione dell'equazione di Bernoulli.

Pertanto, l'equazione di Bernoulli (ristretta) può al più essere applicata tra il punto α e il punto γ , situato immediatamente al di sotto dell'uscita del tubo, dove la pressione è determinata dalla legge di Stevino,¹² cioè $p_\gamma = p_{\text{atm}} + \rho g(z_\beta - z_\gamma)$. Ne consegue che

$$p_\alpha + \frac{1}{2}\rho v_\alpha^2 + \rho g z_\alpha = p_\gamma + \frac{1}{2}\rho v_\gamma^2 + \rho g z_\gamma, \quad (5.2)$$

da cui si ricava

$$v_\gamma = \sqrt{2g(z_\alpha - z_\beta)}, \quad (5.3)$$

un risultato che si riduce ai limiti corretti per $z_\alpha = z_\beta$ e per $z_\beta = 0$, e che non dipende dalla quota dell'estremità inferiore del tubo.

In definitiva, si hanno due regimi in base al valore istantaneo di h :

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2g(L + z_1)} & \text{se} & \quad h \leq H - L, \\ v &= \sqrt{2g(z_1 - h + H)} & \text{se} & \quad h > H - L, \end{aligned}$$

corrispondenti rispettivamente a quando l'estremità inferiore del tubo è libera e a quando è immersa. Detta z_1 l'altezza istantanea del pelo dell'acqua nel contenitore in alto, per la conservazione della portata si ha

$$\frac{d}{dt}(z_1 + h) = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = h_0 - h,$$

quindi

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2g(L + h_0 - h)} & \text{se} & \quad h \leq H - L, \\ v &= \sqrt{2g(H + h_0 - 2h)} & \text{se} & \quad h > H - L, \end{aligned}$$

che è una funzione continua nel punto $h^* = H - L$. I due tratti sono degli archi di parabola con asse parallelo alle ascisse e sono riportati in Fig. 17.

2. Per il calcolo del tempo di svuotamento, distinguiamo i casi $h_0 \leq H - L$ e $h_0 > H - L$. Nel primo caso, il tempo di svuotamento è

$$t_f(h_0) = \frac{A}{S\sqrt{2g}} \int_0^{h_0} \frac{dh}{\sqrt{L + h_0 - h}} = \frac{2A}{S\sqrt{2g}} (\sqrt{L + h_0} - \sqrt{L}).$$

Nel secondo caso, invece, si passa per entrambi i regimi. Segue che

$$\begin{aligned} t_f(h_0) &= \frac{A}{S\sqrt{2g}} \left[\int_0^{H-L} \frac{dh}{\sqrt{L + h_0 - h}} + \int_{H-L}^{h_0} \frac{dh}{\sqrt{H + h_0 - 2h}} \right] \\ &= \frac{A}{S\sqrt{2g}} (2\sqrt{L + h_0} - \sqrt{h_0 - H + 2L} - \sqrt{H - h_0}). \end{aligned}$$

Il grafico qualitativo di $t_f(h_0)$ è riportato in Fig. 18.

¹¹Lo stesso risultato vale anche nel caso in cui le sezioni trasversali dei due contenitori siano diverse, purché la sezione del tubo sia molto più piccola di entrambe, in modo da garantire l'ipotesi di stazionarietà e trascurare i termini in v^2 .

¹²La spiegazione è la seguente. Il fluido stazionario contenuto nel recipiente inferiore, al di sopra del livello dell'uscita del tubo, si comporta come un pistone di massa $\rho \Sigma_A(z_\beta - z_\gamma)$. La pressione associata a tale pistone fittizio è pari al suo peso per unità di area, ossia $\rho g(z_\beta - z_\gamma)$, cui va sommato il contributo della pressione atmosferica.

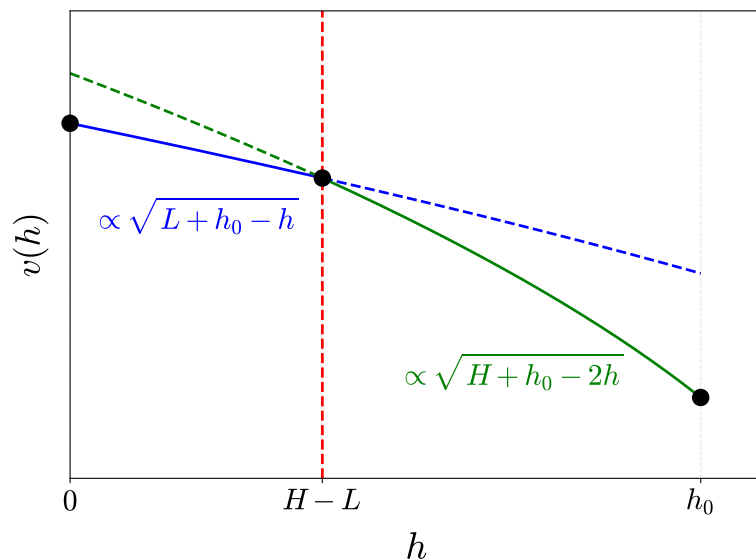


Figura 17: Velocità di fuoriuscita dell'acqua, in funzione dell'altezza istantanea del pelo dell'acqua nel contenitore inferiore.

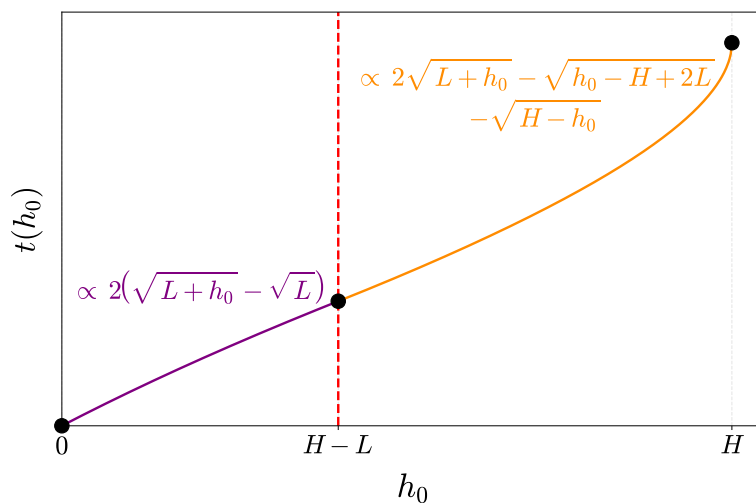


Figura 18: Tempo di svuotamento in funzione di h_0 .

3. L'energia dissipata è la differenza di energia potenziale del sistema, dato che l'energia cinetica è nulla sia all'inizio che alla fine (quando l'acqua non è più mossa). Quindi

$$\Delta E = mg(h_f - h_i) = \rho g A h_0 \left(\frac{h_0}{2} - H - \frac{h_0}{2} \right) = -\rho g A h_0 H.$$

Tale energia viene dissipata nella zona immediatamente sottostante il tubo, in cui il flusso di fluido in discesa si scontra con il fluido nel contenitore inferiore, praticamente fermo. Tali urti sono dissipano l'energia meccanica del sistema. In realtà, ci sono motivazioni più profonde legate al limite $\mu \rightarrow 0$ delle soluzioni di NS, associate alla cosiddetta *dissipazione anomala*.

4. Introdurre gli effetti viscosi fa abbassare il valore della velocità in tutto il dominio del grafico in Fig. 17, mantenendo comunque la stessa monotonia. Conseguentemente, i tempi si dilatano mantenendo la monotonia della funzione $t_f(h_0)$ in Fig. 18. Matematicamente,

usando l'equazione di Bernoulli viscosa, si ottiene

$$v = -\frac{8\pi\mu L}{\rho S} + \sqrt{\left(\frac{8\pi\mu L}{\rho S}\right)^2 + 2g(z_\alpha - z_\beta)}. \quad (5.4)$$

Il prossimo esempio mostra come svuotamento e riempimento non siano fenomeni speculari. Infatti, se riavvolgessimo il tempo nell'esercizio precedente, potrebbe sembrare di riuscire a descrivere la situazione in cui il contenitore si riempie dal basso. In realtà, se si prova a riempire un contenitore in questo modo, il flusso dentro il contenitore non è mai laminare, neanche per piccole velocità. In gergo, si dice che *il riempimento non è il time-reversal dello svuotamento*.

Esempio 5.2 (Fontana di Erone, tratto da un allenamento della Gara a Squadre di Fisica 2025). *In Fig. 19 è illustrata una schematizzazione della fontana di Erone. Il vano posto in alto è aperto superiormente e comunica con quello inferiore tramite due sottili condotti verticali, di sezioni trascurabili rispetto a quelle dei contenitori. Le distanze tra le estremità inferiori dei condotti e il fondo del vano inferiore sono molto piccole in confronto alle altezze indicate in figura. Le regioni indicate con A, B e C contengono acqua, mentre D contiene aria a pressione leggermente maggiore di quella atmosferica. In un certo momento, le quote dei tre peli dell'acqua in figura valgono h_1 , h_2 e h_3 e, nei condotti verticali, la velocità di salita risulta inferiore del f% rispetto alla velocità di discesa. Trascurando gli effetti dovuti alla viscosità dell'acqua, quanto vale l'altezza h del getto d'acqua in quel momento?*

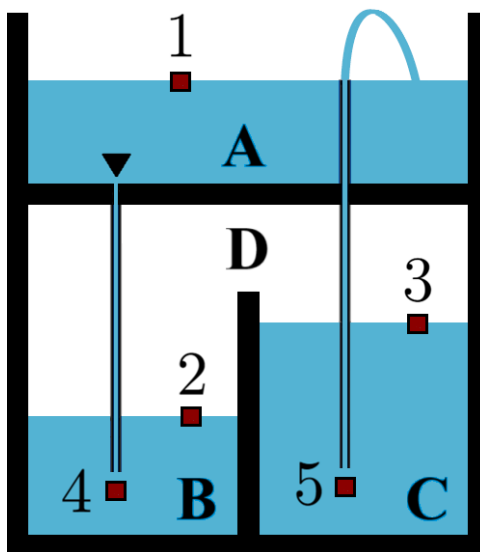


Figura 19: Schematizzazione della fontana di Erone.

Indichiamo con v_1 e v_2 i moduli delle velocità dell'acqua, rispettivamente in discesa e in salita, nei due condotti verticali. La pressione dell'aria contenuta nel vano D è $p_1 > p_{\text{atm}}$, mentre ρ è la densità dell'acqua. Applichiamo l'equazione di Bernoulli ristretta ai due flussi in figura: a sinistra, considerando la superficie libera del liquido in A e l'apertura inferiore del condotto verticale in B , e a destra, considerando la parte superiore del getto sopra A e la superficie libera dell'acqua in C . Si trova

$$\begin{cases} p_{\text{atm}} + \rho gh_1 = p_1 + \rho gh_2 + \frac{1}{2}\rho v_1^2, \\ p_1 + \rho gh_3 = p_{\text{atm}} + \rho g(h_1 + h). \end{cases}$$

Nota: a sinistra è sbagliato scrivere l'equazione di Bernoulli (ristretta) considerando la superficie libera del liquido in A e la superficie libera del liquido in B , come per il ramo di destra.

Infatti, si otterrebbe

$$p_{\text{atm}} + \rho g h_1 = p_1 + \rho g h_2,$$

ma si commetterebbe un errore molto grave. Bisogna ricordarsi che l'equazione di Bernoulli vale solo sotto certe ipotesi, tra cui l'esistenza delle linee di flusso. La differenza principale tra i flussi negli scompartimenti B e C (solo negli scompartimenti, non nei tubi) è che nel primo non sono individuabili delle linee di flusso, mentre nel secondo sì. Questo è dovuto al fatto che B si sta riempiendo, quindi l'acqua che fuoriesce dalla parte inferiore del condotto di sinistra “urta” l'acqua circostante e si distribuisce in modo non ordinato. Questa non è nient'altro che turbolenza, che può caratterizzare un sistema anche in assenza di viscosità. Al contrario, C si sta svuotando, quindi in esso l'acqua fluisce verso l'estremità del condotto in modo “ordinato”, seguendo delle linee di flusso ben precise. In definitiva, in C possiamo estendere la validità dell'equazione di Bernoulli sino alla superficie libera dell'acqua. Invece, in B dobbiamo limitarci all'estremità inferiore del condotto, posizionata a un'altezza praticamente nulla, in cui la pressione è data dalla legge di Stevino. Inoltre, la velocità nel punto apicale del getto è nulla e, data l'ipotesi sulle sezioni, possiamo trascurare la velocità dell'acqua sulle superfici libere.

Sommando membro a membro e facendo le opportune semplificazioni, si ottiene

$$v_1^2 = 2g(h_3 - h_2 - h).$$

Imponendo che $v_2^2 = 2gh$, per la conservazione dell'energia meccanica, e scrivendo v_2 come $v_2 = kv_1$ con $k = 1 - f/100$, si ricava

$$h = k^2(h_3 - h_2 - h) \quad \Rightarrow \quad h = \frac{k^2(h_3 - h_2)}{1 + k^2}.$$

SEZ. 6 — FORZA SUI CONDOTTI

In questa sezione vogliamo calcolare la forza risultante che il fluido esercita sul condotto rigido in cui scorre, pari e opposta alla forza necessaria a mantenere il condotto fermo tramite vincoli esterni. Uno dei tanti modi di scrivere l'equazione di Navier-Stokes per la quantità di moto, in un sistema di riferimento inerziale, è

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \vec{\nabla} \cdot \left[\rho \vec{v} \vec{v} - \vec{\sigma} \right] - \rho \vec{f} = 0,$$

dove $\vec{v} \vec{v}$ indica un tensore, $\vec{\sigma} \equiv -p\vec{I} + \vec{\tau}$ è il tensore degli sforzi e $\vec{f}$ è la densità di forze di volume esterne, come quella gravitazionale. Sia $\mathcal{V}$ un volume di controllo fisso nello spazio, con frontiera (superficie) $\mathcal{S}$ orientata dal versore normale uscente $\hat{n}$. Integrando l'equazione precedente su tutto il volume V , si ottiene

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \vec{v} dV + \oint_{\mathcal{S}} \left[\rho \vec{v} \vec{v} - \vec{\sigma} \right] \cdot \hat{n} dS - \int_{\mathcal{V}} \rho \vec{f} dV = 0,$$

dove abbiamo usato il teorema della divergenza e sfruttato il fatto che $\mathcal{V}$ è fisso nello spazio per poter poter tirar fuori l'operatore di derivata temporale, diventata “d” perché l'integrale dipende solo dal tempo. Qui, al solito, $\hat{n}$ è la normale uscente dal fluido in esame. La forza totale che il fluido contenuto nel volume di controllo applica sul resto del fluido e/o sulle pareti del contenitore in cui scorre è rappresentata dal termine in $-\vec{\sigma}$, dato che contiene gli effetti di pressione e viscosità: infatti, il volume di controllo interagisce con il resto dell'ambiente unicamente tramite forze di contatto (legate alla pressione e alla viscosità).¹³ Dunque:

$$\vec{F}_{\mathcal{V} \rightarrow \text{esterno}} \equiv - \oint_{\mathcal{S}} \vec{\sigma} \cdot \hat{n} dS = - \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \vec{v} dV - \oint_{\mathcal{S}} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \hat{n}) dS + \int_{\mathcal{V}} \rho \vec{f} dV,$$

¹³Un modo per ricordarsi il segno giusto è questo: la forza applicata dal volume di controllo al resto del sistema deve andare come $+\oint_{\mathcal{S}} p(\vec{r}) \hat{n} dS$ in Eq. (1.4), quindi come $-\vec{\sigma}$.

Sfruttando il principio di azione e reazione e l'ipotesi di flusso stazionario, otteniamo

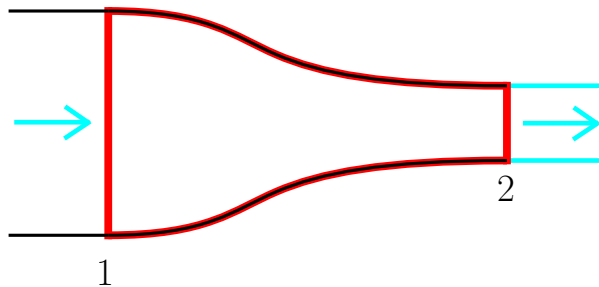
$$\vec{F}_{\text{esterno} \rightarrow \mathcal{V}} = \oint_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \hat{n}) dS - \int_{\mathcal{V}} \rho \vec{f} dV. \quad (6.1)$$

Se come volume di controllo si sceglie una regione la cui superficie coincide con quella del contenitore o del condotto in cui scorre il fluido, l'Eq. (6.1) rappresenta la forza vincolare necessaria a mantenere il contenitore/condotto fermo. Infatti, nel limite di fluido fermo in un contenitore, si ottiene $\vec{F}_{\text{vincoli}} = -\vec{F}_{\text{peso}}$, cioè il caso della forza normale tra piano orizzontale e contenitore.

L'Eq. (6.1) è molto importante: essa ci dice che per calcolare le forze agenti sul volume di controllo non c'è bisogno di conoscere la velocità ovunque, ma bastano i valori sulla superficie che racchiude tale volume.

Nel seguenti esempi trascureremo l'azione della forza gravitazionale e gli effetti viscosi, in modo da considerare velocità uniformi sulle sezioni dei tubi.

Esempio 6.1 (Ugello dritto). *Un flusso d'acqua attraversa un ugello rettilineo: la sezione di ingresso è A_1 , quella di uscita è $A_2 < A_1$. La velocità media di ingresso è v_1 e le pressioni sono p_1 e $p_2 = p_{\text{atm}}$, dato che il getto finisce in aria. Trascurando la gravità, calcola la forza necessaria a tenere fermo l'ugello.*



Scegliamo come volume di controllo $\mathcal{V}$ il fluido contenuto nell'ugello, delimitato dalle due sezioni di taglio S_1 e S_2 e dalla parete interna S_w . La normale $\hat{n}$ è uscente dal fluido: dunque $\hat{n} = -\hat{x}$ su S_1 e $\hat{n} = +\hat{x}$ su S_2 . Segue che

$$\vec{F}_{\text{esterno} \rightarrow \mathcal{V}} = \oint_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \hat{n}) dS, \quad \mathcal{S} = S_1 \cup S_2 \cup S_w.$$

Sul tratto di parete S_w non c'è flusso attraverso la superficie, quindi $\vec{v} \cdot \hat{n} = 0$ e il contributo convettivo è nullo. Restano solo le sezioni di ingresso e uscita:¹⁴

$$\oint_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \hat{n}) dS = \underbrace{\rho v_2^2 A_2}_{S_2} \hat{x} - \underbrace{\rho v_1^2 A_1}_{S_1} \hat{x}.$$

Quindi

$$\vec{F}_{\text{esterno} \rightarrow \mathcal{V}} = (\rho v_2^2 A_2 - \rho v_1^2 A_1) \hat{x}. \quad (6.2)$$

Ora riscriviamo la forza esterna come somma di contributi noti (pressione alle sezioni) e ignoti (vincoli). Sulle sezioni di taglio l'esterno esercita sul fluido una trazione di pressione $-p \hat{n}$, per cui

$$\vec{F}_{p, S_1} = - \int_{S_1} p_1 \hat{n} dS = +p_1 A_1 \hat{x}, \quad \vec{F}_{p, S_2} = - \int_{S_2} p_2 \hat{n} dS = -p_2 A_2 \hat{x}.$$

¹⁴Ricordate che un modo più veloce di fare questo conto nel caso di un condotto a 1 entrata e 1 uscita è $\vec{F}_{\text{esterno} \rightarrow \mathcal{V}} = \dot{m}(-\vec{v}_{\text{entrata}} + \vec{v}_{\text{uscita}})$, dove $\dot{m} = \rho v_1 A_1 = \rho v_2 A_2$ è la portata di massa.

Indichiamo con $\vec{F}_{\text{vincoli} \rightarrow \mathcal{V}}$ la forza totale esercitata dalla parete sull'acqua. Allora

$$\vec{F}_{\text{esterno} \rightarrow \mathcal{V}} = \vec{F}_{\text{vincoli} \rightarrow \mathcal{V}} + p_1 A_1 \hat{x} - p_2 A_2 \hat{x}.$$

Sostituendo in (6.2) otteniamo

$$\vec{F}_{\text{vincoli} \rightarrow \mathcal{V}} = (\rho v_2^2 A_2 - \rho v_1^2 A_1) \hat{x} - p_1 A_1 \hat{x} + p_2 A_2 \hat{x}.$$

Usando pressioni relative rispetto all'atmosfera, $p_{i,g} = p_i - p_{\text{atm}}$, e $p_2 = p_{\text{atm}}$, si ha

$$\vec{F}_{\text{vincoli} \rightarrow \mathcal{V}} \longrightarrow (\rho v_2^2 A_2 - \rho v_1^2 A_1 - p_{1,g} A_1) \hat{x}.$$

Inoltre, l'equazione di Bernoulli ristretta tra 1 e 2 dà

$$p_{1,g} = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2), \quad \text{e per continuità} \quad v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2}.$$

Sostituendo si ottiene

$$\vec{F}_{\text{vincoli} \rightarrow \mathcal{V}} = -\frac{1}{2} \rho A_1 v_1^2 \left(\frac{A_1}{A_2} - 1 \right)^2 \hat{x}. \quad (6.3)$$

Il segno mostra che la forza di vincolo necessaria è diretta in verso opposto al flusso: l'ugello tenderebbe a rinculare.

Esempio 6.2 (Tubo piegato a 90°). *Un tubo con curva a 90° alimenta un ugello: la sezione di ingresso è A_1 , con normale in direzione $\hat{x}$, quella di uscita è A_2 , con normale diretta lungo $\hat{y}$. Trascurando la gravità, trova la forza necessaria a mantenere fermo l'ugello.*



Scegliamo $\mathcal{V}$ come il fluido contenuto nel tubo e tagliamo il flusso alle sezioni S_1 e S_2 ; indichiamo con S_w la parete. Le velocità medie sono

$$\vec{v}_1 = v_1 \hat{x}, \quad \vec{v}_2 = v_2 \hat{y}, \quad \hat{n} = -\hat{x} \text{ su } S_1, \quad \hat{n} = +\hat{y} \text{ su } S_2.$$

Segue che

$$\oint_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \hat{n}) dS = \underbrace{\rho v_2^2 A_2 \hat{y}}_{S_2} - \underbrace{\rho v_1^2 A_1 \hat{x}}_{S_1}.$$

Dunque

$$\vec{F}_{\text{esterno} \rightarrow \mathcal{V}} = -\rho v_1^2 A_1 \hat{x} + \rho v_2^2 A_2 \hat{y}. \quad (6.4)$$

Come prima, scindiamo la forza esterna in pressione sulle sezioni e vincoli sulle pareti. Le forze di pressione esercitate dall'esterno sul fluido valgono

$$\vec{F}_{p, S_1} = p_1 A_1 \hat{x}, \quad \vec{F}_{p, S_2} = -p_2 A_2 \hat{y}.$$

Quindi

$$\vec{F}_{\text{esterno} \rightarrow \mathcal{V}} = \vec{F}_{\text{vincoli} \rightarrow \mathcal{V}} + p_1 A_1 \hat{x} - p_2 A_2 \hat{y}.$$

Sostituendo (6.4) otteniamo la forza dei vincoli sul fluido:

$$\vec{F}_{\text{vincoli} \rightarrow \mathcal{V}} = (-\rho v_1^2 A_1 - p_1 A_1) \hat{x} + (\rho v_2^2 A_2 + p_2 A_2) \hat{y}. \quad (6.5)$$

Usando pressioni relative rispetto all'atmosfera e ponendo $p_2 = p_{\text{atm}}$ (quindi $p_{2,g} = 0$), si ha

$$\vec{F}_{\text{vincoli} \rightarrow \mathcal{V}} = (-\rho v_1^2 A_1 - p_{1,g} A_1) \hat{x} + \rho v_2^2 A_2 \hat{y} = -\frac{1}{2} \rho A_1 (v_1^2 + v_2^2) \hat{x} + \rho v_2^2 A_2 \hat{y}.$$

La forza totale richiesta per mantenere fermo il tubo è quindi bidirezionale: una componente è legata al trasporto di quantità di moto deviato lungo $\hat{y}$, l'altra alla variazione di quantità di moto lungo $\hat{x}$ e alla sovrappressione a monte.

Problema 6.1. Il flusso in un condotto ha velocità v_1 in ingresso (lungo $\hat{e}_1$) e v_2 in uscita (lungo $\hat{e}_2$), con $\hat{e}_1$ che forma un angolo θ con $\hat{e}_2$. Le aree sono A_1 e A_2 , le pressioni statiche p_1 e p_2 . Trascurando la gravità, calcolare le componenti della forza necessaria a tenere fermo il condotto.